



Y3955940

中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

博士学位论文



论文题目 囚禁离子的超分辨成像研究

作者姓名 钱忠华

学科专业 物理学

导师姓名 黄运锋 研究员 崔金明 副研究员

完成时间 二〇二一年十一月



中国科学技术大学 博士学位论文



囚禁离子的超分辨成像研究

作者姓名： 钱忠华

学科专业： 物理学

导师姓名： 黄运锋 研究员 崔金明 副研究员

完成时间： 二〇二一年十一月十三日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



Super-resolved imaging of trapped ions

Author: Qian Zhonghua

Speciality: Physics

Supervisors: Prof. Huang Yunfeng, Associate Prof. Cui Jinming

Finished time: November 13, 2021

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名: 钱忠军

签字日期: 2021.11.16

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☒ 公开 ☐ 保密 (____ 年)

作者签名: 钱忠军

导师签名: 董运锋

签字日期: 2021.11.16

签字日期: 2021.11.16

摘 要

近几十年来,量子计算、量子通信和量子精密测量的飞速发展引领了第二次量子革命。随着实验技术的进步,人们对于单个或多个量子比特的操控手段日益丰富,操控精度日益提高,借助量子技术,有望大幅提高现有计算速度,增加通讯的安全性,提高物理量的测量精度。对于原子、离子、分子和固态量子体系而言,远场光学通常用于量子比特的操纵、探测和成像。例如在离子阱系统中,用远场聚焦的阵列光斑对任意位置的单离子寻址,实现任意两离子或多离子间的量子纠缠;利用态依赖的荧光技术探测离子内态;通过多普勒冷却过程,利用物镜收集散射的荧光直接成像。

对于量子系统而言,成像分辨率是一个非常重要的指标。它决定了系统中能够分辨的两个量子比特的最小距离,从而决定了单个原子或离子的位移探测精度。但是根据阿贝衍射极限,分辨率受限于波长和物镜的数值孔径,极限分辨率在半波长量级。

为了克服衍射极限带来的分辨率限制,我们提出了基于基态耗尽的量子系统超分辨成像方案。其原理类似于生物领域的受激辐射损耗显微镜,利用空心光(中间光强为零)选择性地耗量子比特的基态。当离子位于空心光中心时,由于光强为零,量子态保持不变,而在其他区域,量子态将会被极化,这样量子比特的空间位置将会被编码在量子态上。

本文的研究内容主要包括以下四个部分:

(1) 研究了基于数字显微镜设备的全息光束整形技术。该方法的关键在于波前像差的纠正和光束的整形。我们利用多步相移法测量出了整个光学系统的像差,并将修正后的波前相位叠加到待整形光束的相位上,将计算出的全息图投影在数字显微镜设备上生成了不同阶次的拉盖尔-高斯光束和厄米-高斯光束;

(2) 研究了单离子的超分辨成像技术。我们建模分析了影响成像分辨率的两个因素:耗尽光强和耗尽时间,以及极限分辨率的限制因素。我们在离子阱系统中演示了超越衍射极限的成像效果,用数值孔径为 0.1 的物镜实现了 175 nm 的空间分辨率,相比传统的荧光成像方法分辨率提高了 13 倍;

(3) 利用 (2) 发展的超分辨成像技术,我们研究了离子的动力学特性。我们拍摄了单个离子的久期运动的二维轨迹图像,空间分辨率超越了衍射极限,时间分辨率达到 50 ns,轨迹的重构精度达到 10 nm;

(4) 提出了基于贝叶斯优化的波前感知与修正方法,并通过模拟仿真和实验验证了算法的有效性。该算法以 8 阶 Zernike 系数作为输入,以点扩散函数的斯特列尔比作为输出,通过迭代优化找到符合条件的输入作为最优解,其张成的相

位即为系统像差。我们研究了小像差和大像差情况下的算法收敛性和对初始相位的敏感度，验证了该算法在收敛速度和鲁棒性上具有一定优势，作为 (I) 算法的改进。

我们发展出一套冷原子体系的二维超分辨成像工具，该方法可以扩展到多离子、光晶格、光镊和腔量子电动力学体系中，用来实现单原子或多原子的分辨，以实现更高的时空探测精度。也可以用来提高物理量如位移、电场力的探测灵敏度。

关键词：超分辨成像；离子阱；态探测；光束整形；贝叶斯优化

ABSTRACT

In recent decades, the rapid development of quantum computing, quantum communication, and quantum metrology fields has led to the second quantum revolution. The improvement of experimental techniques allows richer and more precise quantum manipulation methods on single or multiple qubits. This progress potentially makes the speed of computation faster, the protocol of communication securer, and detection of physical parameters more precise. For experimental systems such as atoms, ions, molecules, and solid-states, far-field optical manipulations have been widely used in quantum manipulation, detection, and imaging. Taking the trapped ion as an example, the tightly focused beam array is employed to realize ion addressing and entanglement between arbitrary ions. With the state-dependent fluorescence technique, state detection is demonstrated with high fidelity. Imaging is accomplished with the objective, which collects scattering photons from the qubit within Doppler cooling cycles.

For imaging systems, spatial resolution is a very important parameter. Basically, it determines the minimum distance between resolvable points and the sensitivity of single ion's position. However, the resolution is fundamentally limited by the wavelength and numerical aperture of the objective lens according to the diffraction theory of Abbe, leading to the minimum resolution which cannot surpass the half wavelength.

To break the diffraction limit, we propose and demonstrate the super-resolved imaging scheme using a single trapped ion. The principle is based on ground state depletion, which is similar to the stimulated emission depletion microscopy. We utilize the doughnut beam to selectively depopulate the spin. It will remain unchanged when located in the center area due to the low intensity. Otherwise, the spin will be depopulated. In this way, the spatial information is encoded in the quantum state.

This research can be mainly organized into four parts.

(1) We investigate the holographic beam reshaping technique based on digital micromirror devices. The key points lie in the aberration correction and beam reshaping with holographic patterns. We employ multi-step phase shift method to measure the aberration of the whole optical system. Then the holographic patterns considering the corrected aberration are computed and projected. With this method, various modes of Laguerre-Gaussian and Hermit-Gaussian beams are generated. In contrast to other techniques of beam reshaping, this method is adaptive and able to produce modes of higher purity.

(2) We demonstrate the super-resolved imaging on single trapped ions. We analyzed two factors determining the spatial resolution, i.e., the intensity and duration of the depletion beam. The limit of resolution is also discussed. The achieved resolution is 175 nm with objectives of NA=0.1, which is beyond the optical diffraction limit and improves over 13 times than fluorescence microscopy.

(3) With this technique, the dynamics of trapped ion is investigated. We take a video of a single ion's secular motion in a period of hundreds of nanoseconds. We achieve a 50 ns of temporal resolution and 10 nm precision of the trajectories.

(4) Bayesian optimization for wavefront sensing is proposed and investigated from the point of simulation and experiment. This algorithm takes the 8 orders Zernike coefficients as input parameter and Strehl ratio of point spread function of images as output. The optimal solution is generated by iterating many steps until a Strehl ratio closing 1.0 is found. The performance in the case of small and large aberration is investigated. We verify the merits of fast converging speed and robustness to initial conditions compared with other algorithms. This algorithm performs better than (1).

We developed a super-resolved imaging tool for cold atoms and extend one dimension imaging to two dimensions. This technique can be extended into many other quantum systems such as trapped ion chain,s optical lattices, optical tweezers, and cavity QED. The applications include resolving single atoms from ensembles to achieve higher precision of detection and improving the sensitivity of parameters like displacement and electric force.

Key Words: Super-resolved imaging; ion trap; quantum state detection ; beam reshaping; Bayesian optimization

目 录

第1章 绪论	1
1.1 光学显微镜	2
1.1.1 结构	2
1.1.2 关键指标	4
1.2 超分辨成像	7
1.2.1 单分子定位显微镜	7
1.2.2 受激辐射耗尽显微镜	7
1.2.3 结构光照明显微镜	8
1.2.4 量子系统中的超分辨成像	9
1.3 离子阱	11
第2章 离子阱系统	14
2.1 离子阱原理	14
2.1.1 离子阱电势	14
2.1.2 离子运动	16
2.1.3 稳定条件	17
2.1.4 赝势近似	18
2.1.5 静电场的影响	19
2.2 离子阱构型	20
2.2.1 柱状阱	20
2.2.2 Needle trap	21
2.2.3 线性阱	21
2.3 高真空的获得	22
2.4 成像和荧光收集	26
2.5 激光系统	29
2.6 螺旋谐振腔和微波	31
2.6.1 螺旋谐振腔	31
2.6.2 微波	32
2.7 Yb^+ 态操作	32
2.7.1 离子化	33
2.7.2 激光冷却	35
2.7.3 初始化	36

2.7.4 态探测	36
第3章 全息光束整形	39
3.1 光束整形在 AMO 实验中的应用	39
3.2 DMD 的结构和特性	41
3.3 全息光束整形的原理	42
3.3.1 DMD 的衍射特性	43
3.3.2 DMD 波前调制的原理	45
3.3.3 生成全息图	46
3.4 波前感知	47
3.4.1 相位修正	47
3.4.2 相位解包	50
3.4.3 相位插值	51
3.4.4 相位和振幅补偿	51
3.4.5 算法改进	53
3.4.6 像差分析	55
3.5 光束整形	55
3.5.1 Laguerre-Gaussian 光束	55
3.5.2 Hermite-Gaussian 光束	56
第4章 离子超分辨成像	58
4.1 简介	58
4.2 实验原理	60
4.2.1 时序	60
4.2.2 分辨率推导	61
4.2.3 分辨率极限	63
4.3 实验方法	63
4.3.1 激光光路	63
4.3.2 光束整形	66
4.3.3 激光频率稳频	68
4.4 实验结果	70
4.5 讨论与总结	71
第5章 离子运动探测	74
5.1 离子动力学探测方法	74
5.2 离子波包探测	75
5.3 实验方法	76

5.4 实验结果	78
5.4.1 运动频率稳定	78
5.4.2 驱动电压的校准	79
5.4.3 动力学的时间分辨率	80
5.4.4 离子的二维运动轨迹	81
5.5 总结与讨论	81
第 6 章 基于贝叶斯优化的波前感知	84
6.1 基于图像的波前感知	84
6.1.1 GS 算法	85
6.1.2 Error-Reduction 算法	86
6.1.3 Input-Output 算法	86
6.1.4 基于深度学习的波前感知算法	87
6.2 基于贝叶斯优化的波前感知	87
6.2.1 贝叶斯优化	87
6.2.2 实验方法	92
6.2.3 模拟方法	93
6.2.4 模拟结果	93
6.3 实验	94
6.4 讨论与总结	97
第 7 章 总结与展望	98
7.1 总结	98
7.2 展望	98
附录 A 离子的受激振荡模型	100
A.1 通解	100
A.2 完整解	100
A.3 相位稳定性条件	101
参考文献	102
致 谢	116
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	118

第1章 绪 论

显微镜是人类观察微观物质和结构的“眼镜”。“眼睛”的结构决定了能够观察到的尺度大小，即分辨率大小。人眼的分辨率大约为 100 μm ，相当于一根头发丝的直径，现代光学显微镜的分辨率可以达到 200 nm，而电子显微镜甚至可以达到 0.1 nm，足以分辨单个原子。不同种类显微镜的分辨率如图1.1所示。

显微镜作为一种极其重要的科学研究的工具，它的每一次革新和进步，都会推动各个学科的巨大飞跃。1665年，罗伯特·胡克用自制的光学显微镜第一次看到了植物细胞壁结构，并命名为细胞。虽然这并不是真正意义上的细胞，但是却打开了微生物学的一扇窗。1674年，列文虎克首次观察到了真正的活细胞，开启了微生物学的研究热潮。到了十九世纪，得益于玻璃制造工艺的进步，人们设计出了消色差物镜，成像质量和分辨率大大提高，使得更多种类的微生物相继被发现。二十世纪，新型显微技术蓬勃发展，如偏振光显微镜^[1]、相衬显微镜^[2-3]、荧光显微镜^[4]等。基于荧光显微镜，人们进一步发展了一系列超分辨显微成像技术，如单分子定位显微镜(SMLM)^[5]、结构光照明显微镜(SIM)^[6]、受激辐射耗尽显微镜(STED)^[7-8]等，将远场光学显微镜的分辨率推至 nm 级，细胞内的微小结构（如线粒体、高尔基体）和生化反应的动力学过程得以被研究^[9]。另一方面，受到光学成像的启发，人们利用电子的波长（100 kV 的加速电压下波长为 0.037 Å）远小于可见光波长（约 500 nm 量级）的特点，发明了电子显微镜，包括扫描电子显微镜(SEM)^[10-11]、透射电子显微镜(TEM)^[12]等，用于分析固体表面的结构。电子显微镜的分辨率远高于光学显微镜。利用二次电子成像，透射电镜的分辨率可以达到 0.1 nm。但是由于电子显微镜的操作需要真空环境，并且高能电子束会改变生物样本的结构，所以电子显微镜并不适合观察生物样本组织。直到二十世纪八九十年代，Dubochet 等人提出一种样品制备的方法，可以让生物分子在真空中保持其自然形状^[13]，这种方法可以将样品迅速冷却成玻璃状而不结晶，从而不破坏样品本身的结构特征，这样电子显微镜便可以用来观察生物样品，这便是冷冻电镜的思想。2017年，Dubochet、Frank 和 Henderson 因为发明冷冻电子显微镜(cryo-EM)用于溶液生物分子的高分辨率结构测量而荣获诺贝尔化学奖。冷冻电镜近些年来在生物学领域大放异彩，国内很多研究组使用冷冻电镜研究了分子级别的生化反应过程和生物分子的三维结构^[14-16]，时常见诸于顶级期刊。例如利用冷冻电镜技术解析人体细胞膜表面的 ACE2 蛋白^[17]和新冠病毒表面的 S 蛋白的三维结构^[18]，揭示了新冠病毒入侵人体细胞结合的过程。

光学显微镜和电子显微镜各有优缺点，且使用范围不同。光学显微镜的分辨率虽然不及电子显微镜，但是可以观察活体样本，无需真空条件，成本低廉，对

样品的破坏力较小,因此尤其适合生物领域的观测。尽管冷冻电镜也可以用于观察生物样品,但复杂的样品制备方法,昂贵的设备,让一般研究组望而却步,因此其使用范围大大受限。除了生物领域,光学手段经常用于在原子分子和固态量子体系中,用来操纵量子态和成像。

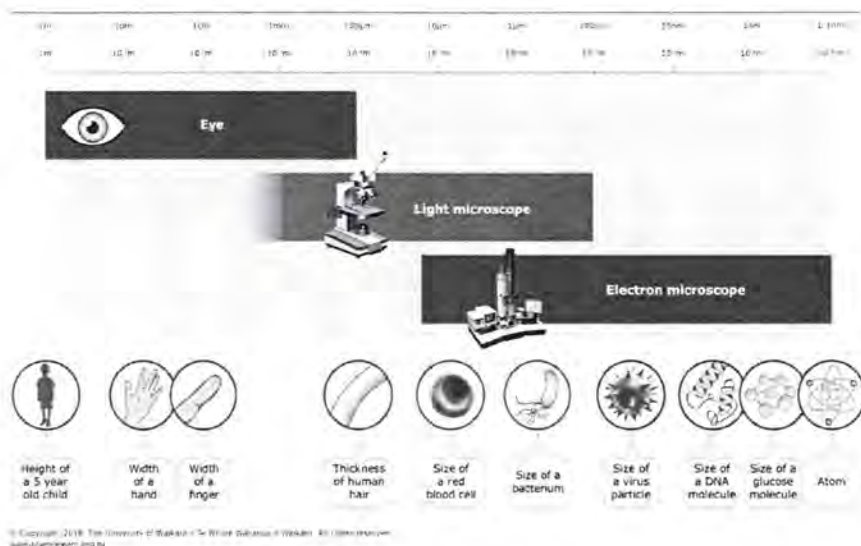


图 1.1 人眼、光学显微镜和电子显微镜的分辨率范围 (图片来自网络^[19])。

本章首先介绍了典型光学显微镜的结构,然后说明显微镜的关键指标。接着解释了荧光显微镜中的几种超分辨成像方法,这些方法突破了光学衍射极限,使得分辨率提升到了纳米量级。我们还讨论了超分辨成像方法在量子系统中的发展现状。不同系统的量子比特有其独特的能级结构,超分辨成像技巧有着新的应用场景。最后将简述离子阱系统的概况,引出本文的研究目标:在离子阱系统中实现二维超分辨成像并演示其应用。

1.1 光学显微镜

1.1.1 结构

一个典型的光学显微镜的光路如图1.2所示,主要元件包括照明灯 (lamp)、集光镜 (collector lens)、视场光阑 (field diaphragm)、孔径光阑 (aperture diaphragm)、聚光镜 (condenser)、样品 (specimen)、物镜 (objective)、目镜 (eyepiece) 和图像接受器 (眼睛或相机)。照明灯 (如钨灯、卤素灯) 通电流后温度达到两千多 K,由于黑体辐射效应产生非相干光,经过集光镜和聚光镜聚焦后照亮样品。样品结构散射的光被物镜收集后形成实像,经过目镜再次放大后进入人眼或相机成像。

下面我们将介绍几个重要的概念：物镜、聚光镜以及柯勒照明。

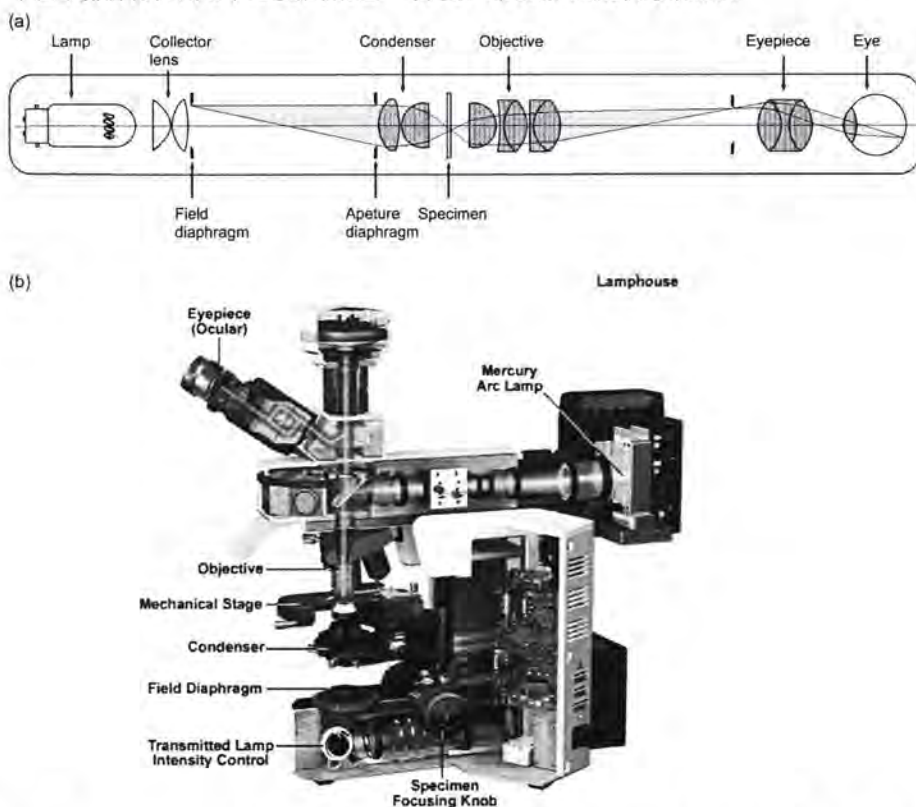


图 1.2 显微镜的成像光路。(a) 简化的光路图，主要包括照明系统和成像系统。(b) 商业光学显微镜的结构透视图^[20]。

物镜

物镜本质上是一个透镜或透镜组。为了获得分辨率更高的图像，需要减小物镜的像差和色差，而单个透镜离开旁轴近似的条件很难做到这一点，所以现代物镜往往由多个单透镜组成。按照矫正色像差的能力划分，物镜可以分为消色差物镜、萤石物镜和复消色差物镜，三者消色像差的能力依次变强。消色差物镜针对红光和蓝光消色差，针对绿光消球差，适合灰度成像；萤石物镜的部分镜片用光学萤石制造，它的色散较低，红外线、紫外线的透过率高，色像差校正程度在消色差物镜和复消色差物镜之间，因此又称为半复消色差物镜。复消色差物镜采用特种玻璃和萤石等材料制作，结构复杂，不仅可以消除红绿蓝光的色差，还能消除红蓝光的球差，适合彩色成像。除了镜片的像差，一般的生物样本上方带有盖玻片（厚度小于 1 mm），商业物镜在设计时也会消除盖玻片带来的像差。在离子阱系统中，离子和物镜之间会有几毫米厚的真空窗口，所以不能直接用生物上的商业物镜，需要特殊设计和优化。而且物镜通常放置在真空腔体外，最近的一片

透镜与离子相距约十几毫米，这就要求物镜有较长的工作距离，这给物镜设计增加了一些难度。总而言之，需要根据离子的波长和工作距离自行设计物镜，其初始结构可以参考原子系统中的相关文献^[21-22]。

聚光镜

聚光镜的目的是提供锥形光束照亮待观察样本，前方的孔径光阑用来控制锥角的大小以调节照明的亮度。聚光镜的数值孔径一般大于物镜的数值孔径，这样才能保证足够大角度的散射光被物镜被收集到。

柯勒照明

大多数显微镜使用内置的白炽灯照明。灯丝具有螺旋状结构，是非均匀光源，光谱覆盖了可见光波段，每个波段的光谱密度也不均匀。但是在成像时，要求照明灯光可以均匀照亮样品。科勒照明解决了这个问题。如图1.2(a)所示，灯丝经过集光镜聚焦成像在聚光镜的前焦面上，这样经过聚光镜后达到样品面上的光强均匀明亮。柯勒照明目前被广泛应用在显微镜的设计中^[23]。

1.1.2 关键指标

数值孔径

物镜收集样品的散射光或荧光的能力决定了其分辨样品细节的能力。物镜收集成像光线的角度和介质折射率决定了数值孔径 (numerical aperture, NA) (图1.3(a)所示)：

$$NA = n \sin \alpha, \quad (1.1)$$

α 是锥角的一半， n 是样品和物镜之间介质的折射率。从上式可以看出，可以通过提高收集角和折射率提高数值孔径。

分辨率

根据瑞利判据，当一个艾里斑的最大值与相邻艾里斑的第一极小值重叠时，认为这两个光斑刚好可以分辨，如图1.3(b)所示。两个艾里斑中心点之间的距离定义为显微镜的横向空间分辨率：

$$d = 0.61 \lambda / NA, \quad (1.2)$$

λ 是波长， NA 是数值孔径。

为什么远场成像分辨率为什么会受到波长、介质折射率和收集角度的限制？0.61 又是怎么来的？下面将从物理的角度解释这些因素是如何影响分辨率的。

波长

角谱理论可以用来解释为什么分辨率受限于波长^[24]。 $z = 0$ 处光场的复振幅 $U(x, y, 0)$ 可以表示成一系列不同空间频率的平面波的叠加：

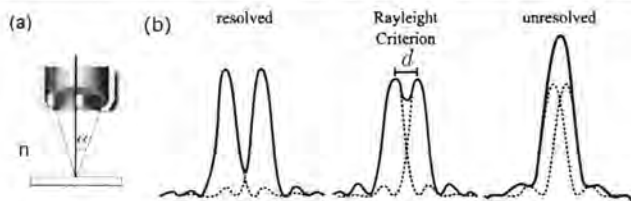


图 1.3 显微镜分辨率。(a) 数值孔径；(b) 瑞利判据。恰能分辨时的两个艾里斑的中心距离定义为横向空间分辨率。

$$U(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(f_X, f_Y, 0) \exp(j2\pi(f_X x + f_Y y)) df_X df_Y, \quad (1.3)$$

其中 $\exp(j2\pi(f_X x + f_Y y))$ 表示一束平面波， f_X, f_Y 是空间频率。平面波还可以用波矢来表示 $\exp(j\vec{k} \cdot \vec{r})|_{z=0} = \exp(j(k\alpha x + k\beta y))$ ，波矢为 $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = (k\alpha, k\beta, k\gamma)$ ， $k = 2\pi n/\lambda$ ，其中 α, β, γ 是波矢 k 与 x, y, z 轴的夹角的余弦值， n 是介质折射率。将两种方法对应起来，可以得到 $\alpha = \lambda f_X/n$ ， $\beta = \lambda f_Y/n$ ， $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{1 - (\lambda f_X/n)^2 - (\lambda f_Y/n)^2}$ 。平面波的幅度 $A(f_X, f_Y, 0)$ 称为角谱。

自由空间中平面波从 $z = 0$ 传播到 $z = z$ ，角谱的演化方程为：

$$A(f_X, f_Y; z) = A(f_X, f_Y; 0) \exp\left(jk\sqrt{1 - (\lambda f_X/n)^2 - (\lambda f_Y/n)^2}z\right), \quad (1.4)$$

上式相位部分的物理意义很有趣。当 $1 - (\lambda f_X/n)^2 - (\lambda f_Y/n)^2 < 0$ ，即 $f_X^2 + f_Y^2 \leq 1/(\lambda/n)^2$ 时， z 处的角谱只是增加了一个相位；而当 $f_X^2 + f_Y^2 > 1/(\lambda/n)^2$ 时，相位部分变成了一个随着 z 轴传播的指数衰减项，从而无法向远场传播，这就是倏逝波的由来。也就是说向前传播的过程本身相当于一个滤波器，物体的光场被截取了一部分空间频率，更高的空间频率以倏逝波的形式局域在 $z = 0$ 附近。空间频率的倒数就是分辨率，由此可以看出，通过远场成像的方式（均匀照明的情况下）获得的分辨率总是小于 λ/n 。而近场显微镜利用倏逝波可以探测到更高频率的信息，从而突破衍射极限的限制。

收集角

阿贝 (Abbe) 成像理论从频谱的角度解释了收集角或者物镜的孔径是如何限制分辨率的。考虑一个光栅的成像过程，如图1.4所示，单色光经过光栅后会衍射出不同的级次，级次越高，衍射角越大。不同级次的衍射光作为不同角度的平行光，经过透镜聚焦后会在焦平面（或频谱面）上形成一系列衍射斑。根据惠更斯-菲涅耳原理，这些衍射斑又将作为次级波源向前传播，最终在成像面上形成光栅的像。理想透镜的尺寸无限大，可以收集所有衍射级次的光，最终在成像面上将还原光栅图样上的空间频率小于等于 n/λ 的物体细节。但是现实中，透镜的

尺寸总是有限的,此时透镜相当于一个低通滤波器,仅保留低频的衍射级次,丢失光栅的高频结构信息,所以无法分辨细小的结构,空间分辨率受到限制。从这个角度出发,可知提高分辨率的一个思路就是提高物镜的数值孔径,以尽可能多地获取高阶衍射信息。上述理论可以推广至一般物体的成像。

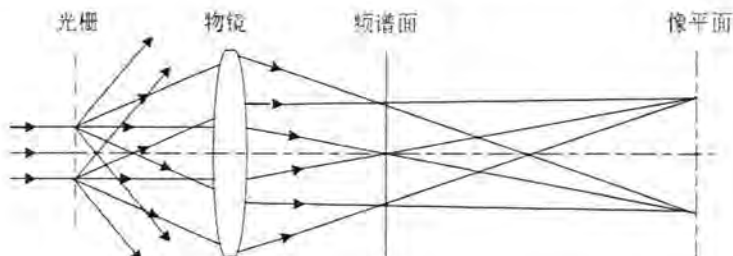


图 1.4 Abbe 成像理论。不同衍射级次的光经过透镜聚焦后在频谱面上形成不同的衍射斑,作为次级波源继续传播形成最终的像。

增大数值孔径的一个坏处是减小景深 (depth of field)。景深是指艾里斑在 z 轴有一定的纵深,表达式为

$$z = \frac{n\lambda}{NA^2}. \quad (1.5)$$

由上式可知,景深一般是大于横向分辨率的。

介质折射率

同样的收集角,油浸物镜的分辨率高于样品位于空气中的物镜的分辨率。这一点可以从光栅方程中看出: $nd \sin \theta = m\lambda$ 。式中 n, d, m 分别表示介质折射率、光栅周期和衍射级次。对于相同的 θ , 折射率越大,衍射级次越高,收集到的高频信息越多,成像分辨率越高。

系数 0.61

均匀光场经过半径为 w 的圆形孔径在透镜焦点 (焦距为 f) 处成像,形成艾里斑。成像点的光强分布满足:

$$I(r) \propto \left(\frac{J_1(kwr/f)}{kwr/f} \right). \quad (1.6)$$

艾里斑中间最大值到第一个零点的距离是

$$d = 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot w/f} = 0.61 \frac{\lambda}{n \sin \theta}. \quad (1.7)$$

如果入瞳是某些特殊的形状,则系数会略微变化。

1.2 超分辨成像

根据方程1.2, 取 $\lambda = 400 \text{ nm}$, $\text{NA} = 1$, 光学显微镜的成像分辨率极限在 200 nm 左右, 无法解析细胞内的结构如线粒体、高尔基体、细胞支架等。所以需要发展出分辨率能到纳米级别的光学显微镜。上世纪 90 年代, 人们发展了很多技术用来提高分辨率, 如 4Pi 显微镜将两个物镜相对放置使得样品被相干照亮, 将轴向分辨率由 500 nm 提高到了 100 nm 左右^[25], 但仍然无法突破衍射极限。近场显微镜将一个尺寸远小于波长的探针放置在距离样品 1 个波长以内, 探测倏逝波信息^[26], 分辨率可以达到 100 nm , 虽然可以突破衍射极限, 但必须在近场条件下操作, 应用范围受限。1994 年, Stefan Hell 提出受激辐射耗尽的超分辨成像方案^[7], 理论上可以突破衍射极限, 开启了超分辨显微成像的研究热潮。随后单分子定位技术和结构光照明技术也相继被提出, 远场光学显微镜的分辨率迈入纳米时代。下面将简要介绍各种超分辨成像方案的原理。

1.2.1 单分子定位显微镜

单分子定位技术每次随机打开稀疏位置的荧光分子, 使得单个衍射极限范围内只有一个荧光分子发光, 测量 N 次单分子的位置, 通过高斯拟合, 得到定位精度 $\sigma_{\text{loc}} \approx \text{FWHM}/\sqrt{N}$ ^[27], 其中 FWHM 是点扩散函数的半高全宽, 这样就能以远小于 FWHM 的精度定位出单个分子的中心位置。不断重复此过程, 使得所有荧光分子位置都被拟合过, 最终合成所有数据得到一幅完整的图像。该方法的巧妙之处在于利用稀疏采样过程避开了衍射极限的限制。尽管每个分子的横向分辨率仍然在几百纳米, 但是通过多次拟合, 可以使定位精度远小于点扩散函数的分辨率^[28]。基于此原理的技术包括光激活定位显微技术 (PALM)^[29-30], 随机光学重建显微技术 (STORM)^[31] 等。

1.2.2 受激辐射耗尽显微镜

受激辐射耗尽显微镜采用结构化光场扫描成像, 减小了等效点扩散函数的尺寸。原理如图1.5所示, 首先通过高斯光将荧光分子从基态泵浦到激发态, 然后在短时间内用圆圈光 (中间光强为 0) 受激辐射处于激发态的荧光分子, 当荧光分子位于圆圈光中心时, 由于光强几乎为 0, 仍然布居在原来的态, 在其他地方光强不为 0, 会通过受激辐射过程回到基态, 于是中心区域作为等效点扩散函数被极大地压窄。最后中间激发态自发辐射产生的荧光被探测器收集, 再经过逐点逐层扫描得到物体的二维或三维荧光图像。

STED 显微镜的分辨率为^[32]

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2\text{NA}\sqrt{1 + I_{\text{STED}}^{\text{max}}/I_{\text{sat}}}}, \quad (1.8)$$

式中 $I_{\text{STED}}^{\text{max}}$ 表示耗尽光的最大光强, I_{sat} 是荧光分子的饱和吸收光强。基于 STED 衍生出来的方法包括可逆饱和光学荧光转化显微技术 (RESOLFT)^[8], 基态耗尽 (GSD) 显微镜^[33] 等。

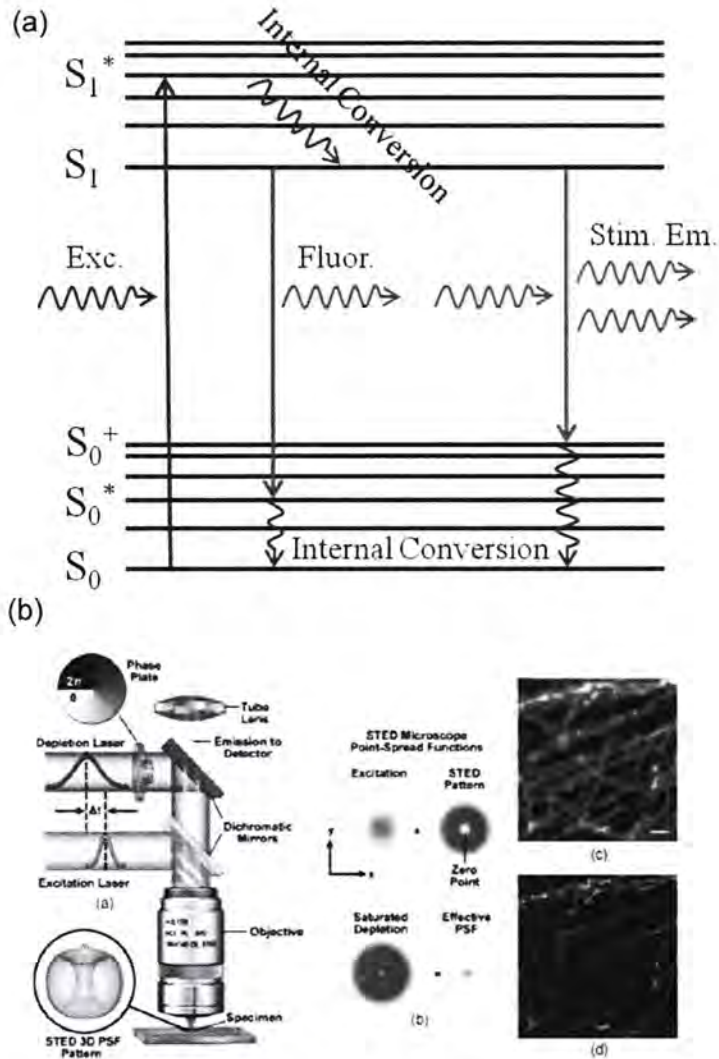


图 1.5 STED 原理和实验装置图 (图片来自网络^[34])。 (a) 荧光分子的能级结构和激发、耗尽过程。 (b) STED 实验装置以及成像效果。

1.2.3 结构光照明显微镜

衍射极限的一个条件是使用均匀光场照明样品。SIM 则另辟蹊径, 用结构光场而不是均匀光场照明样品, 将分辨率提升到阿贝衍射极限的两倍^[6], 其成像原理类似于莫尔条纹。如图 1.6(a) 所示, 将两个空间频率很高的图案 (接近水平的

两组细条纹)按一定角度叠放在一起,可以观察到一个放大效果的空间频率较低的条纹(接近竖直的粗条纹),该条纹的空间频率是两个密条纹空间频率拍频的结果。对于普通宽场显微镜来说,其所能分辨的空间频率的范围如图1.6(b)所示。在SIM显微镜中,如果照明图案的衍射1级落在物镜分辨率的边界上(图1.6(c)黄球所示),物体的高频空间信息就可以通过和照明图案中的 ± 1 级衍射图案混频,产生低频信号,移到物镜可观测的频谱范围内,如图1.6(d)所示。通过变换照明图案的角度和相位,可以将原来的频域孔径的半径扩大一倍,相应的分辨率提高一倍,如图1.6(e)所示。

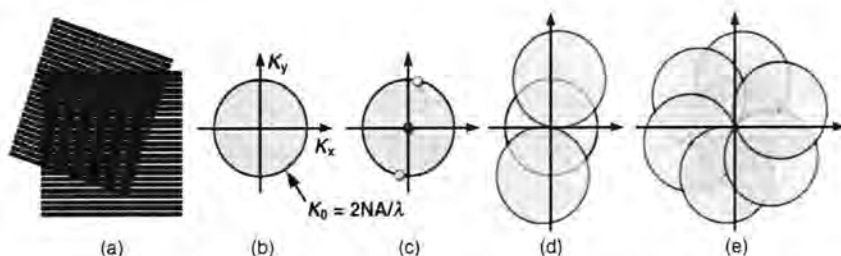


图 1.6 (a) 莫尔条纹; (b) 均匀照明场(宽场)显微镜的分辨率频谱空间; (c,d,e) SIM 将高频信息和结构光拍频产生低频信息被物镜收集^[20]。

1.2.4 量子系统中的超分辨成像

在量子系统中,提高空间分辨率具有非常重要的意义。由于量子比特的能级结构和荧光分子比较类似,因此上述超分辨成像技术也可能运用在这些量子系统上。虽然不是用于生物成像,但可能用于量子信息的处理。接下来,本文将从金刚石色心、量子点和原子系统概述超分辨成像技术的研究进展。

金刚石色心

将金刚石色心(NV center)看做一个荧光分子,其能级结构如图1.7所示。基态($|M_s = 0\rangle$)可以被激光泵浦到激发态 ^3E ,随后通过自发辐射过程回到基态。而 $|M_s| = 1$ 的态被泵浦后会以较大的概率通过无辐射跃迁经过 $^1A_1$ 亚稳态回到基态。超分辨成像分为四步。首先通过532 nm的高斯模式的激光泵浦的方式将自旋初始化到基态 $|M_s = 0\rangle$,然后通过电子自旋共振(ESR)将NV center制备到 $|M_s = \pm 1\rangle$ 态。接着用同样波长的圆圈光耗尽NV center。当NV center位于圆圈光中心时,由于光强很弱,自旋依然保留在 $|M_s = \pm 1\rangle$ 态,而在其他位置,高光强的圆圈光会将自旋耗尽到基态 $|M_s = 0\rangle$ 。最后通过态依赖荧光的探测方法读出自旋态。当自旋处于基态时,荧光辐射速率较快,否则荧光信号微弱^[35-37]。Lukin组用这种方法实现了38 nm分辨率^[35],并且可以区分相距150 nm的NV

色心。孙方稳研究组将分辨率提升到了 6.1 nm ^[36]。通过固态浸没的方法，可以将数值孔径做到 2.2，从而将分辨率压窄到 2.4 nm ^[38]。

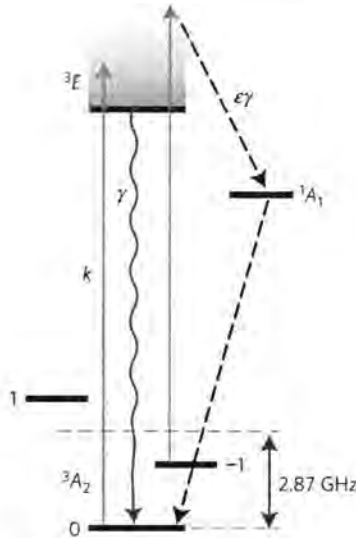


图 1.7 金刚石色心的能级结构^[35]。

量子点

在上述方案中，自旋态之间的转换是通过光泵浦过程实现，需要布居到激发态辐射光子，这个过程是非相干的。巴塞尔大学的 Timo Kaldewey 研究组提出一种基于快速绝热通道过程的超分辨成像过程，能通过相干过程实现开关态之间的转移^[39]。相干过程的好处在于避免跃迁到一个中间态或激发态，减少了辐射光子反冲带来的加热效应。此外这种方法还对激发态的能级漂移具有鲁棒性，特别是对于固态体系，其能级结构易受到环境噪声的干扰，具有非均匀性。实验表明相干态转移的方法对于非全同的量子比特仍然能实现高保真度的态切换。他们在量子点系统上演示了基于这种相干过程的超分辨成像过程，分辨率达到了 30 nm ，相比共聚焦成像方法，分辨率提高了 10 倍。

原子

原子系统中的超分辨成像的理论和实验研究更加丰富。按照两个态之间的跃迁方式可以分为非相干和相干两种方法。非相干的跃迁同 NV center 中的类似，是通过光泵浦到中间激发态实现的超分辨成像，这里不再赘述，可以参考^[40]；而相干的方法则是通过相干布居捕获 (CPT)^[41] 或电磁诱导透明 (EIT)^[42-44] 制备位置依赖的暗态^[45-48]。原理如下图 1.8 所示：在 Λ 型的三能级结构中，控制光 Ω_c 具有驻波场的空间模式，探针光 Ω_p 的光强是均匀的，不随空间变化。在控制光光强远远大于探针光光强的地方，暗态接近于 $|1\rangle$ 态，反之，当控制光光强接近

0 时, 暗态趋近于 $|2\rangle$ 态。暗态在 $|2\rangle$ 态的布居数投影如图1.8(b)中的绿色曲线所示, 其半高全宽表示的分辨率随着控制光光强的增加而提升。暗态表达式如下:

$$|\psi_{\text{dark}}\rangle = \frac{\Omega_C^*}{\sqrt{|\Omega_P|^2 + |\Omega_C|^2}}|1\rangle - \frac{\Omega_P^*}{\sqrt{|\Omega_P|^2 + |\Omega_C|^2}}|2\rangle. \quad (1.9)$$

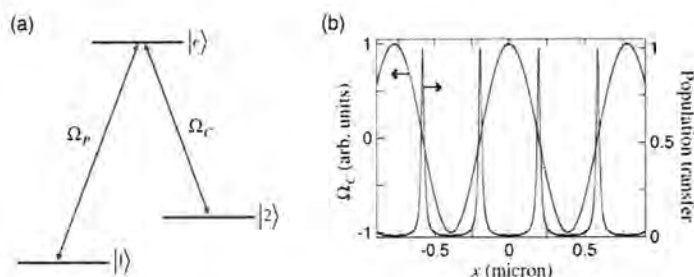


图 1.8 基于 EIT 的原子超分辨成像方案^[42]。(a) Λ 型能级结构。(b) 控制光的拉比频率 (红色) 和暗态在 $|2\rangle$ 上的布居数变化 (绿色)。

1.3 离子阱

离子阱使用交变电场或静电场加磁场的方式囚禁离子, 是一个非常理想的量子信息的研究平台。离子作为量子比特具有诸多优点: (1) 相干时间长, 如果不使用自旋回波或动力学解耦的手段, 相干时间可以达到 50 秒, 如果使用动力学解耦, 可以达到 1 小时^[49]。由于单比特门和多比特门的操作时间在 1-100 us 量级, 所以离子阱量子计算平台可以实现的操作数在 10^6 量级, 远远大于超导系统的 10^3 量级; (2) 门操作的保真度高。单比特门的保真度可以达到 99.9999%, 两比特门保真度达到 99.93%, 超过了量子计算的容错阈值^[50]; (3) 态制备和态读出的保真度也很高 (超过 99.9%)。

适合做量子信息处理的离子的最外层通常只有一个价电子, 算上离子化过程丢失的一个电子, 所以中性原子有两个价电子, 因此离子元素通常是第 IIA 族 (铍 Be、镁 Mg、钙 Ca、锶 Sr、钡 Ba 和镭 Ra^[51]) 或第 IIB 族元素 (锌 Zn、镉 Cd 和汞 Hg) 或某些镧系金属 (镱 Yb), 如图1.9所示。根据量子比特的两个能级的种类划分, 量子比特可分为超精细能级比特、光学比特和塞曼能级比特。超精细能级比特利用基态能级核自旋劈裂产生的两个超精细能级作为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$, 能级寿命长, 对磁场强度涨落一阶不敏感, 能级差在 GHz 量级, 适合用微波或拉曼光驱动态翻转。光学比特的能级由一个基态能级和亚稳态能级组成, 态翻转通常由近红外激光驱动, 由于亚稳态能级寿命长 (1 s 量级), 要求激光线宽极窄 (1 Hz 量级)。塞曼能级比特的两个能级是同一个精细能级在磁场下劈裂出的两个塞

曼能级，能级寿命长，劈裂在 MHz 量级。

PERIODIC TABLE
Atomic Properties of the Elements

NIST
National Institute of Standards and Technology
Technology Administration, U.S. Department of Commerce

Physics Laboratory
physics.nist.gov

Standard Reference Data Group
www.nist.gov/srd

Group
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
IA IIA IIIA IVA VA VIA VIIA VIIIA

Period
1 2 3 4 5 6 7

1 H
Hydrogen
1.00794
1.008

2 He
Helium
4.002602
4.0026

3 Li
Lithium
6.941
6.94

4 Be
Beryllium
9.012182
9.0122

5 B
Boron
10.811
10.81

6 C
Carbon
12.011
12.01

7 N
Nitrogen
14.007
14.01

8 O
Oxygen
15.999
16.00

9 F
Fluorine
18.998
19.00

10 Ne
Neon
20.180
20.18

11 Na
Sodium
22.990
22.99

12 Mg
Magnesium
24.305
24.31

13 Al
Aluminum
26.982
26.98

14 Si
Silicon
28.086
28.09

15 P
Phosphorus
30.974
30.97

16 S
Sulfur
32.06
32.07

17 Cl
Chlorine
35.45
35.46

18 Ar
Argon
39.95
39.96

19 K
Potassium
39.098
39.10

20 Ca
Calcium
40.078
40.08

21 Sc
Scandium
44.956
44.96

22 Ti
Titanium
47.88
47.88

23 V
Vanadium
50.942
50.94

24 Cr
Chromium
51.996
52.00

25 Mn
Manganese
54.938
54.94

26 Fe
Iron
55.845
55.85

27 Co
Cobalt
58.933
58.93

28 Ni
Nickel
58.69
58.69

29 Cu
Copper
63.546
63.55

30 Zn
Zinc
65.38
65.38

31 Ga
Gallium
69.723
69.72

32 Ge
Germanium
72.63
72.64

33 As
Arsenic
74.922
74.92

34 Se
Selenium
78.96
78.97

35 Br
Bromine
79.904
80.00

36 Kr
Krypton
83.80
83.81

37 Rb
Rubidium
85.468
85.47

38 Sr
Strontium
87.62
87.62

39 Y
Yttrium
88.906
88.91

40 Zr
Zirconium
91.224
91.22

41 Nb
Niobium
92.906
92.91

42 Mo
Molybdenum
95.94
95.94

43 Tc
Technetium
98.906
98.91

44 Ru
Ruthenium
101.07
101.07

45 Rh
Rhodium
102.91
102.91

46 Pd
Palladium
106.42
106.42

47 Ag
Silver
107.87
107.87

48 Cd
Cadmium
112.41
112.41

49 In
Indium
114.82
114.82

50 Sn
Tin
118.71
118.71

51 Sb
Antimony
121.76
121.76

52 Te
Tellurium
127.60
127.60

53 I
Iodine
126.91
126.91

54 Xe
Xenon
131.29
131.29

55 Cs
Cesium
132.91
132.91

56 Ba
Barium
137.33
137.33

57 La
Lanthanum
138.91
138.91

58 Ce
Cerium
140.12
140.12

59 Pr
Praseodymium
140.91
140.91

60 Nd
Neodymium
144.24
144.24

61 Pm
Promethium
144.91
144.91

62 Sm
Samarium
150.36
150.36

63 Eu
Europium
151.96
151.96

64 Gd
Gadolinium
157.25
157.25

65 Tb
Terbium
158.93
158.93

66 Dy
Dysprosium
162.50
162.50

67 Ho
Holmium
164.93
164.93

68 Er
Erbium
167.26
167.26

69 Tm
Thulium
168.93
168.93

70 Yb
Ytterbium
173.05
173.05

71 Lu
Lutetium
174.97
174.97

72 Hf
Hafnium
178.49
178.49

73 Ta
Tantalum
180.95
180.95

74 W
Tungsten
183.85
183.85

75 Re
Rhenium
186.21
186.21

76 Os
Osmium
190.23
190.23

77 Ir
Iridium
192.22
192.22

78 Pt
Platinum
195.08
195.08

79 Au
Gold
196.97
196.97

80 Hg
Mercury
200.59
200.59

81 Tl
Thallium
204.38
204.38

82 Pb
Lead
207.2
207.2

83 Bi
Bismuth
208.98
209.0

84 Po
Polonium
209
209

85 At
Astatine
210
210

86 Rn
Radon
222
222

87 Fr
Francium
223
223

88 Ra
Radium
226
226

89 Ac
Actinium
227
227

90 Th
Thorium
232.04
232.04

91 Pa
Protactinium
231.04
231.04

92 U
Uranium
238.03
238.03

93 Np
Neptunium
237.05
237.05

94 Pu
Plutonium
244.06
244.06

95 Am
Americium
243.06
243.06

96 Cm
Curium
247.07
247.07

97 Bk
Berkelium
247.07
247.07

98 Cf
Californium
251.08
251.08

99 Es
Einsteinium
252.08
252.08

100 Fm
Fermium
257.10
257.10

101 Md
Mendelevium
258.10
258.10

102 No
Nobelium
259.10
259.10

103 Lr
Lawrencium
262.11
262.11

104 Rf
Rutherfordium
261.11
261.11

105 Db
Dubnium
262.11
262.11

106 Sg
Seaborgium
266.12
266.12

107 Bh
Bohrium
264.12
264.12

108 Hs
Hassium
277.13
277.13

109 Mt
Meitnerium
268.13
268.13

110 Uun
Ununennium
289.14
289.14

111 Uuu
Ununtrium
288.14
288.14

112 Uub
Unbibium
285.14
285.14

113 Uut
Ununtrium
284.14
284.14

114 Uuq
Unquadium
289.15
289.15

115 Uuh
Unhexium
288.15
288.15

116 Uuq
Unquadium
294.16
294.16

117 Uuh
Unhexium
293.16
293.16

118 Uuo
Unoctium
294.16
294.16

119 Uue
Unenneium
295.16
295.16

120 Uuq
Unquadium
296.16
296.16

121 Uuh
Unhexium
297.16
297.16

122 Uuo
Unoctium
298.16
298.16

123 Uue
Unenneium
299.16
299.16

124 Uuq
Unquadium
300.16
300.16

125 Uuh
Unhexium
301.16
301.16

126 Uuo
Unoctium
302.16
302.16

127 Uue
Unenneium
303.16
303.16

128 Uuq
Unquadium
304.16
304.16

129 Uuh
Unhexium
305.16
305.16

130 Uuo
Unoctium
306.16
306.16

131 Uue
Unenneium
307.16
307.16

132 Uuq
Unquadium
308.16
308.16

133 Uuh
Unhexium
309.16
309.16

134 Uuo
Unoctium
310.16
310.16

135 Uue
Unenneium
311.16
311.16

136 Uuq
Unquadium
312.16
312.16

137 Uuh
Unhexium
313.16
313.16

138 Uuo
Unoctium
314.16
314.16

139 Uue
Unenneium
315.16
315.16

140 Uuq
Unquadium
316.16
316.16

141 Uuh
Unhexium
317.16
317.16

142 Uuo
Unoctium
318.16
318.16

143 Uue
Unenneium
319.16
319.16

144 Uuq
Unquadium
320.16
320.16

145 Uuh
Unhexium
321.16
321.16

146 Uuo
Unoctium
322.16
322.16

147 Uue
Unenneium
323.16
323.16

148 Uuq
Unquadium
324.16
324.16

149 Uuh
Unhexium
325.16
325.16

150 Uuo
Unoctium
326.16
326.16

151 Uue
Unenneium
327.16
327.16

152 Uuq
Unquadium
328.16
328.16

153 Uuh
Unhexium
329.16
329.16

154 Uuo
Unoctium
330.16
330.16

155 Uue
Unenneium
331.16
331.16

156 Uuq
Unquadium
332.16
332.16

157 Uuh
Unhexium
333.16
333.16

158 Uuo
Unoctium
334.16
334.16

159 Uue
Unenneium
335.16
335.16

160 Uuq
Unquadium
336.16
336.16

161 Uuh
Unhexium
337.16
337.16

162 Uuo
Unoctium
338.16
338.16

163 Uue
Unenneium
339.16
339.16

164 Uuq
Unquadium
340.16
340.16

165 Uuh
Unhexium
341.16
341.16

166 Uuo
Unoctium
342.16
342.16

167 Uue
Unenneium
343.16
343.16

168 Uuq
Unquadium
344.16
344.16

169 Uuh
Unhexium
345.16
345.16

170 Uuo
Unoctium
346.16
346.16

171 Uue
Unenneium
347.16
347.16

172 Uuq
Unquadium
348.16
348.16

173 Uuh
Unhexium
349.16
349.16

174 Uuo
Unoctium
350.16
350.16

175 Uue
Unenneium
351.16
351.16

176 Uuq
Unquadium
352.16
352.16

177 Uuh
Unhexium
353.16
353.16

178 Uuo
Unoctium
354.16
354.16

179 Uue
Unenneium
355.16
355.16

180 Uuq
Unquadium
356.16
356.16

181 Uuh
Unhexium
357.16
357.16

182 Uuo
Unoctium
358.16
358.16

183 Uue
Unenneium
359.16
359.16

184 Uuq
Unquadium
360.16
360.16

185 Uuh
Unhexium
361.16
361.16

186 Uuo
Unoctium
362.16
362.16

187 Uue
Unenneium
363.16
363.16

188 Uuq
Unquadium
364.16
364.16

189 Uuh
Unhexium
365.16
365.16

190 Uuo
Unoctium
366.16
366.16

191 Uue
Unenneium
367.16
367.16

192 Uuq
Unquadium
368.16
368.16

193 Uuh
Unhexium
369.16
369.16

194 Uuo
Unoctium
370.16
370.16

195 Uue
Unenneium
371.16
371.16

196 Uuq
Unquadium
372.16
372.16

197 Uuh
Unhexium
373.16
373.16

198 Uuo
Unoctium
374.16
374.16

199 Uue
Unenneium
375.16
375.16

200 Uuq
Unquadium
376.16
376.16

201 Uuh
Unhexium
377.16
377.16

202 Uuo
Unoctium
378.16
378.16

203 Uue
Unenneium
379.16
379.16

204 Uuq
Unquadium
380.16
380.16

205 Uuh
Unhexium
381.16
381.16

206 Uuo
Unoctium
382.16
382.16

207 Uue
Unenneium
383.16
383.16

208 Uuq
Unquadium
384.16
384.16

209 Uuh
Unhexium
385.16
385.16

210 Uuo
Unoctium
386.16
386.16

211 Uue
Unenneium
387.16
387.16

212 Uuq
Unquadium
388.16
388.16

213 Uuh
Unhexium
389.16
389.16

214 Uuo
Unoctium
390.16
390.16

215 Uue
Unenneium
391.16
391.16

216 Uuq
Unquadium
392.16
392.16

217 Uuh
Unhexium
393.16
393.16

218 Uuo
Unoctium
394.16
394.16

219 Uue
Unenneium
395.16
395.16

220 Uuq
Unquadium
396.16
396.16

221 Uuh
Unhexium
397.16
397.16

222 Uuo
Unoctium
398.16
398.16

223 Uue
Unenneium
399.16
399.16

224 Uuq
Unquadium
400.16
400.16

225 Uuh
Unhexium
401.16
401.16

226 Uuo
Unoctium
402.16
402.16

227 Uue
Unenneium
403.16
403.16

228 Uuq
Unquadium
404.16
404.16

229 Uuh
Unhexium
405.16
405.16

230 Uuo
Unoctium
406.16
406.16

231 Uue
Unenneium
407.16
407.16

232 Uuq
Unquadium
408.16
408.16

233 Uuh
Unhexium
409.16
409.16

234 Uuo
Unoctium
410.16
410.16

235 Uue
Unenneium
411.16
411.16

236 Uuq
Unquadium
412.16
412.16

237 Uuh
Unhexium
413.16
413.16

238 Uuo
Unoctium
414.16
414.16

239 Uue
Unenneium
415.16
415.16

240 Uuq
Unquadium
416.16
416.16

241 Uuh
Unhexium
417.16
417.16

242 Uuo
Unoctium
418.16
418.16

243 Uue
Unenneium
419.16
419.16

244 Uuq
Unquadium
420.16
420.16

245 Uuh
Unhexium
421.16
421.16

246 Uuo
Unoctium
422.16
422.16

247 Uue
Unenneium
423.16
423.16

248 Uuq
Unquadium
424.16
424.16

249 Uuh
Unhexium
425.16
425.16

250 Uuo
Unoctium
426.16
426.16

251 Uue
Unenneium
427.16
427.16

252 Uuq
Unquadium
428.16
428.16

253 Uuh
Unhexium
429.16
429.16

254 Uuo
Unoctium
430.16
430.16

255 Uue
Unenneium
431.16
431.16

256 Uuq
Unquadium
432.16
432.16

257 Uuh
Unhexium
433.16
433.16

258 Uuo
Unoctium
434.16
434.16

259 Uue
Unenneium
435.16
435.16

260 Uuq
Unquadium
436.16
436.16

261 Uuh
Unhexium
437.16
437.16

262 Uuo
Unoctium
438.16
438.16

263 Uue
Unenneium
439.16
439.16

264 Uuq
Unquadium
440.16
440.16

265 Uuh
Unhexium
441.16
441.16

266 Uuo
Unoctium
442.16
442.16

267 Uue
Unenneium
443.16
443.16

268 Uuq
Unquadium
444.16
444.16

269 Uuh
Unhexium
445.16
445.16

270 Uuo
Unoctium
446.16
446.16

271 Uue
Unenneium
447.16
447.16

272 Uuq
Unquadium
448.16
448.16

273 Uuh
Unhexium
449.16
449.16

274 Uuo
Unoctium
450.16
450.16

275 Uue
Unenneium
451.16
451.16

276 Uuq
Unquadium
452.16
452.16

277 Uuh
Unhexium
453.16
453.16

278 Uuo
Unoctium
454.16
454.16

279 Uue
Unenneium
455.16
455.16

280 Uuq
Unquadium
456.16
456.16

281 Uuh
Unhexium
457.16
457.16

282 Uuo
Unoctium
458.16
458.16

283 Uue
Unenneium
459.16
459.16

284 Uuq
Unquadium
460.16
460.16

285 Uuh
Unhexium
461.16
461.16

286 Uuo
Unoctium
462.16
462.16

287 Uue
Unenneium
463.16
463.16

288 Uuq
Unquadium
464.16
464.16

289 Uuh
Unhexium
465.16
465.16

290 Uuo
Unoctium
466.16
466.16

291 Uue
Unenneium
467.16
467.16

292 Uuq
Unquadium
468.16
468.16

293 Uuh
Unhexium
469.16
469.16

294 Uuo
Unoctium
470.16
470.16

295 Uue
Unenneium
471.16
471.16

296 Uuq
Unquadium
472.16
472.16

297 Uuh
Unhexium
473.16
473.16

298 Uuo
Unoctium
474.16
474.16

299 Uue
Unenneium
475.16
475.16

300 Uuq
Unquadium
476.16
476.16

301 Uuh
Unhexium
477.16
477.16

302 Uuo
Unoctium
478.16
478.16

303 Uue
Unenneium
479.16
479.16

304 Uuq
Unquadium
480.16
480.16

305 Uuh
Unhexium
481.16
481.16

306 Uuo
Unoctium
482.16
482.16

307 Uue
Unenneium
483.16
483.16

308 Uuq
Unquadium
484.16
484.16

309 Uuh
Unhexium
485.16
485.16

310 Uuo
Unoctium
486.16
486.16

311 Uue
Unenneium
487.16
487.16

312 Uuq
Unquadium
488.16
488.16

313 Uuh
Unhexium
489.16
489.16

314 Uuo
Unoctium
490.16
490.16

315 Uue
Unenneium
491.16
491.16

316 Uuq
Unquadium
492.16
492.16

317 Uuh
Unhexium
493.16
493.16

318 Uuo
Unoctium
494.16
494.16

319 Uue
Unenneium
495.16
495.16

320 Uuq
Unquadium
496.16
496.16

321 Uuh
Unhexium
497.16
497.16

322 Uuo
Unoctium
498.16
498.16

323 Uue
Unenneium
499.16
499.16

324 Uuq
Unquadium
500.16
500.16

325 Uuh
Unhexium
501.16
501.16

326 Uuo
Unoctium
502.16
502.16

327 Uue
Unenneium
503.16
503.16

328 Uuq
Unquadium
504.16
504.16

329 Uuh
Unhexium
505.16
505.16

330 Uuo
Unoctium
506.16
506.16

331 Uue
Unenneium
507.16
507.16

332 Uuq
Unquadium
508.16
508.16

333 Uuh
Unhexium
509.16
509.16

334

为了提高分辨率，研究者主要的思路是提高物镜的数值孔径。例如使用 $NA=0.6$ 的物镜，单个离子的分辨率可以达到 360 nm ，定位精度达到 1.7 nm ^[57]；也可以使用抛物面镜^[58,62] 和非涅尔透镜^[63-64] 来提高数值孔径，分辨率（半高全宽）小于 250 nm 。这些方法的优点是可以提高荧光的收集效率，进而提高探测保真度，定位精度可以达到纳米量级，但是仍然不能突破衍射极限的限制，不能实时观察离子的运动。

基于以上的讨论，本文旨在离子阱系统上发展一种突破衍射极限的超分辨成像方法。其思路与基态耗尽的方法类似，我们利用整形后的空心光耗尽处于某一个基态的离子，使得处于空心光中心的离子仍然位于基态，而其他位置由于光强的存在被耗尽到另一个态，最后探测离子的内态实现成像。从理论上来说这种成像方式可以突破衍射极限，不受理论限制，本文的研究成果也实现了突破衍射成像的效果。成像的极限分辨率受限于实验上的因素，本文最后会有讨论。

本文内容组织如下：第二章介绍了离子阱系统，包括离子阱囚禁离子的原理和具体的实验装置；第三章介绍了基于数字微镜设备的全息光束整形技术，生成了高模式纯度的空心光和其他模式光场；第四章介绍了囚禁离子的超分辨成像的理论和实验研究；第五章演示了超分辨成像的一个应用：观察离子的久期运动，实现了空间和时间上的高分辨率动力学探测；第六章提出并演示了一种新的波前感知的方法：基于贝叶斯优化的波前感知，作为对第二章波前感知方法的改进；第七章，我们总结了本文的研究成果，讨论了提高分辨率的方法和一些潜在的应用，希望给其他研究者一些思路。

第2章 离子阱系统

本章首先介绍了离子阱的囚禁原理和常见的电极构型，推导了离子在几种不同结构的离子阱中的运动模式。接着从系统搭建的角度详细介绍了针型离子阱 (Needle trap) 系统的各部分，包括真空系统、成像光路、螺旋谐振腔和微波系统等。最后介绍了铯离子能级结构及其操纵手段，包括激光冷却、初始化、态探测和态耗尽。

2.1 离子阱原理

离子阱是一种使用电场或磁场囚禁带电粒子的装置，主要分为保罗阱 (Paul trap) 和彭宁阱 (Penning trap) 两种类型。前者通过交变电场产生时间平均的简谐势囚禁带电微粒，后者则借助静电场和磁场产生三维囚禁势能。19 世纪 60 年代，离子阱由 Wolfgang Paul 和 Hans Dehmelt 发明^[65]，两人因此荣获 1989 年的诺贝尔奖。1995 年，Ignacio Cirac 和 Peter Zoller 提出了基于囚禁离子的受控非门的方案^[66]。同年，NIST 离子阱研究组利用 Be 离子的内态和声子态，在实验上首次实现了两比特量子逻辑门^[67]，掀起了离子阱量子计算的研究热潮。除了量子计算，离子阱在其他领域的应用主要集中在质谱分析仪^[68-69]、光钟^[70-73]等。

2.1.1 离子阱电势

我们首先介绍 Paul trap 的囚禁原理。Paul trap 是目前应用较为广泛的一种量子计算架构，本文的研究是基于三维囚禁势的 Paul trap。根据 Earnshaw 方程^[74]，带电离子无法被囚禁在静电场中，因为在静电场中不存在电势的极大值或极小值点。Paul trap 引入交流电场，形成了一个时间平均的简谐势，解决了三维离子囚禁的问题。离子阱中的电势可以表示为

$$\phi = U_0 \frac{1}{2} (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) + V_0 \cos(\Omega_D t) \frac{1}{2} (\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2), \quad (2.1)$$

其中 U_0 表示静电场电压， V_0 , $\Omega/2\pi$ 分别表示交变电场的振幅和频率。根据拉普拉斯方程， $\Delta\phi = 0$ ，可以得到

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= 0. \end{aligned}$$

根据上面的条件，一种可能的离子阱结构满足的系数条件是：

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta = \gamma = 0, \\ \alpha' + \beta' &= -\gamma'.\end{aligned}$$

这种约束条件对应的是三维囚禁离子阱 (3D trap)，因为仅靠交变电场力就产生了 x, y, z 三个方向的束缚势，适合束缚单个离子，如图2.1所示的柱状阱，它是由上下两个端极和中间的圆环电极组成。端极截面是一个抛物面，上下端极接地。环状电极的横截面也是抛物面型，接带偏置的交流电场 $U_0 + V_0 \cos \Omega t$ 。

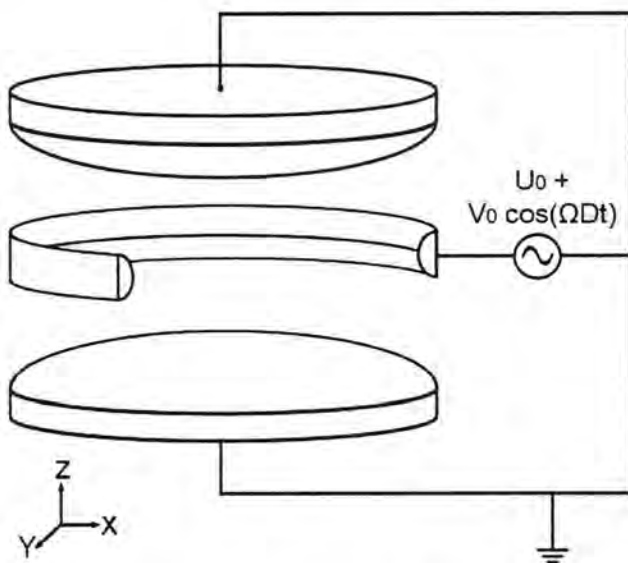


图 2.1 柱状阱，由交变电场产生三维囚禁势，适合囚禁单个离子^[75]。

另一种可能的解是

$$\begin{aligned}-(\alpha + \beta) &= \gamma > 0, \\ \alpha' &= -\beta', \quad -\gamma' = 0.\end{aligned}$$

这种条件对应的是二维囚禁离子阱 (2D trap)。可以看出，交变电场在 z 方向并没有产生囚禁势，仅在 x, y 方向上束缚住离子。而 z 方向的束缚则是由静电场提供。根据这个解可以设计出线性阱，如图2.2所示。线性阱在 xy 方向上束缚较强，在 z 方向束缚较弱，因此在 z 轴上可以稳定地囚禁一串离子。用紧聚焦的激光可以对每个离子进行寻址操纵，不仅可以实现单个离子的态操作，也能借助共同的声子模式实现多个离子之间的纠缠^[76-79]，演示小规模量子计算^[80]。

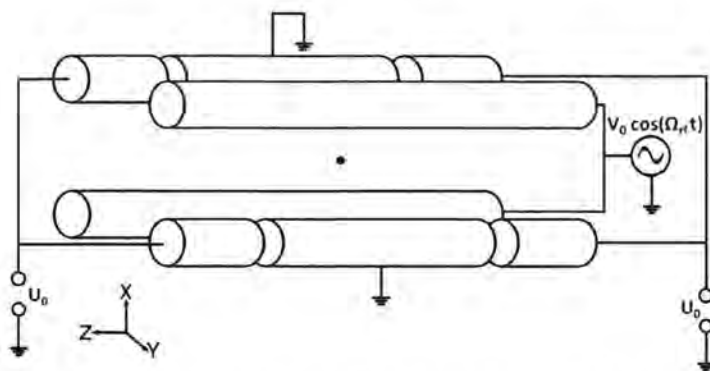


图 2.2 线性阱，由交变电场产生 xy 方向束缚势，静电场产生 z 方向束缚势，适合囚禁一维离子链^[75]。

2.1.2 离子运动

离子在静电场和交变电场力作用下的运动方程由电磁学方程可以得到。这里以 x 方向为例， y, z 方向也是同理：

$$m\ddot{x} = eE = -e \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{e}{m} [U_0 \alpha + V_0 \cos(\Omega t) \alpha'] x. \quad (2.2)$$

经过如下的变量代换

$$\xi = \frac{\Omega t}{2}, \quad (2.3)$$

$$a_x = \frac{4eU_0 \alpha}{m\Omega^2}, \quad (2.4)$$

$$q_x = \frac{2eV_0 \alpha'}{m\Omega^2}. \quad (2.5)$$

方程 2.2 可以转化为标准的马修方程 (Mathieu equation):

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + [a_x - 2q_x \cos(\Omega t) \alpha'] x = 0. \quad (2.6)$$

Mathieu 方程的标准解法较为复杂，细节可以参考^[61]，这里仅仅给出低阶近似解

$$\beta_x \approx \sqrt{a_x + q_x^2/2}, \quad (2.7)$$

$$x(t) \approx x_0 \cos\left(\frac{\beta_x}{2} \Omega t\right) \left[1 - \frac{q_x}{2} \cos(\Omega t)\right]. \quad (2.8)$$

从式 2.8 可以看出存在两种频率的运动模式。式 2.8 中括号中的第一项表示的运动频率为 $\omega_x = \frac{\beta_x}{2} \Omega$ 定义为久期运动 (secular motion) 频率，运动幅度为 x_0 ，频率是驱动频率 Ω 的 $\frac{\beta_x}{2}$ 倍。一般而言， $\frac{\beta_x}{2} \ll 1$ ，所以久期频率远远小于驱动频率。第二项表示的运动模式称之为微运动 (micromotion)，其频率等于驱动频率，幅度

$\cos(\frac{\beta}{2}\Omega t)\frac{q}{2} \ll 1$, 表明该幅度远小于久期运动的幅度, 而且随着离子偏离平衡位置, 幅度也会增大(图2.3所示)。微运动会引入二阶多普勒位移, 不利于基态冷却。实验中要将静电场的中心和射频场的中心调重合, 使得离子处于平衡位置, 尽可能减小微运动。可以用时间-运动关联的方法测量微运动的幅度^[81]。

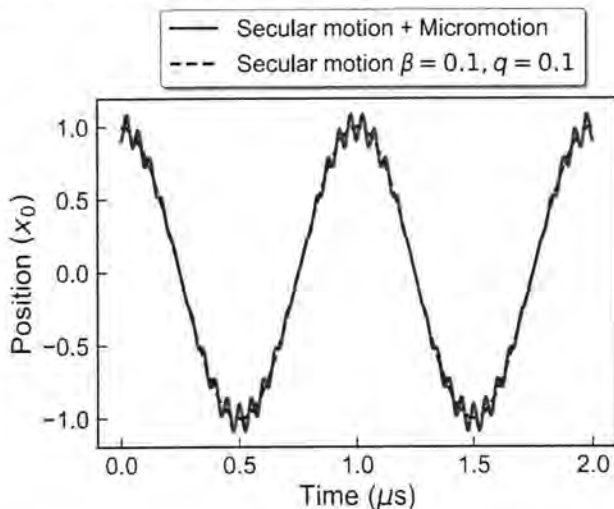


图 2.3 久期运动和微运动。微运动是叠加在久期运动上的幅度较小的运动。离子偏离平衡位置越远, 振幅越大。在平衡位置处微运动的振幅为 0。

2.1.3 稳定条件

在解马修方程2.6时, 为了得到收敛解, 参数 a_x, q_x 需要满足稳定性条件。稳定区域是由 $\beta_i = 0, \beta_i = 1 (i = x, y, z)$ 的线围成的。把包含 $a_i = 0, q_i = 0$ 的稳定区域称之为最低阶的稳定区域, 离子阱的设计参数一般落在该区域中。对于不同构型的离子阱, a_i, q_i 之间的约束关系不同, 稳定区域形状也不同。

以 3D trap 中的柱形阱为例, 由于其满足柱对称结构, 所以

$$\alpha' = \beta' = -\gamma'/2, \quad (2.9)$$

$$\alpha = \beta = -\gamma/2. \quad (2.10)$$

所以 a_i, q_i 满足

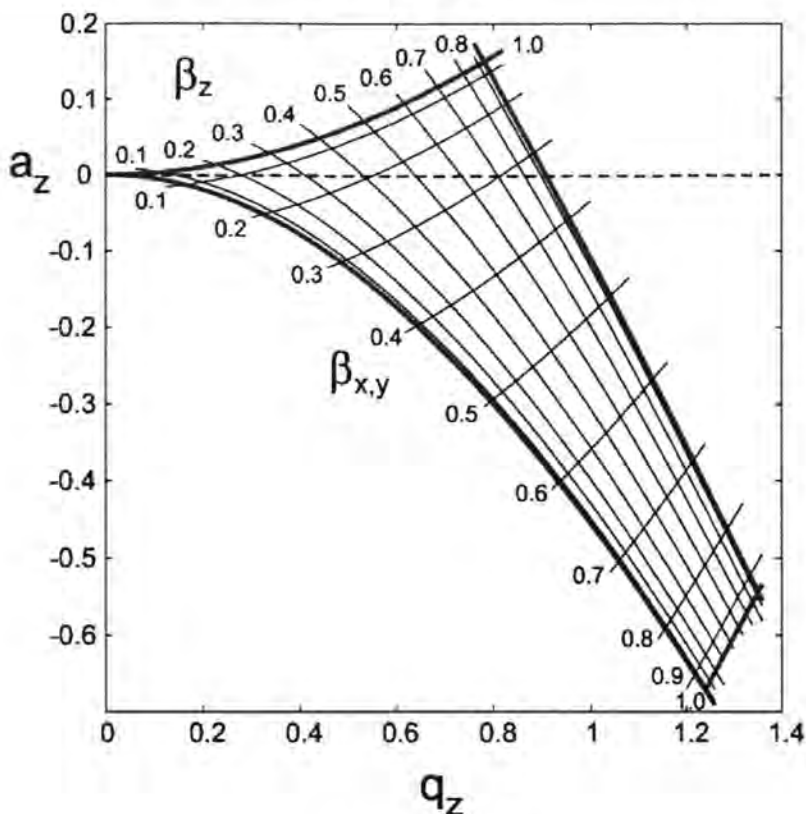
$$a'_x = a'_y = -a'_z/2, \quad (2.11)$$

$$q_x = q_y = -q_z/2. \quad (2.12)$$

稳定区域如图2.4所示,

以 2D trap 中的线性阱为例, 势能结构满足

$$q_x = -q_y, q_z = 0, \quad (2.13)$$

图 2.4 柱状阱的稳定区域^[61]。

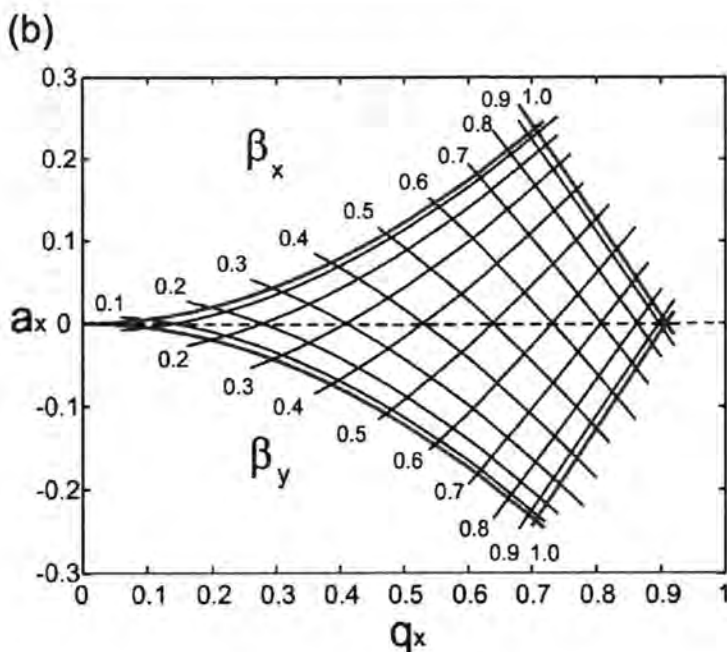
稳定区域如图2.5所示。

对于其他特殊结构的阱来说，设计原则基本相同，只是 a_i, q_i 的约束关系不同，需同时满足三个方向上的稳定条件，离子才可以被稳定囚禁。

2.1.4 赝势近似

上面从式2.2出发，通过严格的方程和低阶近似解可以得出久期运动的结果。直观上来看，交变电场的引入，形成了一种二维或三维的囚禁势，离子像一个不那么严格的谐振子一样（因为包含微运动）来回振荡，这种形式上近似于二次简谐的势能我们称之为赝势 (psudopotential)。赝势中的谐振子的振动频率远低于囚禁电场的频率，从物理图像上看，离子似乎在一个远大于交流电场周期的时间尺度上感受到简谐的囚禁势一样，而在电场周期内，离子感受到的是一种微小的扰动，这就是微运动带来的影响。这种分析思路就是赝势近似的思想。根据文献^[65]，赝势可以表示为

$$\Psi(x, y, z) = \frac{e}{2m\Omega^2} \langle |E(x, y, z, t)|^2 \rangle, \quad (2.14)$$

图 2.5 线性阱的稳定区域^[61]。

式中 $\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A dt$ 表示 A 在一个周期 $T = 2\pi/\Omega$ 内的平均。以柱形阱为例，电场为

$$E(x, y, z, t) = \frac{V_0 \cos(\Omega t)}{d^2} (2x\hat{x} + 2y\hat{y} - 4z\hat{z}). \quad (2.15)$$

由此可以得到

$$\Psi = \frac{e^2 V_0^2}{m \Omega^2 d^4} (x^2 + y^2 + 4z^2), \quad (2.16)$$

满足简谐势的表达形式，据此可以推导出谐振频率：

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{2\sqrt{2}eV_0}{m\Omega d^2}, \\ \omega_x &= \omega_y = \frac{1}{2}\omega_z. \end{aligned}$$

赝势的物理图像可以直观上帮助我们理解久期运动和微运动，适合快速求出久期运动的频率，但是并不能推导出稳定区域和微运动的表达式。

2.1.5 静电场的影响

除了人为施加的静电场和交变电场，周围环境也可能存在未知的静电场 E_0 ，它对离子的运动产生的影响由下式给出：

$$m\ddot{x} + e[U_0\alpha + V_0 \cos(\Omega t)\alpha']x = eE_0. \quad (2.17)$$

由此解出

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_x t) \left[1 - \frac{q_x}{2} \cos(\Omega t) \right] + \frac{e E_0}{m \omega_x^2} + \frac{\sqrt{2} E_0}{m \omega_x \Omega} \cos(\Omega t), \quad (2.18)$$

上式中的第二项 $\frac{e E_0}{m \omega_x^2}$ 表示由于环境电场 E_0 产生的离子位置的偏移。在实验中有时会观察到离子位置随着时间缓慢漂移, 这是因为环境电场发生缓慢变化。第三项 $\frac{\sqrt{2} E_0}{m \omega_x \Omega} \cos(\Omega t)$ 表示由于静电场导致平衡位置改变而引入的微运动项, 称之为过量微运动 (excess micromotion)。这种微运动的振幅与 x_0 无关, 因此并不能通过激光冷却减小。它会降低离子的囚禁时间, 引入二阶多普勒位移, 对离子能级跃迁进行展宽, 因此需要消除^[81]。实验上通常需要引入额外的直流电极施加电压来补偿这种微运动。

2.2 离子阱构型

前一小节介绍了根据电势求解运动方程的一般性方法。本小节将介绍常见的离子阱构型及其声子频率。

2.2.1 柱状阱

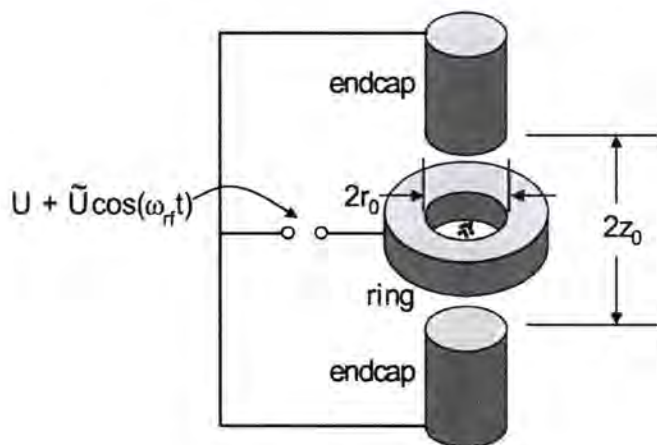


图 2.6 柱状阱示意图^[61]。

柱形阱的电势方程为

$$\phi = \frac{U + \tilde{U} \cos(\Omega t)}{d^2} (x^2 + y^2 - 2z^2), \quad (2.19)$$

其中 $d^2 = r_0^2 + 2z_0^2$, 声子频率为

$$\omega_x = \omega_y = \frac{1}{2}\omega_z, \quad (2.20)$$

$$\omega_z = \frac{2\sqrt{2}e\tilde{U}}{m\Omega(d^2)}. \quad (2.21)$$

2.2.2 Needle trap

我们实验中使用的是 Needle trap (图2.7), 也属于 3D trap 的一种。它的电极由六根钨针组成, 左右两排钨针与水平面分别成 $\pm 45^\circ$ 。中间两根针尖连接 RF 电压, 其他四根针尖连接 DC 电压, 其中 RF 针尖通过 bias-tee 接入偏置电压。RF 针尖相距 $170 \mu\text{m}$, DC 针尖之间的水平距离为 $270 \mu\text{m}$ 。同一排电极中心相距 1 mm , 直径为 0.5 mm 。Needle trap 的电势为

$$\phi = \frac{1}{2}(U_0 + V_0 \cos(\Omega t)(\alpha x^2 + (1 - \alpha)y^2 - z^2).$$

Needle trap 看起来没有柱状阱对称, 但在中心区域, Needle trap 与理想的势场形状很接近。两根 RF 电极附近的 DC 电极的非对称配置, 使得离子在 x, y 方向 (垂直于 RF 电极连线方向) 上不对称, 从而使得声子频率非简并。引入电压系数 ϵ ($0 < \epsilon < 1$) 表示这种非简并性。Needle trap 的通光性较柱状阱更好。

声子频率表示为:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{(\alpha\epsilon q)^2}{2} - \alpha\epsilon a}, \\ \omega_y &= \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{((1-\alpha)\epsilon q)^2}{2} - (1-\alpha)\epsilon a}, \\ \omega_z &= \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{(\epsilon q)^2}{2} - \epsilon a}. \end{aligned}$$

每个阱的 α, ϵ 参数因为制作和安装的过程不同存在差异, 实际参数可以通过测量阱的声子频率拟合得到。

2.2.3 线性阱

线性阱在 z 方向的束缚是由静电场 U_0 提供的。电势如下:

$$\psi_{\text{DC}}(x, y, z) = \frac{\kappa U_0}{z_0^2} [z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)] = \frac{m}{2e} \omega_z^2 [z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)],$$

κ 是 z 方向的电压系数。得到 z 轴的声子频率为

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2eU_0\kappa}{mz_0^2}}.$$

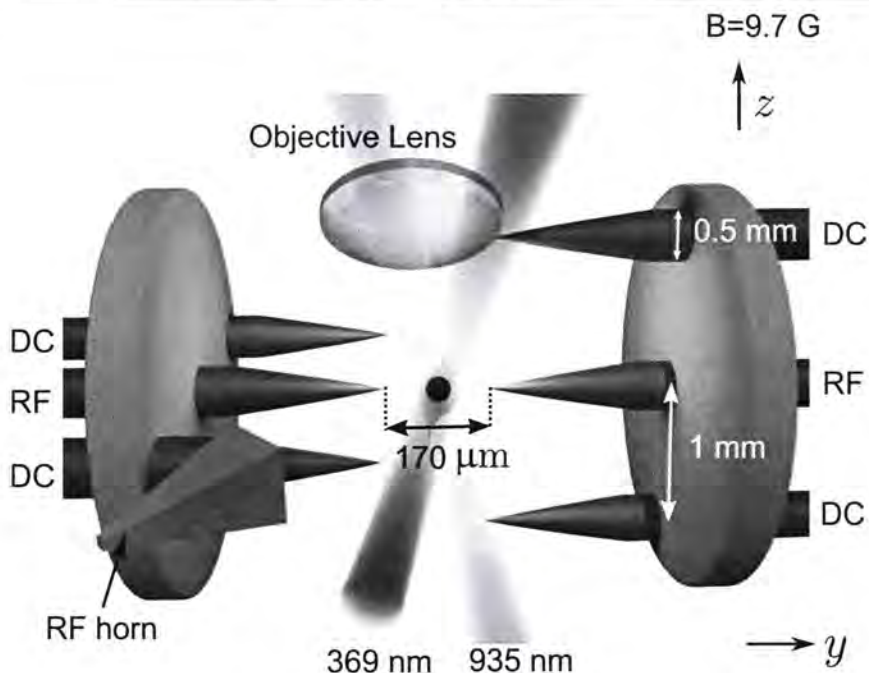


图 2.7 Needle trap 电极结构。

RF 电极上施加的电压 $V_0 \cos(\Omega t) + U_l$ 产生的横向电势为

$$\psi_{\text{RF}}(x, y) = \frac{\beta \cos(\Omega t) + U_l}{2} \left(1 + \frac{x^2 - y^2}{R^2}\right),$$

β 是横向电压系数。 xy 方向的电势需要同时考虑直流电势和交流电势。用之前的方法，解得久期频率为

$$\omega_{x,y} = \sqrt{\left(\frac{\beta e V_0}{\sqrt{2} m \Omega R^2}\right)^2 - \frac{\kappa e U_0}{m z_0^2} \pm \frac{\beta e U_l}{m R^2}}. \quad (2.22)$$

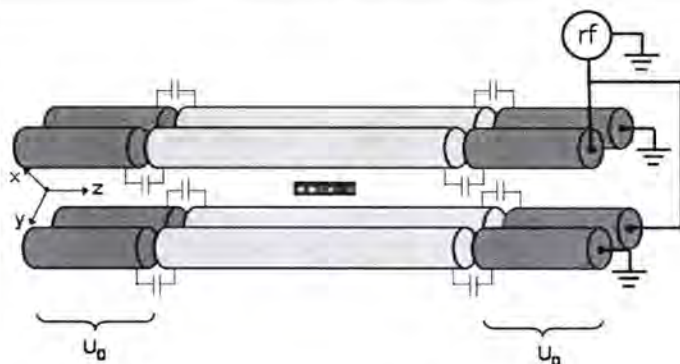
可以看出 RF 电极上施加的静电压 U_l 破坏了 xy 方向上的简并性，有利于多普勒冷却。

2.3 高真空的获得

为了提高单个离子的囚禁寿命，离子阱需要放置在一个超高真空的环境，真空度通常小于 $1\text{e-}11$ torr。根据郎之万碰撞理论，碰撞速率 γ 由以下公式给出^[83]：

$$\gamma = \frac{PQ}{k_B T} \sqrt{\frac{\mathcal{P}\pi}{2\mu\epsilon_0}}, \quad (2.23)$$

式中 P 是压强， Q 是电荷， k_B 是玻尔兹曼常数， T 是温度（室温下， $T \approx 300$ K）， $\mathcal{P}$ 是中性气体分子的极化率， $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 表示约化质量， ϵ_0 表示真空介电常数。

图 2.8 分段线性阱的电极结构^[82]。

以氢气为例，代入参数 $m \approx 10^{-27} \text{ kg}$, $P \approx 10^{-32} \text{ m}^3$, $P \approx 10^{-11} \text{ torr}$ ，计算得到碰撞速率 γ 在小时量级。如果气压上升到 10^{-10} torr 量级，碰撞速率 γ 约等于 5 分钟。单离子实验的时序持续时间在分钟到小时量级，过短的囚禁寿命会影响实验的进行。

离子阱系统实拍图如图2.9所示。电极和底座部分（图2.7）被放置在中间的腔体（chamber）中。射频 RF 的引线从左端的螺旋谐振腔（helical）引出，偏置电压的引线从右上方的接线法兰（feedthrough）引出，连接到 DC 滤波器上。整个系统的真空主要通过一个抽速为 50 L/s 的离子泵（ion pump）维持。离子泵的阴阳极之间产生的高压会使气体电离产生正离子和电子。正离子在电场作用下轰击阴极上的 Ti 层，从而溅射出大量的 Ti 沉积在阳极，形成钛膜吸附气体。而电子在磁场的作用下螺旋运动，增大了与气体碰撞的几率，形成离子和二次电子，这种现象称之为潘宁放电^[84]。除了离子泵，我们还使用钛泵（Titanium sublimation pump）来维持超高真空。钛泵在一般情况下不需要开启，除非真空度明显下降，例如因为偏置电压的改变无法囚禁离子时，为了调节合适的电压，我们会在短时间内持续加热 Yb 炉子释放原子，此时真空腔内会残余大量的 Yb 原子，造成气压上升，真空度下降。完成偏置电压的调试后，为了提高真空度，需要多次开启钛泵，帮助吸附多余的 Yb 原子。如图所示，钛泵有很长的内壁，因而有很大的表面积。当给内部的钛丝通大电流加热时，钛丝会升华出大量钛原子，与腔内的气体发生一系列物理化学反应，最后气体随着钛原子沉积在内壁上。

为了获得高真空，不锈钢法兰和部件需要预先经过 400 °C 高温烘烤^[85]，以除去不锈钢表面吸附的碳和有机物，降低放气率。所有的部件在组装前都要在丙酮中超声清洗半小时左右，以去除表面有机物，然后用洁净的铝箔纸封好。组装时需要的注意的地方有以下几点：

1. 在连接的法兰处尽量用图2.9中的支架（mount）支撑，防止部件之间受力产生相对位移。图中的螺旋谐振腔连接真空腔的法兰没有支撑，导致后期拆

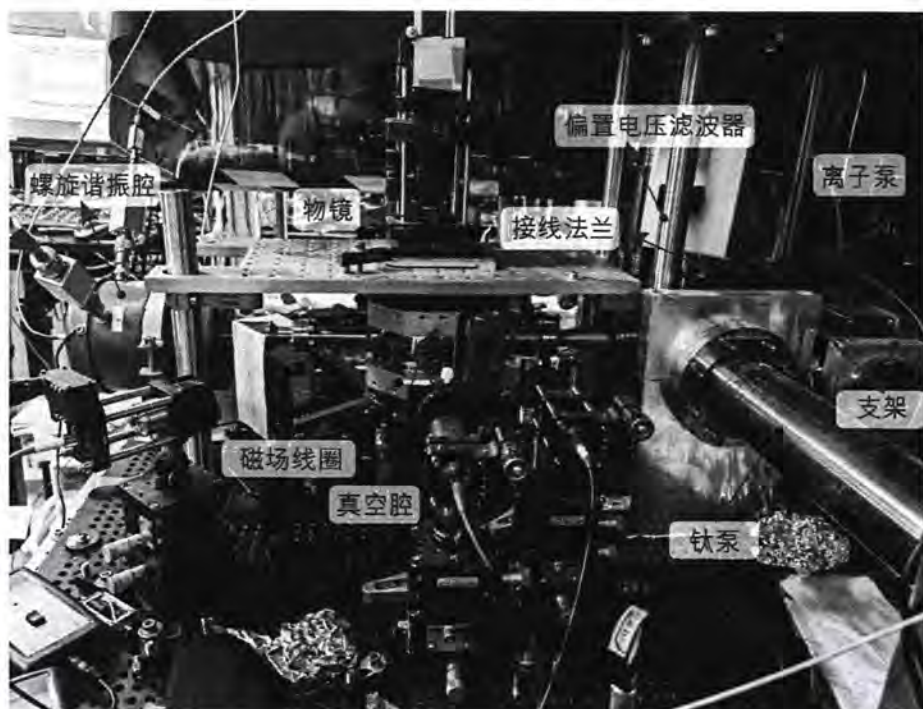


图 2.9 离子阱实拍图。

卸螺旋谐振腔时，真空腔发生位移，激光与离子阱的相对位置也发生改变，需要花费很长时间重新调好。

2. 我们用真空兼容的漆包线作为引线，引线连接接线法兰处由于结构紧密容易发生短路，可以在引线外围套上绝缘陶瓷柱子，减小耦合电容，防止短路，另外也要注意引线与不锈钢件保留足够距离，以免发生短路。
3. 组装时，要做好防尘措施，必要的措施有佩戴一次性口罩、头套、防尘服、丁腈手套，并注意及时更换，防止污染腔壁。
4. 安装针尖电极时 (图2.10(a))，每个针尖之间的相对距离非常重要，通过不锈钢安装座上的螺丝调节针尖的指向和位置，利用显微镜对准，保证组装误差控制在 $2\text{ }\mu\text{m}$ 以内。我们最后用真空水泥固定针尖位置，水泥在凝固过程中可能会产生应力，使得针尖位置变化，应当在凝固前期实时观察，防止偏离太远。

真空部件组装完成，接下来就是抽真空步骤。超高真空并不是通过一种真空泵就可以达到的，而是需要不同的泵在不同的真空度下工作，逐步逼近超高真空。具体步骤如下：

1. 在阀门处依次接上涡轮分子泵和机械泵。首先打开机械泵，待真空度降到 $1\text{e-}6\text{ torr}$ 时，可以开启涡轮分子泵；
2. 开启真空规，待真空度下降到 $1\text{e-}9\text{ torr}$ 时，开始准备烘烤。烘烤的目的是

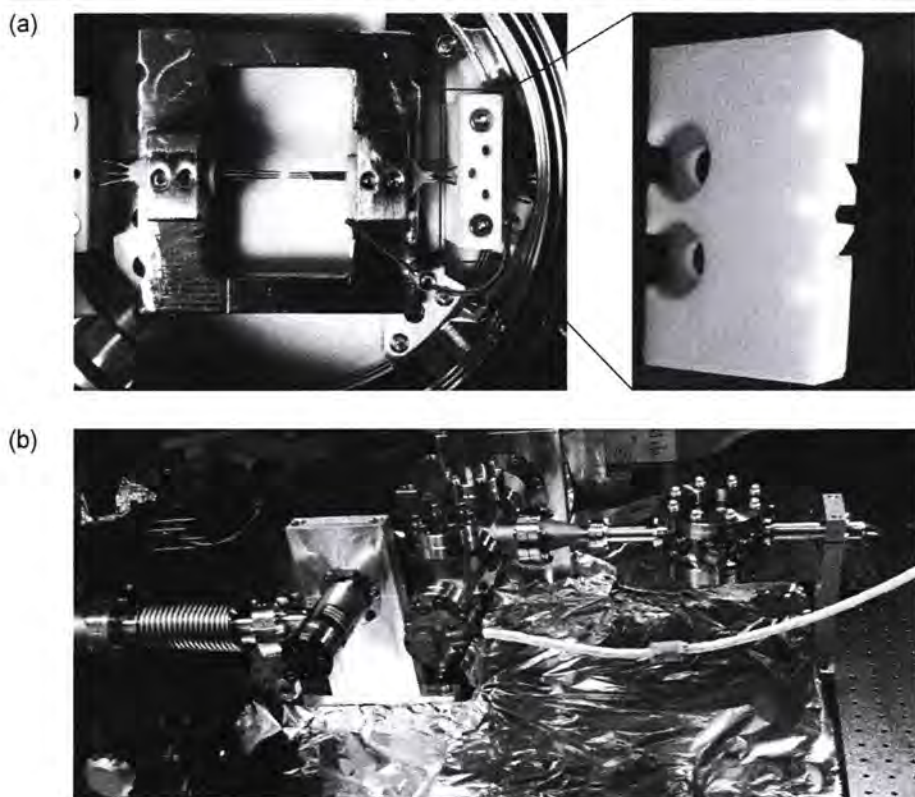


图 2.10 离子阱组装图。(a) 真空腔内的离子阱电极和安装基座，放大图是陶瓷安装板。(b) 组装好的离子阱系统，已经接上分子泵和机械泵，准备下一步抽真空。

除去真空内部件表面吸附的气体，从而降低放气率。烘烤的温度由真空内部元件能忍受的最高温度决定，考虑到石英玻璃和不锈钢热膨胀系数的差异，我们的烘烤温度在 220°C 左右。

3. 烘烤前给所有的真空部件外部均匀地缠上加热带 (图2.11)，并在加热带和不锈钢外壁接触处放上热电偶监测加热温度。由于加热带表面是石棉材料，虽然耐高温，但是接触后容易刺痛粘膜和皮肤，所以需要做好严格的防护，戴好口罩，不要让皮肤和加热带直接接触。真空腔处由于形状不规整，需要在缝隙处填充铝箔纸，使得腔室被均匀加热。此处的加热效果极为关键，会直接影响真空度。如果充分烘烤，可以观察到腔体不锈钢的颜色由银白色变为黄色，如图2.9中的钛泵的颜色。
4. 开始升温。使用加热控制器每小时升温 10°C 。升温过程尽可能缓慢，防止不锈钢和石英玻璃温度差异较大产生缝隙导致漏气。真空泵的示数前期会随着温度的升高而上升，这是因为在加热过程中，大量吸附在表面的气体和有机物挥发，被机械泵和分子泵抽走。后期，随着气体的减少，真空度开始下降。温度达到 220°C 后，维持至少 7 天的烘烤，期间真空度可达到

$1\text{e-}9$ torr 量级。

5. 等到真空泵的示数基本稳定，开始放气。放气的目的是通过开启设备产生短时间的高温去除离子泵、钛泵、炉子和真空规表面的气体。以离子泵为例，开启离子泵后，电流上升，内壁气体释放，导致前级泵示数上升，然后迅速关闭离子泵。反复多次，直到开启离子泵后，真空规和前级泵的示数基本不再上升，表示放气完成。
6. 放气完成后，关闭阀门，开启离子泵。
7. 开始降温。每小时降温 10 度，直到恢复室温。正常情况下气压应该已经到达 $1\text{e-}11$ torr，真空规已经无法准确显示真空度，可以通过离子泵读取真空度。
8. 打开钛泵。依次开启每根钛丝至规定电流，开启时间 90 s，关闭钛泵，等待几个小时，此时升华的钛原子会与残余气体反应沉积到内壁上。为了加快沉积速度，可以用湿纸巾敷在钛泵外壁帮助降温。

整个过程的真空规的气压示数如图2.12所示。



图 2.11 缠好加热带的离子阱系统。不锈钢外部首先包裹一层铝箔纸，防止石棉粘在腔体上。然后均匀地缠满加热带，注意加热带要和真空部件充分接触。包裹完毕后，外面再覆盖一层铝箔纸。为了减少热耗散，可以再蓬松地包上一层铝箔，中间的空气层起到保温的作用。

2.4 成像和荧光收集

离子的成像系统如图2.13所示。物镜 1(Obj 1) 和物镜 2(Obj 2) 都用来对离子成像。物镜 1 的数值孔径 $\text{NA}=0.40$ ，离子荧光经过物镜 1 后变成平行光，之后

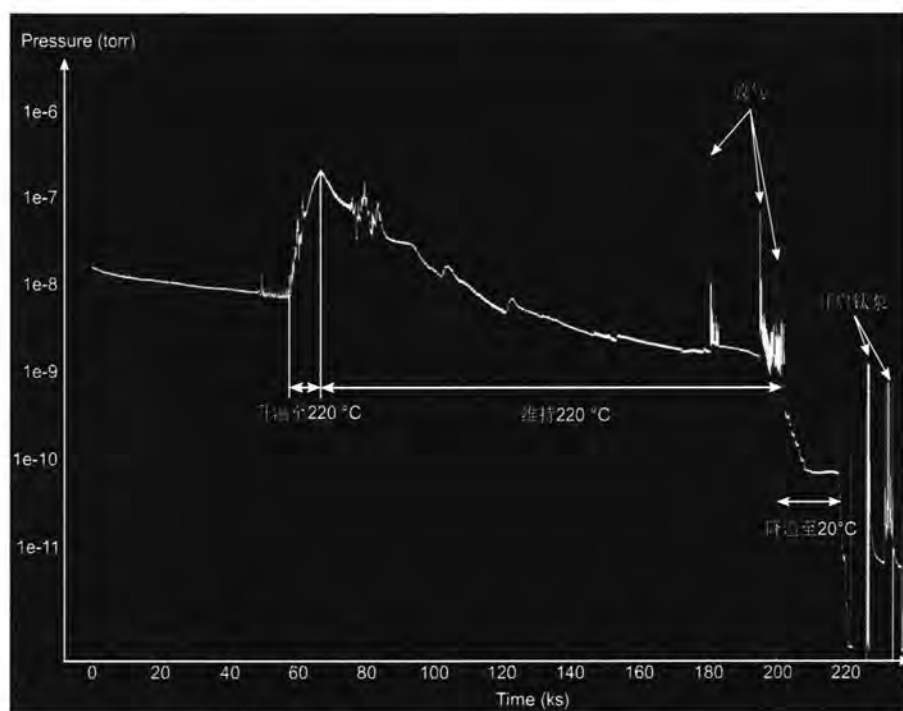


图 2.12 抽真空过程中的真空度变化曲线。

被透镜 L1 ($f=500\text{ mm}$) 聚焦。通过翻转镜 (flip mirror) 选择让荧光信号被相机 1 (Camera 1) 成像还是被光电倍增管 (PMT) 收集, PMT 量子效率为 20%。成像系统 1 的放大倍率是 30 倍。物镜 2 和相机 2 构成成像系统 2, 用来作为反打光光路, 辅助调节物镜 1 的位置。

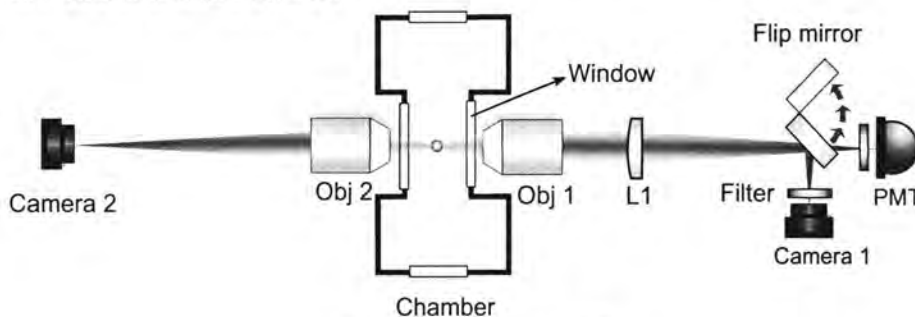


图 2.13 离子的荧光成像光路。

由于真空腔的玻璃窗口厚度为 4 mm, 直接使用现成的商业物镜会引入较大的像差, 降低成像质量, 因此需要自行设计物镜。我们利用 zemax 设计了一个 0.4NA 的物镜。该物镜的工作距离为 17.5 mm (含 4 mm 厚的窗口, 图2.14(a)), 0° 入射情况下光斑的环能量图十分接近衍射极限 (图2.15(a)), 聚焦的光斑接近艾

里斑(图2.14(b))。

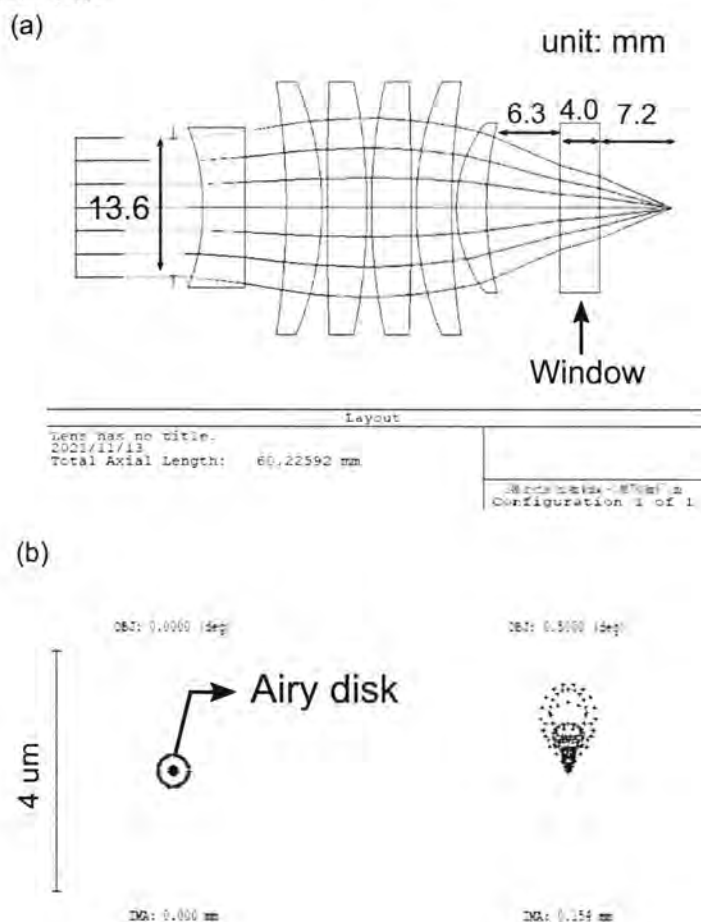


图 2.14 物镜的设计图纸和成像质量。(a) 物镜镜片结构图；(b) 点扩散函数。

我们用星点法测试物镜的成像质量。单离子可以看成是一个理想的点光源，因为其尺寸远小于物镜的分辨极限。我们用该物镜观察了离子雾团和单离子，效果如下图2.16所示。CMOS 相机上的每个像素是 $6.5 \mu\text{m}$ ，由图2.16(b) 粗略估计，光斑大小(一级衍射环之间的距离)为 6 个像素，根据放大倍率，可以计算得到物镜焦点处的像大小为 $1.3 \mu\text{m}$ ，而衍射极限光斑直径为 $d = 1.22\lambda/\text{NA} = 1.1 \mu\text{m}$ ，两者十分接近，说明我们设计的物镜成像效果良好。

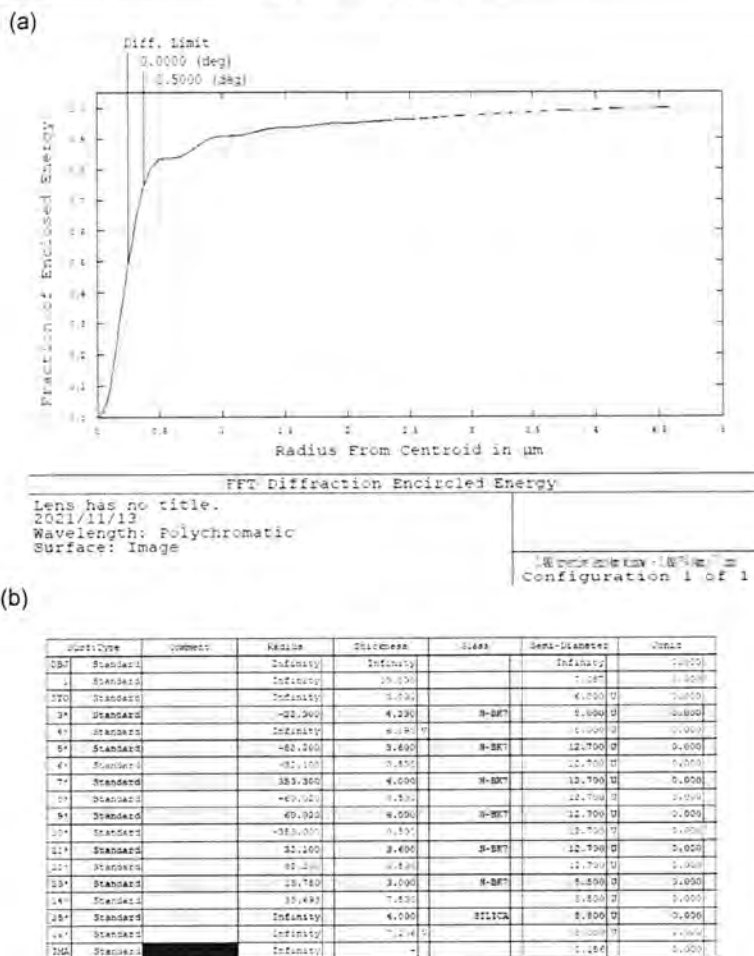


图 2.15 物镜的设计参数。(a) 物镜成像的环围能量曲线；(b) 镜片的参数。

2.5 激光系统

对 $^{171}\text{Yb}^+$ 和 $^{174}\text{Yb}^+$ 的离子操作需要用到多个波长的激光, 包括 369 nm、399 nm、935 nm 和 638 nm, 其中 369 nm 激光主要用来实现离子化、冷却、初始化和态探测。369 nm 激光的获得有以下三种方式:

- 激光二极管。Toptica 目前提供由单个 369 nm 激光二极管组成的外腔半导体激光器, 但是由于 369 nm 已经处于二极管工作波长的边缘, 虽然结构简单, 体积紧凑, 但是容易跳模, 每次关机重启后的波长都可能相差几纳米, 实验上难以维护。
- 739 nm 激光经过倍频产生^[86]。739 nm 的激光二极管经过锥形放大器后进入倍频腔, 产生 369 nm 激光。我们将 739 nm 的种子光的波长通过 PDH 锁频技术稳定在超稳腔上, 得到频率稳定的 369 nm 激光。
- 1109 nm 激光经过三倍频产生。由于光纤放大器技术的进步, 瓦级输出的

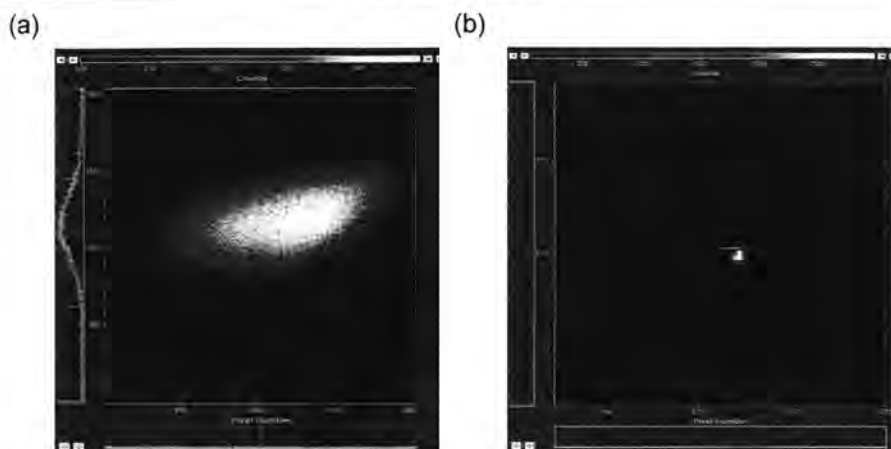


图 2.16 离子成像。(a) 离子雾团和 (b) 单离子的像。

红外激光很容易做到。我们实验用 3W 的 1109 nm 激光首先通过倍频晶体，得到 554 nm 的绿光，接着再次通过和频晶体，让 1109 nm 和 554 nm 和频产生 369 nm 的激光。实验上很容易得到超过 30 mW 的紫外光。这种方案的好处是光纤激光器模式稳定，不容易跳模；得到的紫光功率比较大；1109 nm 的激光有便宜的光纤 EOM 用来移频；倍频和和频都是单次通过，比倍频腔更易维护。

实验中的 399 nm 激光属于外腔半导体激光器 (External cavity diode laser, ECDL)。它的作用是通过双光子电离化将中性的 Yb 原子离子化^[87]。如图 2.17 所示，398.91 nm 的激光首先将中性 Yb 原子从 $^1S_0$ 态激发到 $^1P_1$ 态，再用一束波长小于 394 nm 的激光（这里用 369.5 nm 激光）将电子从 $^1P_1$ 态打到连续层。使用双光子电离的优点在于：(1) 波长容易获得。其他跃迁所需的激光，如 199 nm 激光、555.8 nm+326 nm 激光组合都没有现成的商业激光器可以使用；(2) 具有同位素选择性。不同 Yb 同位素的 $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ 的跃迁波长略有差异，通过选择不同的 399 nm 激光器波长，可以选择性离子化不同同位素的 Yb 原子。例如对 ^{171}Yb 来说，波长是 398.91126 nm，对 ^{174}Yb 来说，波长是 398.91165 nm，两者相差 735 MHz。

$^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$ 跃迁过程并不闭合。如图 2.18 所示，处于 $^2P_{1/2}$ 态的电子会有 0.7% 的概率跃迁到亚稳态 $^2D_{3/2}$ 态，寿命达到 52 ms。935 nm 激光的作用是将处于该亚稳态的电子泵浦到 $^3D[3/2]_{1/2}$ 态，从而自发辐射回到 $^2S_{1/2}$ 态。环境中的剩余气体和囚禁的离子可能会发生非弹性碰撞，以很低的概率将处于 $^2D_{3/2}$ 态的电子转移到 $^2D_{5/2}$ 态，从而以一定概率跃迁到 $^2F_{7/2}$ 态。该能级的寿命达到 6 年，因此自发辐射跃迁到基态的概率非常低。638.6 nm 激光的作用是将电子泵浦到 $^3D[5/2]_{1/2}$ 态，从而自发辐射回到 $^2D_{3/2}$ 态或 $^2D_{5/2}$ 态。

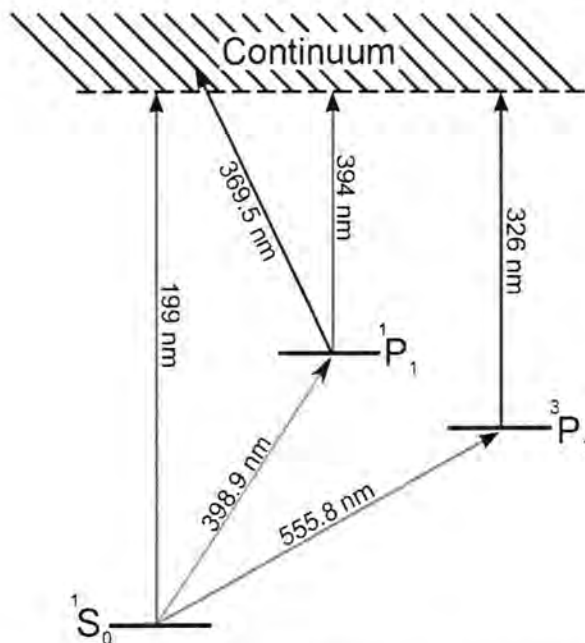


图 2.17 Yb 中性原子能级图^[75]。我们使用 398 nm+369 nm 激光组合实现光电离。

2.6 螺旋谐振腔和微波

2.6.1 螺旋谐振腔

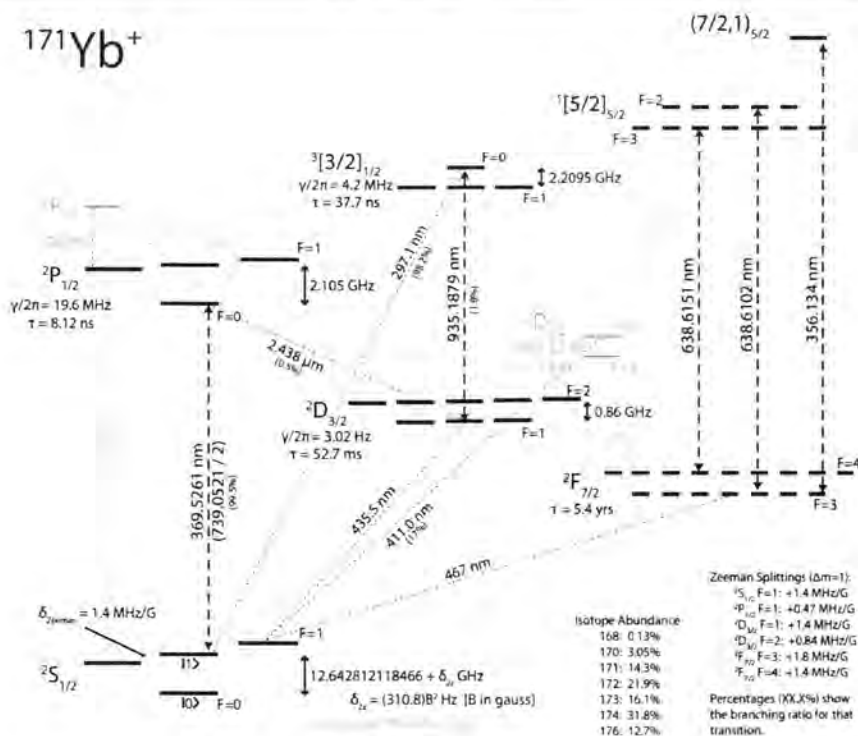
螺旋谐振腔的作用是阻抗匹配和滤波。射频源的阻抗和离子阱的阻抗不匹配会增大反射信号，使反射信号损坏前端放大器。离子阱针尖两端的射频电场要求窄带宽，从而减少其他频率带来的离子加热效应，同时要求电压幅度足够高（通常是百 V 量级），以提供足够深的囚禁势能。射频源连接较细、圈数少的天线铜导线，离子阱的射频电极连接较粗、圈数多的感应铜导线，如图 2.19 所示。线圈的直径、长度和绕线直径等参数可以通过电路模型计算^[88-90]。在感应铜导线的两根线之间焊接了一个 10 pF 的电容，保证两个射频电极的信号保持同相位，减少相位不同步引起的加热^[81]。安装时需要注意铜罐表面的氧化膜会影响导电性，需要在零件接触处刮去氧化膜。阻抗匹配通过调节天线和螺旋铜线的相对位置调节。阻抗匹配时反射信号最小。

射频电极上的电压由品质因子 Q 、射频源功率 P 和阱的几何因子 κ 决定：

$$V = \kappa \sqrt{PQ}, \quad (2.24)$$

品质因子 Q 定义为

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega}. \quad (2.25)$$

图 2.18 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子能级图^[57]。

式中 ω 是透射信号的中心频率， $\Delta\omega$ 是透射信号半高宽对应的频率范围。测量方法如图2.20所示。将射频信号接到单向耦合器的输出端口，经过离子阱反射的信号不会原路返回，而是进入 coupled 端口，功率计用于检测该路反射功率(图2.20(c))。用反射信号曲线计算 Q 值时， $\Delta\omega$ 对应的是最大反射功率减去 3 dB 对应的频率范围(图2.20(c))。我们测得的 Helical 的品质因子 Q 约等于 200。

2.6.2 微波

为了操纵 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的钟态能级跃迁 (12.64 GHz)，我们用 200 MHz 的信号与 12.42 GHz 的正弦信号混频^[91-93]，前者由任意波形发生器产生，波形可以通过计算机编程控制，后者由微波源产生。混频后的信号经过高通滤波去除低频部分，之后由微波放大器放大后，通过喇叭传入阱中，如图2.21所示。

2.7 Yb^+ 态操作

镱的元素符号为 Yb, 属于镧系元素，原子序数 70。Yb 元素在天然界有 7 种同位素(表2.1)，其中 ^{174}Yb 丰度最高，达到 32%。只有 $^{171}\text{Yb}^+$, $^{173}\text{Yb}^+$ 有核自旋，其中 $^{171}\text{Yb}^+$ 有稳定的钟态能级，适合作为量子比特。在我们的实验中，主要用

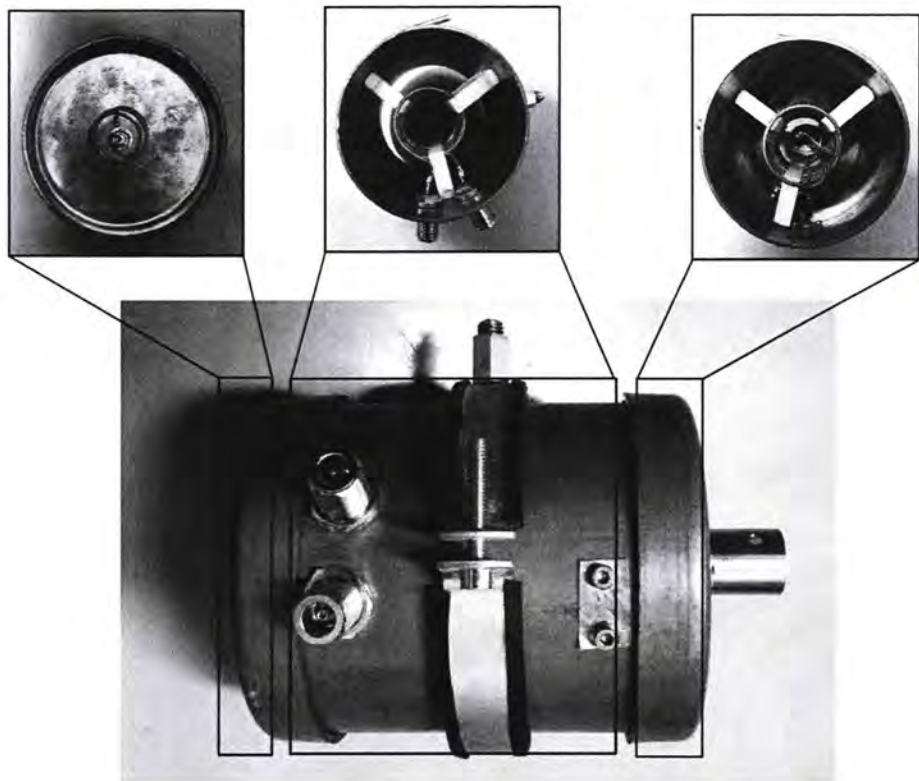


图 2.19 螺旋谐振腔实物图。左端的天线线圈连接微波源，右端的感应线圈连接离子阱，末端两根导线之间连接了 10 pF 的电容。

$^{171}\text{Yb}^+$ 进行量子信息的研究， $^{174}\text{Yb}^+$ 用来辅助调节偏置电压和光的位置等参数。

表 2.1 镱的同位素、丰度和自旋。

同位素原子质量	丰度	离子核自旋
168	0.13%	0
170	3.04%	0
171	14.28%	1/2
172	21.83%	0
173	16.13%	5/2
174	31.83%	0
176	12.76%	0

2.7.1 离子化

我们采用双光子电离的方式离子化 Yb 原子^[86,94]。Yb 金属被装载在一根不锈钢管中，通电流（约 5A）加热后管中会喷出原子束。用 399 nm 的激光照射原

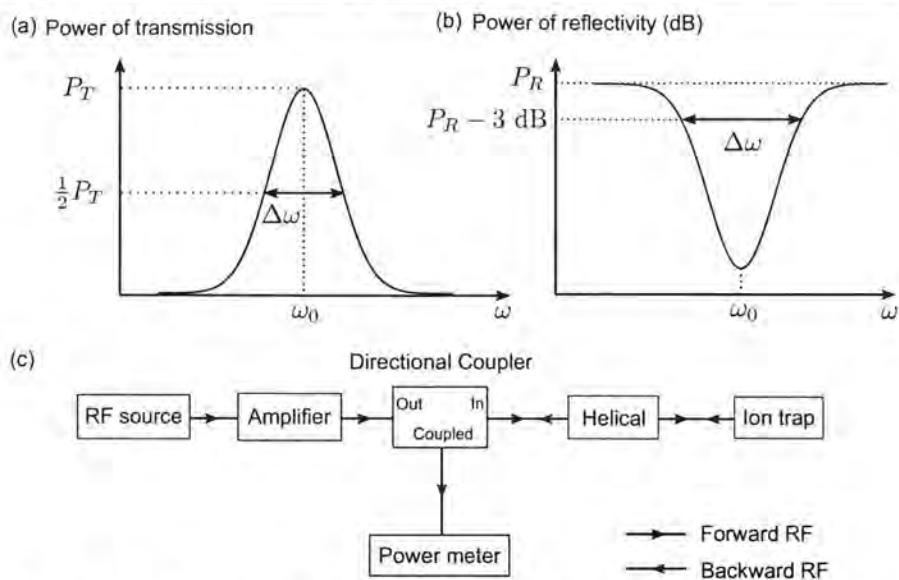


图 2.20 螺旋谐振腔 Q 值测量原理图。(a) 谐振腔的透射信号；(b) 谐振腔的反射信号。

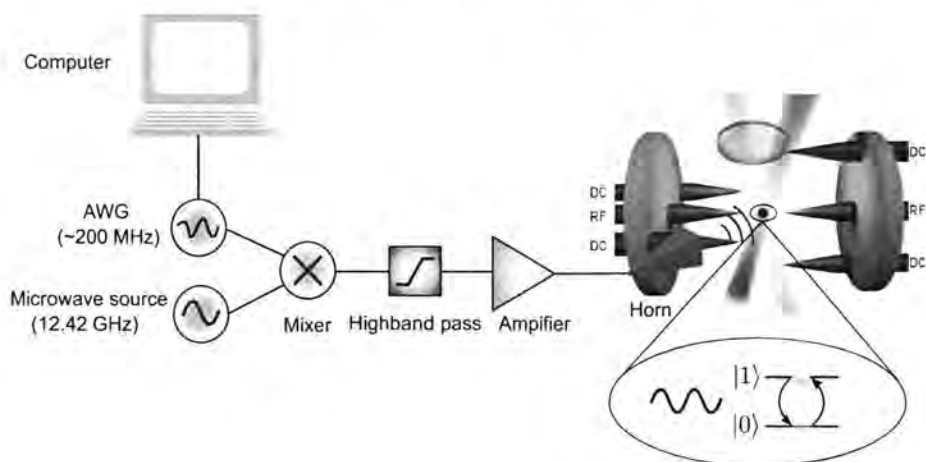


图 2.21 微波操纵离子钟态跃迁。

子束，原子会从 $^1S_0$ 态跃迁到 $^1P_1$ 态，观察到原子荧光。需要注意的是，安装原子炉时需要注意炉子的指向要朝向离子阱中心以保证喷射出的原子束落在离子阱的囚禁区域，提高离子化效率。用机械泵抽完真空后，烘烤之前，需要观察原子荧光判断炉子的位置是否安装正确，当激发光位置调至阱中心时，如果能观察到原子束荧光经过中心，则炉子的方向基本没问题，否则需要打开真空腔调整炉子方向，如图2.22所示。

369 nm 和 399 nm 合束后耦合到单模光纤中，再经过物镜聚焦到射频电极的中心。399 nm 激光的功率是 500 μW ，369nm 激光功率是 200 μW ，两束光的束腰半径均为 30 μm 左右。由于色差的存在，两束光的焦距略有不同。我们让 369nm

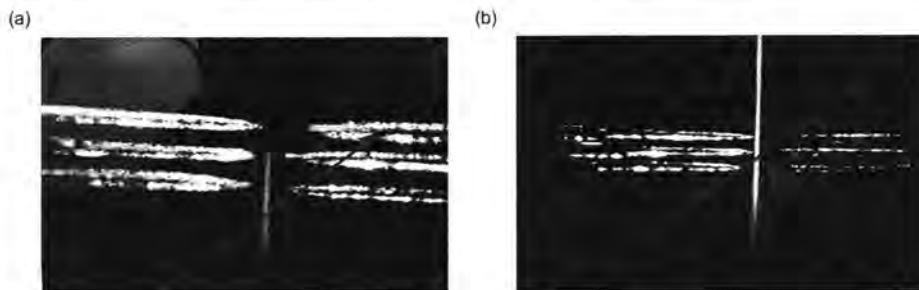


图 2.22 原子荧光。(a) 从炉子喷出的原子束流未经过离子阱中心。(b) 校准炉子位置后, 原子束流经过离子阱中心。

激光的束腰落在中心区域, 以尽量减少针尖的散射光进入成像系统, 此时 399 nm 必然有些离焦, 但针尖的散射光会被 369 nm 滤波片隔绝, 并不会影响成像。

2.7.2 激光冷却

激光冷却的本质是激发离子的能级跃迁, 当离子受激吸收的光子能量小于自发辐射的光子能量时, 离子的动能减小。我们首先通过多普勒冷^[95]却将声子数下降到 10 个左右, 之后通过边带冷却或 EIT 冷却将声子冷却到基态 (~ 0.01)。

多普勒冷却 (Doppler cooling) 于 1975 年由 Wineland 和 Dehmelt 提出。1978 年, 上面两个研究组先后在实验上实现了 Doppler 冷却^[96]。离子的散射速率由下式给出:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{s\Gamma/2}{1 + s + \frac{4(\Delta + k \cdot v)^2}{\Gamma^2}}, \quad (2.26)$$

式中 $s = I/I_{\text{sat}}$ 是光强饱和因子, Γ 是自发辐射速率, $\Delta = \omega_0 - \omega$ 是离子能级与激光的失谐。离子受到势作用, 可以看做是一个三维运动谐振子。红失谐情况下 ($\Delta > 0$), 当离子和激光的波矢 k 相向运动时, $k \cdot v < 0$, 散射速率增加, 同向运动时, $k \cdot v > 0$, 散射速率减小。每次吸收一个光子, 离子就会沿着运动方向减少 $\hbar k$ 的动量, 而散射出的光子动量方向是随机的, 多次平均后沿着运动方向动量增加为 0, 所以总体而言离子的动能减小。当激光失谐 $\Delta = \Gamma/2 = 2\pi \times 9.8 \text{ MHz}$ 时, 离子冷却后的能量最低 $E = \hbar\Gamma/2$ 。

如图 2.23(a) 所示, 多普勒冷却需要两束激光。其中第一束激光红失谐 10 MHz, 激发离子在 $^2S_{1/2}|F=1\rangle \leftrightarrow ^2P_{1/2}|F=0\rangle$ 之间跃迁。 $^2P_{1/2}|F=0\rangle$ 能级的寿命是 8.6 ns, 当离子吸收一个光子跃迁至激发态能级后, 会以均匀的概率向各个方向自发辐射。多普勒激光作用时间为 1 ms, 功率为 20 μW , 束腰半径 10 μm 。第二束激光与第一束激光频率相差 14.7 GHz, 驱动离子在 $^2S_{1/2}|F=0\rangle \leftrightarrow ^2P_{1/2}|F=1\rangle$ 之间跃迁, 防止处于 $^2S_{1/2}|F=0\rangle$ 的离子不能进入多普勒循环。14.7 GHz 的边带由

qubig 的 EOM 提供。处于 $^2P_{1/2}|F=0\rangle$ 态的电子会有 0.5% 的概率跃迁到 $^2D_{3/2}$ 态, 所以需要 935 nm 激光将电子激发到 $^3D[3/2]_{1/2}$ 态, 然后自发辐射回到 $^2P_{1/2}|F=1\rangle$ 态形成冷却闭环。

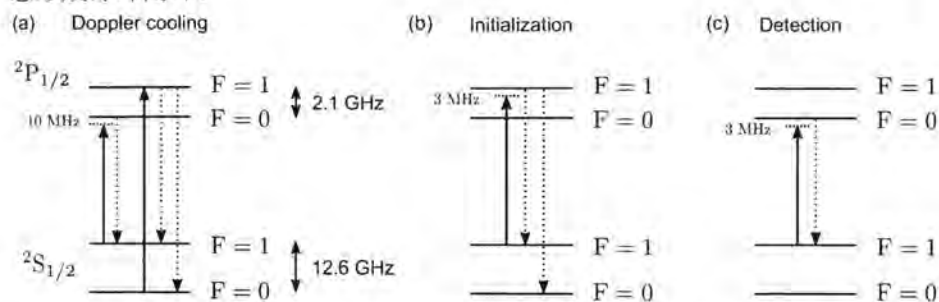


图 2.23 离子操作的相关能级。(a) 多普勒冷却。(b) 态初始化。(c) 态探测。

2.7.3 初始化

我们通过光泵浦的方式将离子初始化到 $^2S_{1/2}|F=0\rangle$, 泵浦光功率约为 20 μW , 束腰半径 10 μm 。处于 $^2S_{1/2}|F=1\rangle$ 态的电子会被泵浦到 $^2P_{1/2}|F=1\rangle$ 态, 然后自发辐射会 $^2S_{1/2}$ 的两个基态。通过这样的耗散过程可以在 20 μs 内将离子输运到基态 $^2S_{1/2}|F=0\rangle$ 。泵浦光与多普勒冷却的第一束激光蓝失谐 2.1 GHz, 通过对应频率的空间 EOM 产生 2.1 GHz 的边带。与相应的能级红失谐 3 MHz (图 2.23(b)), 保证在泵浦的过程中减少对离子的加热。

2.7.4 态探测

高保真度的态探测技术对于量子计算和量子信息处理非常重要^[97-100]。我们用态依赖的荧光技术探测离子态, 如图 2.23 所示。369.5 nm 的探测光的频率与 $^2S_{1/2}|F=1\rangle \longleftrightarrow ^2P_{1/2}|F=0\rangle$ 近共振, 当离子被制备在 $^2S_{1/2}|F=1\rangle$ 态 (亮态) 时, 探测光将其激发到 $^2P_{1/2}|F=0\rangle$ 态散射光子, 根据跃迁选择定则, $^2S_{1/2}|F=0\rangle \longleftrightarrow ^2P_{1/2}|F=0\rangle$ 的两个态的角动量子数均为 0, 属于禁戒跃迁, 所以离子只会辐射到 $^2S_{1/2}|F=1\rangle$ 态, 形成循环。当离子处于 $^2S_{1/2}|F=0\rangle$ 态 (暗态) 时, 由于跃迁能级与探测光有 12.6 GHz 的失谐, 离子几乎不会散射荧光。我们根据探测时间内 PMT 收集到的光子数判断态属于亮态还是暗态。当光子数超过一个设定的阈值 (比如 1.5) 时, 认为离子处于亮态, 否则处于暗态。在我们的实验中探测时间为 500 μs 。我们分别测量了 100 次亮态和暗态的光子数分布, 结果如图 2.24 所示。

态探测的误差来自以下几个方面。首先是收集效率。当离子被制备在亮态时, 收集效率越高, 探测时间内收集到的光子数越多, 图 2.24 中的橘色直方图会往右移动, 与暗态直方图重叠的面积越小, 亮态被探测成暗态的概率越小。根据

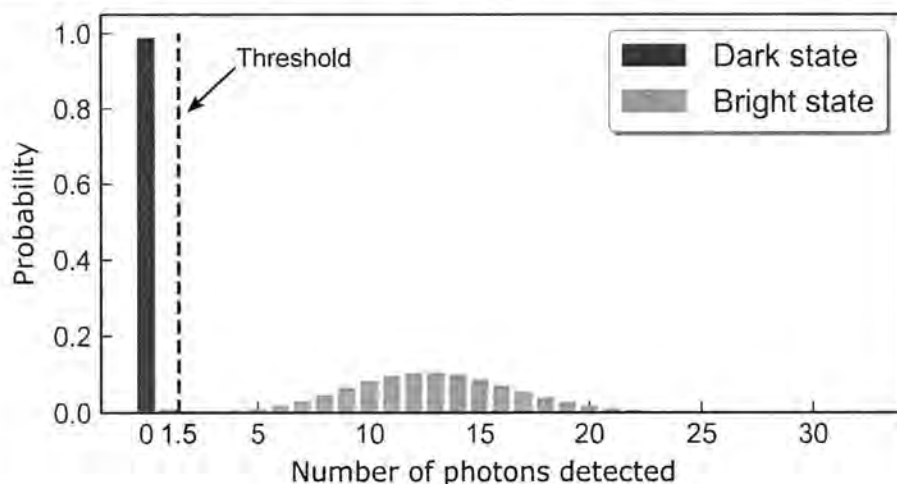


图 2.24 100 次态探测收集到的光子数分布。

理论计算, 当收集效率为 0.001 时, 理论的探测效率为 98.55%, 如果将收集效率提高至 0.1, 探测效率将达到 99.985%。提高收集效率的方法包括使用大数值孔径的物镜、抛物面镜或非涅尔透镜等。其次, 亮态与 $^2P_{1/2}|F=1\rangle$ 的耦合也会降低探测效率。由于该跃迁能级与探测光频率失谐 2.1 GHz, 处于亮态的离子有一定概率被激发到 $^2P_{1/2}|F=1\rangle$ 态, 然后以 1/3 的概率辐射到暗态, 不再散射光子, 导致被误认为是暗态。这与我们的实验观察一致。当探测光功率由弱变强时, 探测光子数逐渐增加, 探测效率趋向于 1, 但是当探测光超过一定功率时, 光子数分布不再泊松分布, 而是会有较大的概率与暗态分布重合, 此时亮态的离子通过耦合通道泄露到暗态, 导致探测效率下降。我们经过优化的探测光功率在 1 μ W 左右, 束腰半径 20 μ m。第三个误差来源是 PMT 的暗计数, 包括环境光噪声和 PMT 本身的电子噪声。暗态分布图中的收集到的光子数超过 0 的部分就是由噪音引起的。我们需要优化探测时间, 尽管延长探测时间可以增加收集到的光子数, 但是也会增加噪音。最后一个因素是 $^2P_{1/2}|F=0\rangle$ 向 $^2D_{3/2}$ 的耗散。由于此通道的跃迁概率很小 (0.5%), 根据模型估算, 对探测概率的影响小于 0.01%, 因此可以忽略。除了阈值探测法, 一些研究者利用机器学习的方法以光子数分布作为训练数据得到模型, 结果表明探测误差可以减少 30%^[101-102]。

激光操作的光路图如图 2.25 所示。通过 PDH 稳频技术将 739.5 nm 激光的波长锁定在超稳腔上, 经过倍频腔后产生 369.5 nm 的激光。其中一路通过 14.7 GHz 的空间 EOM, 产生载波和一阶边带用于多普勒冷却, AOM 起到光开关和移频的作用。耦合到单模保偏光纤之前需要用半波片和四分之一波片对轴保偏, 防止偏振的漂移影响离子荧光计数。入射到离子阱的冷却光与 y 轴 (沿着射频电极方向) 成 45° 夹角, 这样 k 波矢在三个振动模式上都有分量, 提高冷却效率。离子阱前

的半波片用来调节入射光偏振。磁场方向垂直于纸面，要想同时激发 $\sigma = 0, \pm 1$ 的跃迁，需要入射光的偏振方向与磁场成 45° 度。

另一路 369 nm 激光经过 2.1 GHz 的 EOM 和 AOM。当 EOM 打开时，2.1 GHz 的一阶边带作为泵浦光起到初始化的作用，关闭 EOM 则是探测光。冷却光、初始化光和探测光耦合到同一根光纤引导到离子阱。

935 nm 激光通过波长计稳定频率。载波和 EOM 产生的 3.07 GHz 边带驱动 $^2D_{3/2}|F=2\rangle \leftrightarrow ^3D[3/2]_{1/2}|F=1\rangle$ 和 $^2D_{3/2}|F=1\rangle \leftrightarrow ^3D[3/2]_{1/2}|F=0\rangle$ 的跃迁。638 nm 激光在 638.609 nm 和 638.617 nm 之间扫描。

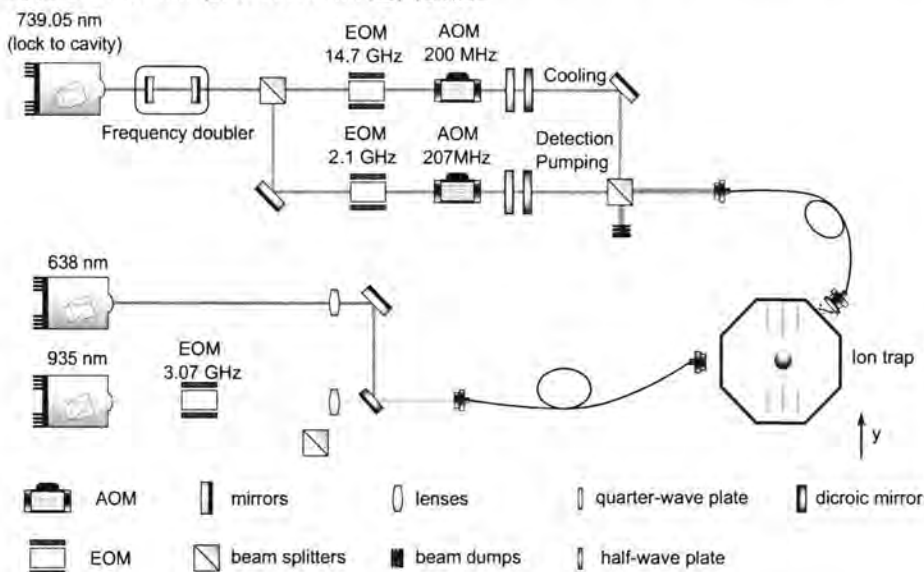


图 2.25 铯离子激光操作光路图。

第3章 全息光束整形

光束整形技术在原子分子光学 (Atomic, Molecular and Optical physics, AMO) 实验中有广泛的应用。例如用蓝失谐空心光可以形成光阱将原子囚禁在光强最小处^[103-107]，利用近共振的空心光能对量子发光体 (quantum emitter) 进行超分辨率成像和操纵等^[35,39,36,46,108]。实现光束整形的方法有很多，包括利用衍射光学元件 (DOE)^[109-113]，透镜组^[114-116]，自由曲面光学元件^[117-119]，全息光学元件^[120]，空间光调制器^[121-122]等。本章介绍了基于数字微镜设备 (Digital micromirror device, DMD) 的全息光束整形的原理，演示了波前感知与像差纠正，并实现了高阶拉盖尔-高斯模式 (Laguerre-Gaussian, LG) 和厄米-高斯 (Hermite-Gaussian, HG) 模式光场的调控。

3.1 光束整形在 AMO 实验中的应用

在 AMO 实验中，远场光学的操纵和探测技术已经成为一种很重要的工具^[108,123-127]。随着原子数目的增加和量子态复杂度的提高，基模高斯光束已经无法满足实验上的需要。因此人们开始研究具有复杂空间模式的光场，以完成原子的束缚、输运、态操作等过程^[128-129]，而光束整形技术的目的是将高斯光场以较高的能量效率转化成其他空间模式的光场。

量子气体显微镜 (quantum gas microscopy) 技术^[130-134]利用高数值孔径的物镜 (NA=0.9) 实现了光晶格体系中单个晶格原子的探测，可以用来进行强关联体系的量子模拟。这个技术可以用来实现单个或多个原子的态操作。例如将调制后的光场经过高数值孔径的物镜聚焦后作用在原子上，以产生一维或二维的光势阱，对特定位置的晶格原子进行初始化，以研究多体系统的动力学特性。Zupancic 等人用光束整形技术制备一个横向满足厄米高斯 (Hermite-Gaussian) 分布^[135]，纵向满足平顶光分布的长条形光场 (如图3.1(a)所示)，实现了莫特绝缘体 (Mott insulator) 相的光晶格的一维寻址。实验过程如下：他们首先制备了 Mott 绝缘体相，每个晶格中最多只包含 1 个 ^{87}Rb 原子，接着利用空间光调制器整形出长条形的光斑模式形成一维排斥势，作用在红色方框处的原子 (如图3.1(b)所示)。关闭形成光晶格的势场后，红框内的原子会被保留，囚禁在光强极小处，而其它地方的原子则会被释放。通过增加 Hermite-Gaussian 光束的阶数，可以实现多列原子的囚禁。

在原子光镊系统中同样需要用到光束整形技术。光镊^[137-139]具有良好的可扩展性^[126]，被认为是实现量子计算的备选硬件方案之一。利用全息光束整形技

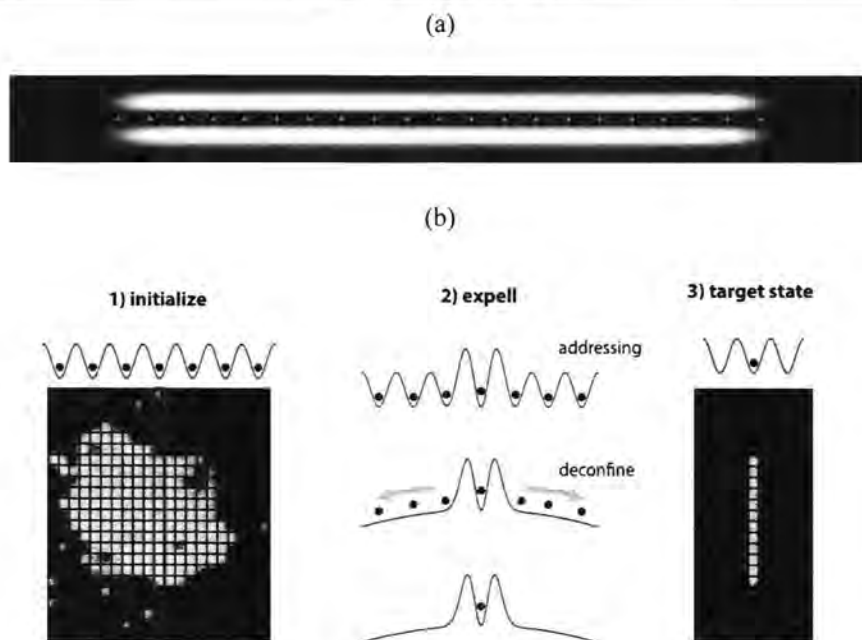


图 3.1 光晶格中的原子寻址。(a) 经过 DMD 整形后的光束，一个方向上符合平顶光分布，另一个方向满足厄米高斯分布^[136]。(b) 调制后的光场对 Mott 绝缘体相的光晶格实现一维寻址操作^[135]。

术已经可以实现几十个二维甚至是三维的原子囚禁，如图3.2所示。

在离子阱系统中基于一维离子链的态操作需要对单个离子进行寻址。传统的寻址方法借助 DOE 和多通道 AOM^[141-144]，产生固定间隔的一维光斑阵列。近年来全息光束整形的方法也开始被应用于离子阱体系中，这种方法的优势之一在于能生成任意间隔的一维光斑阵列 (如图3.3所示)，目前可以实现至多 50 个离子的寻址^[145]。

除了点阵光斑外，空心光在 AMO 实验中也有着重要而广泛的应用，比如用蓝失谐的空心光囚禁原子^[146]。另一个重要的应用是用于量子系统的超分辨成像，原理借鉴了受激辐射耗尽超分辨显微成像。我们的实验方案利用基态耗尽的方法实现超分辨成像，同样需要用到空心光束。我们用一阶拉盖尔-高斯光束来代替空心光束。生成 LG 光的方法有很多，包括螺旋相位板法^[147-150]，柱透镜组合^[114-116]，基于空间光调制器的计算全息法^[121-122]。其中螺旋相位板和柱透镜组合对光路的准直性和像差要求较高。而基于空间光调制器的全息整形法可以修补系统像差，同时生成的光斑模式灵活多变。空间光调制器主要包括两类：(1) 基于硅基液晶 (Liquid Crystal On Silicon, LCOS) 芯片来调节光波前的振幅或相位的空间光调制器和 (2) 反射微镜式的数字微镜设备 (DMD)。由于紫外光 (波长小

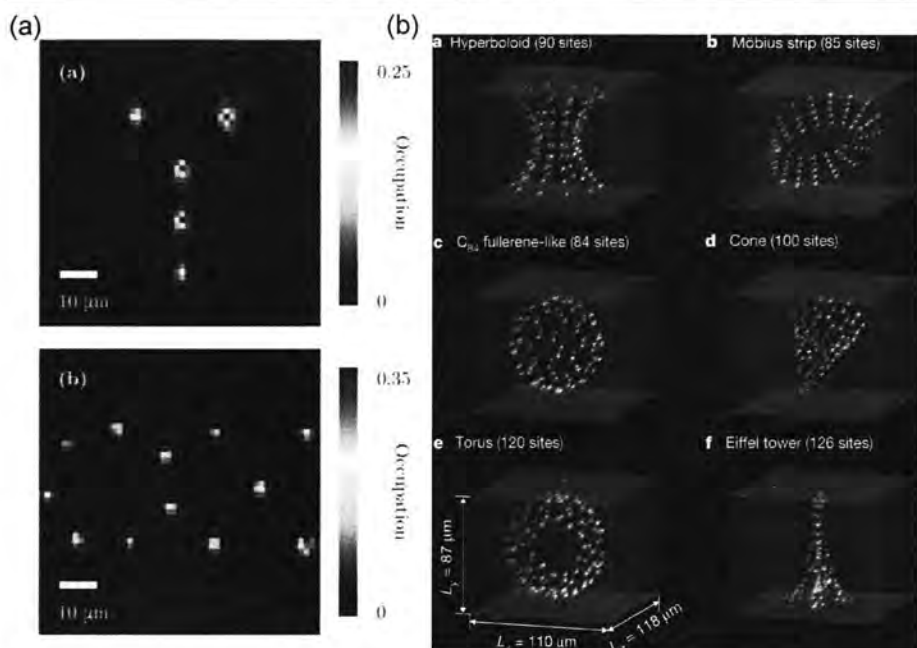


图 3.2 光镊囚禁原子。(a) 利用 DMD 全息光束整形形成的二维光镊^[124]；(b) 三维原子阵列^[140]。

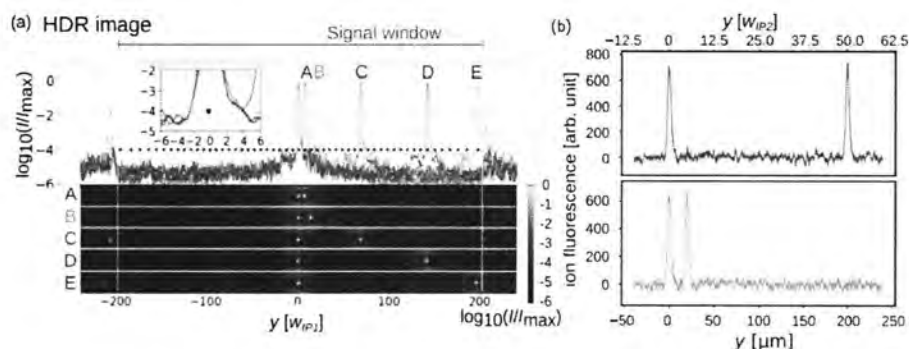


图 3.3 在离子阱中利用空间光调制器生成间距可调的光斑阵列，实现对 50 个离子的寻址^[145]。(a) 不同间距的光斑阵列；(b) 光强分布。

于 400nm) 会对 LCOS 造成损伤，因此无法应用在我们的实验中（波长为 369.5 nm）。这里我们采用基于 DMD 的全息光束整形法生成空心光。

3.2 DMD 的结构和特性

DMD 是一款可编程的振幅型空间光调制器，于 1982 年由德州仪器的科学家 L. J. Hornbeck 发明。DMD 发明之初用在微型投影仪中，通过编程加载图案来调制照明光场的振幅。后来 DMD 的应用拓展到多个领域。如利用压缩感知原

理 DMD 可用于制作单像素相机^[151-155]；利用其空间开关特性来筛选不同波段的光，DMD 被用来制作成像光谱仪^[156-158]。近些年来，DMD 被广泛应用于量子光学领域，其主要用途是作为光束整形的器件，类似于液晶型的空间光调制器。

我们实验中使用的 DMD (vialux 9500 uv) 是由 1920×1080 个微型铝制反射镜组成。每个反射镜的边长是 $10.8 \mu\text{m} \times 10.8 \mu\text{m}$ 。通过 FPGA 控制板 (如图3.4(a)所示) 输出的 1 和 0 可以控制单个像素反射镜翻转 $\pm 12^\circ$ ，对应每个微镜开 (on) 和关 (off) 两种状态，如图3.4(b) 所示。DMD 具有较高的填充率 (92%)，在紫外光波段具有比较高的反射率 (88%)。微镜具有 $50 \mu\text{s}$ 级的翻转速度，可以用于光束的快速切换。此外 DMD 的光强阈值也很高，在紫外波段 (363-420 nm) 可以经受住 2.5 W/cm^2 的光强照射。光强阈值主要取决于 DMD 芯片的散热速率。DMD 的控制代码可以参考开源项目 ALP4lib^[159]。

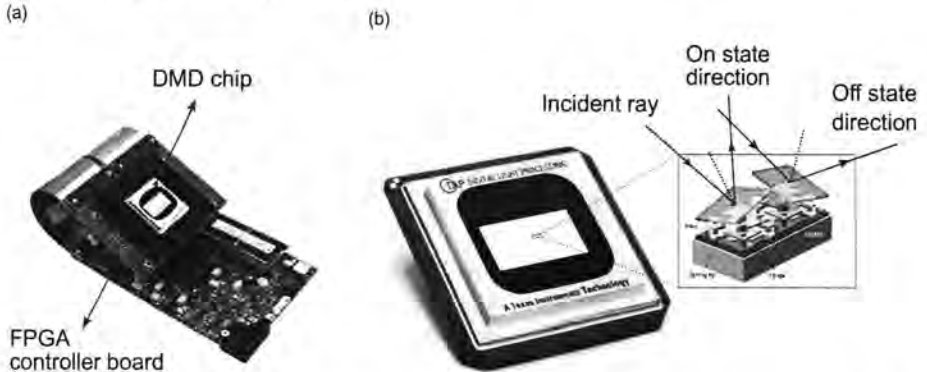


图 3.4 DMD 结构图。(a) DMD 芯片和 FPGA 控制板。图案存储在 FPGA 中，在 DMD 芯片上投影。(b) DMD 芯片和放大的两个微镜。打开和关闭的两个微镜将入射光反射到两个不同的方向。

Illumination power density ⁽⁷⁾	< 363 nm ⁽⁸⁾	2 mW/cm ²
	363 to 400 nm ⁽⁹⁾	2.5 W/cm ²
		6 W
	400 to 420 nm ⁽⁹⁾	11 W/cm ²
		26.6 W
	363 to 420 nm total ^{(9) (10)}	11 W/cm ²
		26.6 W
	> 420 nm	Thermally limited ⁽⁹⁾ W/cm ²

图 3.5 DMD 光强阈值。在紫外波段具有 2.5 W/cm^2 的光强阈值，在可见光波段阈值更高。光强阈值主要取决于芯片的温度和散热。

3.3 全息光束整形的原理

全息光束整形主要利用了 DMD 对于入射光的波前的衍射效应。通过加载的全息图案对振幅和波前进行调制，输出目标光场。以下我们将首先分析 DMD 的

表 3.1 DMD 主要参数

参数	数值
微镜边长	10.8 μm
填充率	92%
反射率 (369 nm)	88%
切换速率	17857 Hz
光强阈值 (363-420 nm)	2.5 W/cm ²

衍射特性，然后介绍全息原理，最后说明 DMD 是如何实现波前调制的。

3.3.1 DMD 的衍射特性

当一束准直的激光入射到 DMD 微镜阵列时，会被衍射成不同级次。随着入射光入射角度（波矢 $\mathbf{k}$ 与 DMD 平面法线的角度）和波长的变化，各级衍射光的方向和强度也会发生变化。实验中我们希望尽可能多的能量集中在某个衍射级次上，以实现高的光场调制效率，因此有必要建立模型分析 DMD 的衍射效应。DMD 可以看作是一个二维闪耀光栅。如下图 3.6(a) 所示，入射光波矢 $(A'O)\vec{k}^{in}$ 可以分解为 $\vec{k}_1^{in}$ 和 $\vec{k}_2^{in}$ ，分别位于 xz 和 yz 平面。 $\vec{k}^{in}$ 经过微镜反射后的出射光波矢为 $\vec{k}^{out}$ 。同理可以分解成 $\vec{k}_1^{out}$ 和 $\vec{k}_2^{out}$ 。可以看出分解后的 $\vec{k}_1^{in}$ 和 $\vec{k}_1^{out}$ 、 $\vec{k}_2^{in}$ 和 $\vec{k}_2^{out}$ 各自满足反射定律。所以入射光的反射定律可以分别分解到 xz 和 yz 平面，只需要分析一个平面上的情况即可。

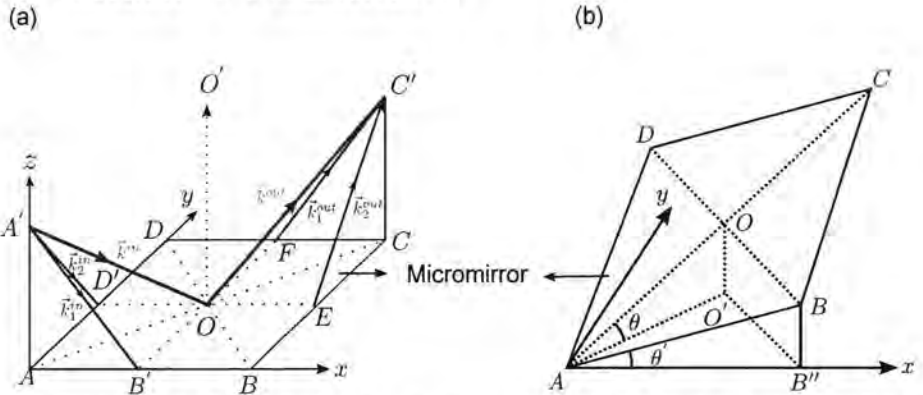


图 3.6 DMD 单个像素微镜的入射光分解。(a) 入射光和出射光波矢分解；(b) 微镜偏折 12 度分解到 xz 平面的角度。

当微镜 $ABCD$ 绕 DB 方向旋转 $\theta = 12^\circ$ 时， x 方向偏转了 θ' (3.6(b))，两者关系如下：

$$\sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta'. \tag{3.1}$$

分解到一维后，接下来讨论一维多缝光栅的夫琅禾费衍射场。

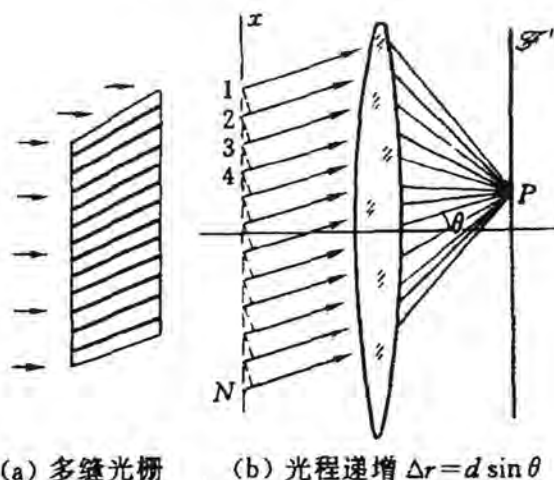


图 3.7 一维多缝光栅的夫琅禾费衍射^[160]。(a) 多缝干涉入射面；(b) 多缝光栅的衍射。

光栅透光的缝宽为 a ，周期为 b ，波长为 λ ，总的衍射单元数（狭缝数）为 N 。衍射场的强度分布可以表示为

$$I(\theta) = i_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right), \quad (3.2)$$

其中

$$\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda},$$

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda},$$

$\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ 表示单缝衍射效应带来的强度调制， $\frac{\sin N\beta}{\sin \beta}$ 表示多缝干涉效应带来的强度调制， i_0 是单缝衍射零级中心的衍射光强。DMD 微镜边长为 $10.8 \mu\text{m}$ ， $\sin \theta \approx 0.03$ ，一级衍射角大约是 1.7° ，是可以观察到衍射现象的。

考虑到 DMD 的微镜阵列结构符合闪耀光栅的衍射类型，所以方程 3.2 中的 α, β 需要做出修正，如图 3.8 所示。

对于衍射项，修正项考虑的是同一个微镜内不同位置光线的光程差，如图 3.8(a) 所示，

$$\alpha = \pi d (\sin(\theta_m + \theta') - \sin(\theta_i - \theta')) / \lambda, \quad (3.3)$$

θ_i, θ_m 分别是入射角和第 m 级衍射光的出射角。衍射的零级对应的入射角和出射

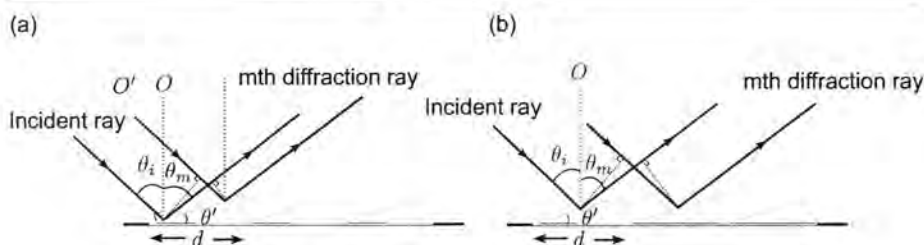


图 3.8 DMD 的衍射光栅模型。针对 (a) 衍射项和 (b) 干涉项分别做出修正。

角满足反射定律，即 $\theta_m + \theta' = \theta_i - \theta'$ 。对于干涉项，修正项考虑的是相邻周期结构在同一个相对位置产生的光程差，如图 3.8(b) 所示，

$$\beta = \pi d (\sin \theta_m - \sin \theta_i) / \lambda, \quad (3.4)$$

周期 d 是单个微镜的边长分解到 x 轴上的长度， $d = 10.8 \cdot \cos \theta' \mu\text{m}$ 。干涉零级满足的条件是 $\theta_m = \theta_i$ 。所以对于闪耀光栅来说，衍射零级和干涉零级总是分开的。

针对 DMD 器件参数，我们模拟了不同入射角下，出射光在不同角度衍射的强度分布。DMD 参数如下：x 轴闪耀角 $\theta' = 8.45^\circ$ ，x 轴周期 $d = 10.68 \mu\text{m}$ ，波长 $\lambda = 0.369 \mu\text{m}$ 。当入射角 $\theta_i = 28.432^\circ$ 时，对应第 8 级干涉，此时该级次光强最强。当入射角为 $\theta_i = 36^\circ$ 时，在反射光在 18.14° 和 20.24° 分别出现两个极大值，对应干涉第 8 级和第 7 级，但此时衍射效率降低了，因此选择合适的入射角对衍射效率至关重要。

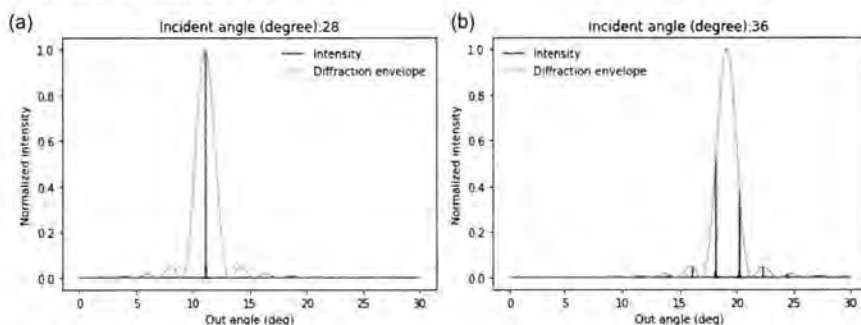


图 3.9 DMD 衍射光强与入射角度的关系。(a) 入射角等于 28 度。(b) 入射角等于 36 度。

3.3.2 DMD 波前调制的原理

我们采用全息法调制入射光场的振幅和相位。全息技术于 1948 年由伽伯提出^[161]，提出之初是为了提高电子显微镜的分辨率，后来广泛应用在显示^[162-166]、存储^[167-171]、干涉度量^[172-176]等领域。全息成像分为两步。第一步，用感光介质

记录参考光和目标光场形成的干涉条纹，即全息图；第二步，用参考光照射全息图，通过光波衍射可以重现目标光场。在我们的实验中无需记录真实的干涉图，而是预先计算好全息图投影在 DMD 上，入射的参考光经过 DMD 的图案衍射后，在特定的衍射级次上便形成了目标光场。全息法的优点是具有较大的灵活性，理论上可以生成任意光强分布的光场。缺点是衍射效率较低，因为 DMD 属于振幅性空间光调制器，不能像液晶型 SLM 一样直接调制相位，而是要通过形成光栅结构衍射出光场，因此会有很大一部分光的能量落在无用的级次上。以我们的实验为例，我们通常选用 +1 级衍射光调制光场，衍射效率在 10% 左右。

我们可以从狭缝衍射的角度理解振幅调制的 DMD 是如何同时调控光场的相位和振幅的。如图 3.10 所示，入射光场 E_{in} 经过一个狭缝衍射，第 m 级的衍射光场为 E_{out} ，狭缝的宽度为 a ，中心位置为 x_0 ，则出射光场可以表示为：

$$E_{out} = E_{in} \int_{x_0-a/2}^{x_0+a/2} \exp(i2\pi mx) dx = E_{in} \frac{\sin \pi ma}{\pi} \exp(i2\pi mx_0). \quad (3.5)$$

从上式可以看出，如果确定了衍射级次 m ，光场的相位将由狭缝的中心位置 x_0 调制，光场的振幅将由狭缝的大小 a 调制。因此，在 DMD 的全息图中，通过改变微镜开关的占空比（即狭缝的大小）和打开状态下的微镜的中心位置（即狭缝的位置），便可以实现对输入光场波前的调控。

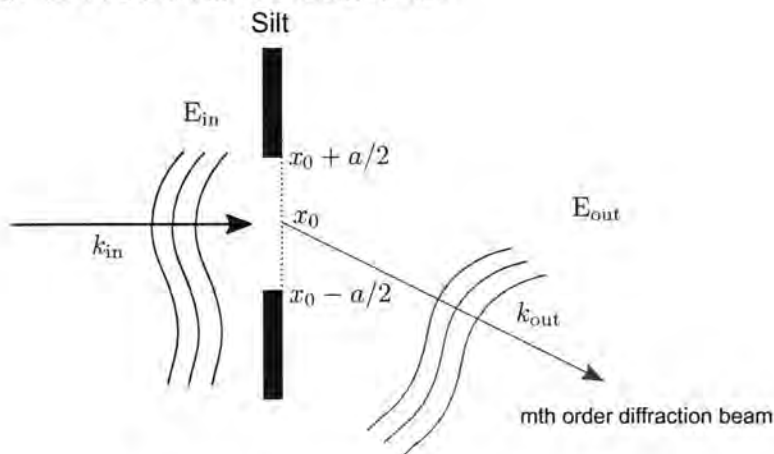


图 3.10 入射光场通过狭缝后在第 m 级次上的衍射光场。

3.3.3 生成全息图

由于 ± 1 光具有衍射效率较高，因此以下分析我们只考虑 $m = 1$ 的情况。由方程 3.5 可以得到

$$a(x, y) = \frac{1}{\pi} \arcsin \left(s \pi \frac{E_{out}(x, y)}{E_{in}(x, y)} \right), \quad (3.6)$$

其中 s 是一个归一化因子, 保证 $\sin$ 项中的值均小于 1, $s = (\min(E_{in}(x, y)/E_{out}(x, y)))^{-1}/\pi$ 。狭缝位置函数 x_0 满足

$$x_0 = \frac{1}{2\pi} (\phi_{out}(x, y) - \phi_{in}(x, y)), \quad (3.7)$$

式中 $\phi_{out}(x, y)$, $\phi_{in}(x, y)$ 分别是输出光场和输入光场的相位。

由于 DMD 每个像素只有开关两种状态, 因此需要将全息图二值化成 DMD 图案。一种比较直接的方法是 Lee 方法^[177], 我们定义开关函数 $T(x, y)$

$$T(x, y) = H[\cos(2\pi/d(\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y) - 2\pi x_0(x, y)) - \cos(\pi a(x, y))], \quad (3.8)$$

式中 $H(x)$ 是阶梯函数,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}. \quad (3.9)$$

但是用该方法生成的全息图在 0 的区域和 1 的区域的边界处会出现比较剧烈的阶跃现象, 如图 3.11(a) 所示, 容易衍射出高阶次的杂散光。为了减小杂散光, 人们提出了误差扩散算法^[127] 和随机化算法^[135]。随机化算法引入一个由 x_0 和 a 决定的概率函数 P , 随机决定是否开启该位置像素, 概率函数 P 定义如下:

$$P(x, y) = \frac{1}{2} [\tanh(C(p(x, y) + \pi a(x, y))) - \tanh(C(p(x, y) - \pi a(x, y)))], \quad (3.10)$$

其中相位 $p(x, y) = 2\pi/d(\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y) - 2\pi x_0(x, y)$ 。 $d=10$ pixel 是光栅周期, C 是随机化因子。如图 3.11(c) 所示, 当 C 越大, 黑白边界越锐利, 随机化方法越趋向 Lee 方法。我们的实验中取 $C=3$, 此时杂散光斑相对于主光斑被抑制地很好。

3.4 波前感知

3.4.1 相位修正

光学系统中总是不可避免存在像差, 使得整个成像系统的点扩散函数达不到衍射极限的水平。因此, 光束整形之前需要测量并修正光学系统的像差, 以制备高模式纯度的光斑。我们采用干涉法测量整个系统像差, 包括入射波前的波

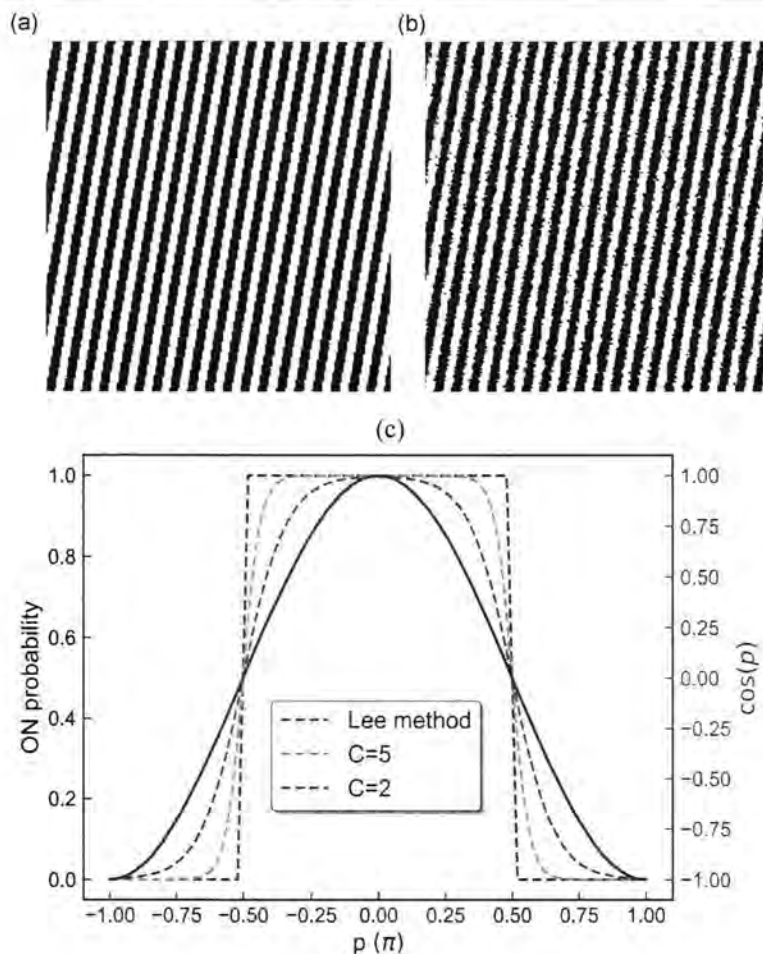


图 3.11 DMD 全息图的二值化方法。(a) Lee 方法生成的全息图。(b) 随机化方法生成的全息图。(c) 不同的 C 决定了开和关的边界的阶跃程度。

前差, 透镜和物镜的像差等。原理如图3.13(a)所示, 我们首先开启全息图中的两个区域: 区域 A 和区域 B。每个区域的面积相同 (如 20×20 像素), 其中 B 始终位于全息图的中心, 称之为参考区域 (reference patch), 而区域 A 的位置会依次改变, 用于采样 DMD 平面波前, 称之为取样区域 (sample patch)。入射光经过 A, B 衍射后形成的 +1 级光束经过透镜聚焦后最终在像面上形成干涉条纹, 探测器总是固定在中心, 测量某一点的光强。被 A, B 衍射后的两束光束的光场可以表示为

$$B_{\text{samp}}(x, z) = b \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta z - \sin \theta x + \Delta\phi)\right), \quad (3.11)$$

$$B_{\text{ref}}(x, z) = a \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right). \quad (3.12)$$

θ 是光束之间的夹角, $\Delta\phi$ 是 sample patch 相对于 reference patch 的相位, 我们假设 reference patch 的相位始终为 0。可以得到干涉条纹的光强分布

$$|B_{\text{ref}}(x, z) + B_{\text{samp}}(x, z)|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}((1 - \cos\theta)z + \sin\theta x) + \Delta\phi\right).$$

通过编辑 A 区域的全息图的相对位置的移动 (移动一个周期相当于改变 2π , 移动半个周期相当于改变 π), 可以在 sample patch 上引入额外的任意的相位, 这样像面上的干涉条纹会产生移动, 探测器测得的光强信号 I_C 也会发生变化, 如图3.12。

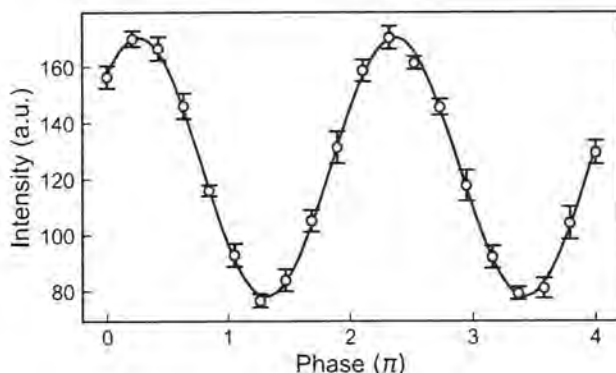


图 3.12 sample patch 和 reference patch 之间的干涉条纹上探测器测得的光强随着附加相位周期性改变。

通过拟合可以测出 $\Delta\phi$, 然后在原本的 sample patch 上添加 $-\Delta\phi$, 便可以使得 sample patch 和 reference patch 同相位。实验上为了提高相位测量的速度, 通常采用三步相移法测 $\Delta\phi$ 。我们在 sample patch 上额外叠加 $0, 2\pi/3, 4\pi/3$, 测量干涉条纹中心点 C 的光强 I_C , 其值为 m_1, m_2, m_3 (图3.13(b)),

$$m_1 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\Delta\phi), \quad (3.13)$$

$$m_2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\Delta\phi + 2\pi/3), \quad (3.14)$$

$$m_3 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\Delta\phi + 4\pi/3), \quad (3.15)$$

$\Delta\phi$ 和 ab 由以下公式计算得出:

$$\Delta\phi = \arg\left(-\frac{1}{3}(m_2 + m_3 - 2m_1) + \frac{i}{\sqrt{3}}(m_2 - m_3)\right) \quad (3.16)$$

$$ab = \left|-\frac{1}{3}(m_2 + m_3 - 2m_1) + \frac{i}{\sqrt{3}}(m_2 - m_3)\right|. \quad (3.17)$$

遍历 sample patch 的位置，分别测量每个区域的波前相对 reference patch 波前的相位和振幅，就能得到整个波前的像差 (图3.13(c))。值得注意的是，测量得到的整个波前的像差均是相对于 reference patch 的相位，与绝对相位之间差一个全局的常数 (piston 项)，但这并不会影响成像质量。

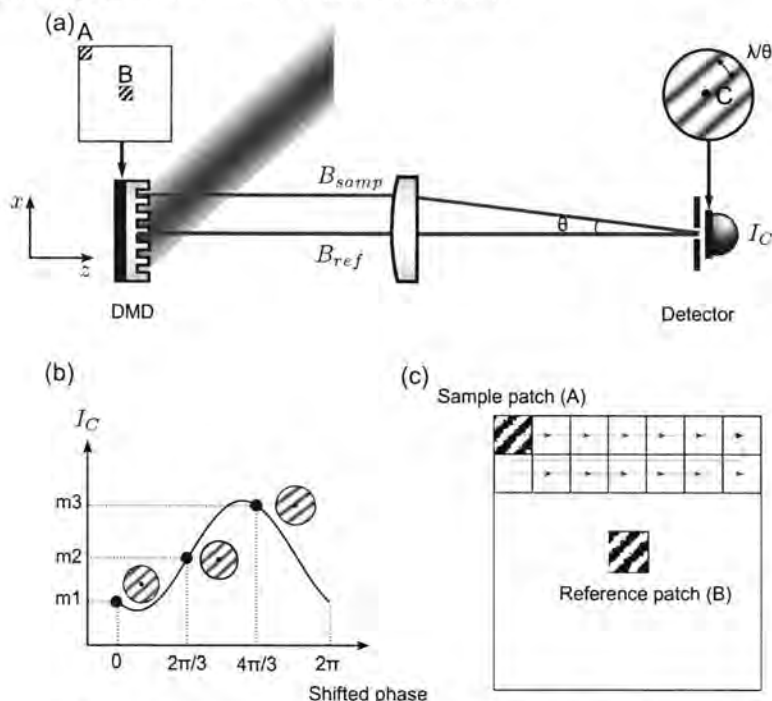


图 3.13 DMD 测量像差的原理。(a) 入射光经过区域 A 和 B 的局部全息图衍射出的一级光在透镜的后焦面上形成干涉条纹。探测器只测量中间点 C 的光强。(b) 三步相移法测量 sample patch 的相对相位。(c) 依次变换 sample patch 的位置，测量整个波前的相位和振幅分布。

实验光路如图3.14所示。光纤耦合出射的激光经过准直和放大后照射到 DMD 上，L3 和 L4 构成一个 4f 系统，中间的小孔起到了空间滤波的作用，只让 +1 级衍射光通过。光束经过 L4 后变成平行光，再被 NA=0.4 的物镜 1(Objective 1) 聚焦。物镜 1 后有一片 4 mm 厚的熔石英玻璃板，以模拟离子阱装置中的真空玻璃窗口。后面的物镜 2(Objective 2) 将光斑放大 100 倍，CMOS 相机 (Andor zyla 4.2) 用来记录放大后光斑的光强分布。

3.4.2 相位解包

我们测到的相位图如图3.15(a) 所示。由于计算出的相位位于 $[-\pi, \pi]$ ，并不是连续的相位变化，反映不出原始相位面的变化趋势，因此需要对相位进行解包。靠近 reference patch 区域的 patch 的相位绝对值较小且变化缓慢，因此可以作为

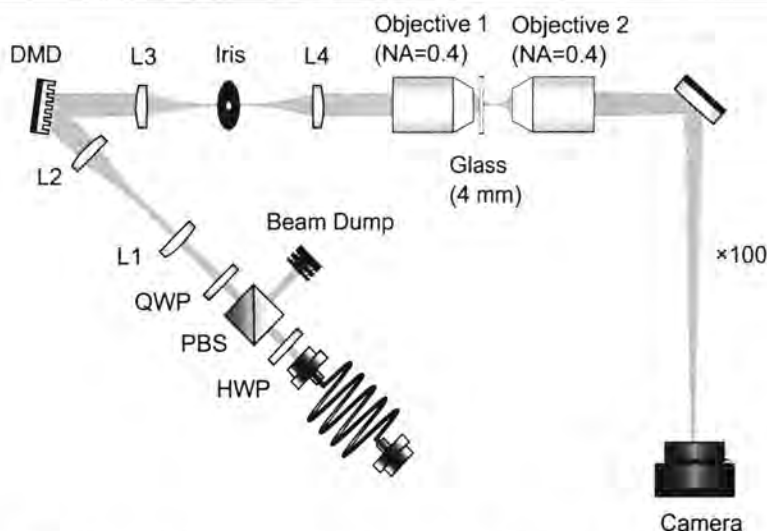


图 3.14 基于 DMD 的光束整形光路图。半波片 (HWP) 和偏振分束棱镜 (PBS) 是为了调节光纤耦合出射光的光强。四分之一波片 (QWP) 是将入射光的偏振调为圆偏光。透镜 L1($f=75\text{ mm}$) 和 L2($f=200\text{ mm}$) 将光束直径扩大 2.7 倍。被 DMD 全息图案衍射后的衍射光经过 L3 和 L4 组成的 $4f$ 系统滤波, 只让 +1 级光通过。物镜 1(Objective 1) 的数值孔径是 0.4, 入瞳为 12 mm 。物镜 2(Objective 2, $\text{NA}=0.4$) 将物镜 1 聚焦的光斑放大 100 倍, 便于后面的 CMOS 相机测量光斑的光强分布。

相位解包的起点。解包后的相位如图 3.15(b) 所示。此时每个 patch 中的相位相同, 不同 patch 之间的相位基本连续。

3.4.3 相位插值

相位解包完成后, 不同 patch 之间的相位保持连续, 但是相同 patch 之间的像素相位相同。而实际情况是相同 patch 之间像素的相位也是连续变化的。因此需要对每个像素的相位进行插值 (图 3.15(c)), 保证相位图在每个像素上都保持连续。我们从另一个角度也可以解释插值的必要性。不同区域衍射后的光束经过成像系统聚焦后在像面上的位置由于各种像差的存在不完全一致。因此需要改变不同 patch 光栅的周期使得衍射角发生区别, 让所有的光斑都能聚焦在同一点, 这相当于给每个 patch 添加一个 x 或 y 方向的线性 (tilt) 像差。相位图经过插值后, 也会在每个 patch 叠加一个 tilt 相位差。如图 3.16 所示。

3.4.4 相位和振幅补偿

振幅的测量可以根据三步相移法得到, 但是当干涉信号的可见度较低时, 振幅测量的误差较大。另一种测量方法是直接测量衍射光束在成像面上形成的光斑的光强。逐个扫描 sample patch 的位置就可以得到光强分布图。得到相位图和

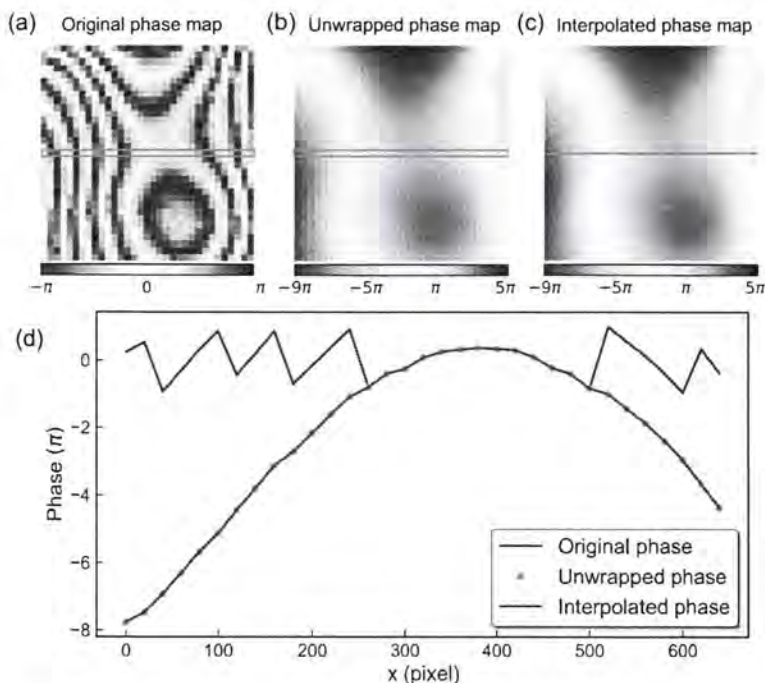


图 3.15 相位图。(a) 原始相位图。(b) 解包后的相位图。(c) 插值后的相位图。(d) 一维采样的相位图 (绿色框内)

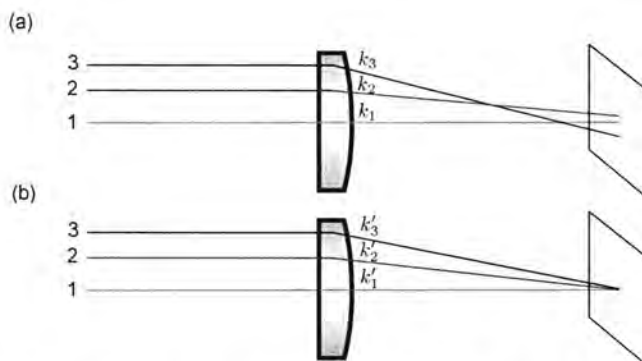


图 3.16 相位插值。(a) 插值前，不同光束不能聚焦在同一点上；(b) 插值后，不同区域内的光栅空间频率 k 略微改变，使得所有光束都聚焦在同一点上。 $k = 2\pi/d$ 。

振幅分布图后，便可以进行相位和振幅的补偿。对于相位补偿，我们只需要在原始全息图上减去测得的相位图，便能使得不同区域的出射光到聚焦点上的光程相等。振幅分布函数 $a(x, y)$ 根据方程3.6得到。补偿像差后，我们生成了高斯光斑，如图3.17所示。结果表明整形后的高斯光斑的光强分布与理论预测的很接近，相比于没有像差修正的光斑峰值光强提高了 2.5 倍。

Gaussian beam profile

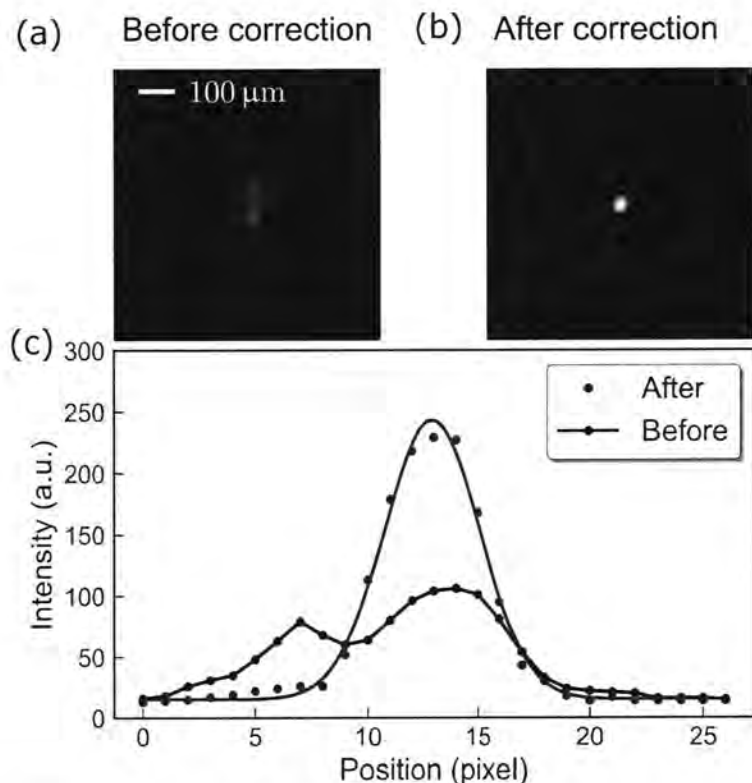


图 3.17 高斯光斑。(a) 未修像差的高斯光斑；(b) 修过像差的高斯光斑；(c) 光强分布（一维）对比。

3.4.5 算法改进

近轴情况下，所有 patch 与 reference patch 的干涉光斑具有良好的对比度，此时测出的相位误差较小。但是在非近轴情况下，边缘光线由于球差和像散的存在，像差变化比较剧烈，这就导致边缘的 patch 与参考 patch 聚焦在像面上的光斑位置相差较远，使得干涉条纹的对比度变差，甚至导致正弦调制信号被探测器的噪声淹没。如图 3.18(e) 所示，当 sample patch 距离 reference patch 100 个像素 (5×20) 时，两个光斑重合度变差了，对比度下降，最差的情况是两个光斑完全不重合，从而测不到干涉信号。

针对这种情况，我们提出了一种基于相位梯度的测相位方法。我们的目标是首先改变像面上 patch 成像点的位置，使得每个 patch 与参考 patch 的光斑位置达到很高的重合度，这样增加了干涉条纹的对比度。

入射光和出射光的角度满足光栅方程：

Interference pattern of sampling patch and reference patch (0,0)

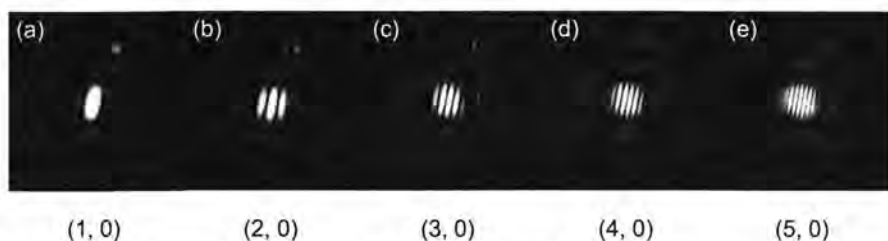


图 3.18 不同的 sample patch 与 reference patch 干涉形成的条纹。(a)-(e) 分别是 patch(1,0)-(5,0) 与 reference patch 干涉。

$$d(\sin \theta_{in} + \sin \theta_{out}) = \lambda. \quad (3.18)$$

对上式两边以 d 和 θ_{out} 求微分, 得到

$$\Delta d(\sin \theta_{in} + \sin \theta_{out}) + d \cos \theta_{out} \Delta \theta_{out} = 0, \quad (3.19)$$

$$\Delta \theta_{out} = -\frac{\Delta d}{d^2} \lambda \cos \theta_{out} = \frac{\Delta k}{2\pi} \lambda \cos \theta_{out}, \quad (3.20)$$

$$\Delta x = f \Delta \theta_{out} \propto \Delta k. \quad (3.21)$$

从上式可以看出, 1 级衍射光在焦面上的位置偏移量 Δx 正比于光栅空间频率的改变量 Δk 。所以通过改变光栅 x, y 方向的空间频率来改变光束被衍射的角度, 从而改变光束在焦面上的位置, 使得所有光斑重合。然后再用多步相移法迭代 sample patch 的位置测相差, 解包相位图, 如图3.19所示。最后总的相位图是测量的解包的相位图和空间频率改变量引起的相位梯度项之和。

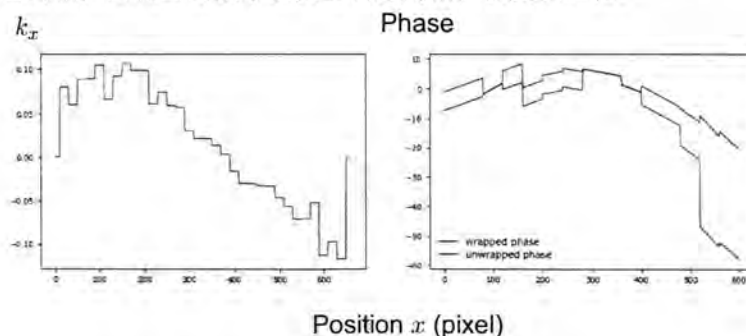


图 3.19 相位梯度法测出的一维相位分布。不同 patch 处应该补偿的空间频率 k_x (左) 和测出的相位 phase (右)。

3.4.6 像差分析

对图3.15测得的像差进行泽尼克 (Zernike) 系数分解, 得到如图3.20的结果。其中 piston 项是整体相位, 对于单个光束来说没有意义, tilt x 和 tilt y 项是光束的 x 和 y 方向上的倾斜像差, 只会影响光斑的位置, 不影响成像质量。defocus 项表明当前光路存在一定的离焦, 该项可以辅助我们精确调节透镜的前后位置。而对成像质量影响最大的是像散项 (Oblique astigmatism、Vertical astigmatism, 这两项也包含离焦因素)。像散是由于轴外发光点发出的光线经过透镜折射后, 子午面和弧矢面对光线的偏折能力不同, 导致光束不能聚焦在同一点上。所以摆光路时对准光轴很重要。

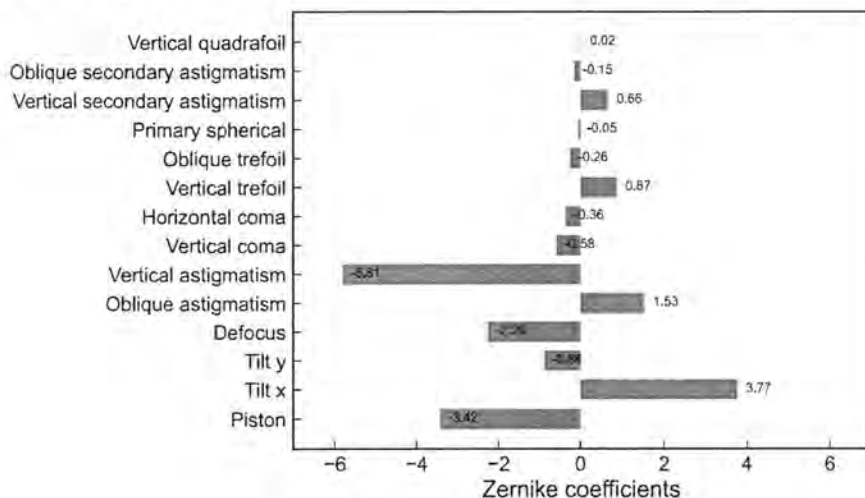


图 3.20 Zernike 系数分解。

3.5 光束整形

利用全息光束整形, 理论上可以生成任意光强分布的光斑模式, 实验上限制因素在于 DMD 的空间分辨率。我们用此方法生成了不同阶次的拉盖尔高斯 (Laguerre-Gaussian) 光束和厄米高斯 (Hermite-Gaussian) 光束。

3.5.1 Laguerre-Gaussian 光束

Laguerre-Gaussian (LG) 光束是一种涡旋光束, 它的光场分布表达式如下:

$$LG_p^l(r) = A_0 r^{|l|} L_p^l\left(2\frac{r^2}{w^2}\right) e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{il\phi}, \quad (3.22)$$

式中 A_0 是与光强相关的常数, l 是拓扑荷数, w 是 LG 光的束腰, $L_p^l(x)$ 是广义拉盖尔多项式。根据方程3.6和3.7编码 LG 光斑的全息图, 再在相位部分减去之前测出的相位差, 便产生了高质量的 LG 光束, 如图3.21所示。

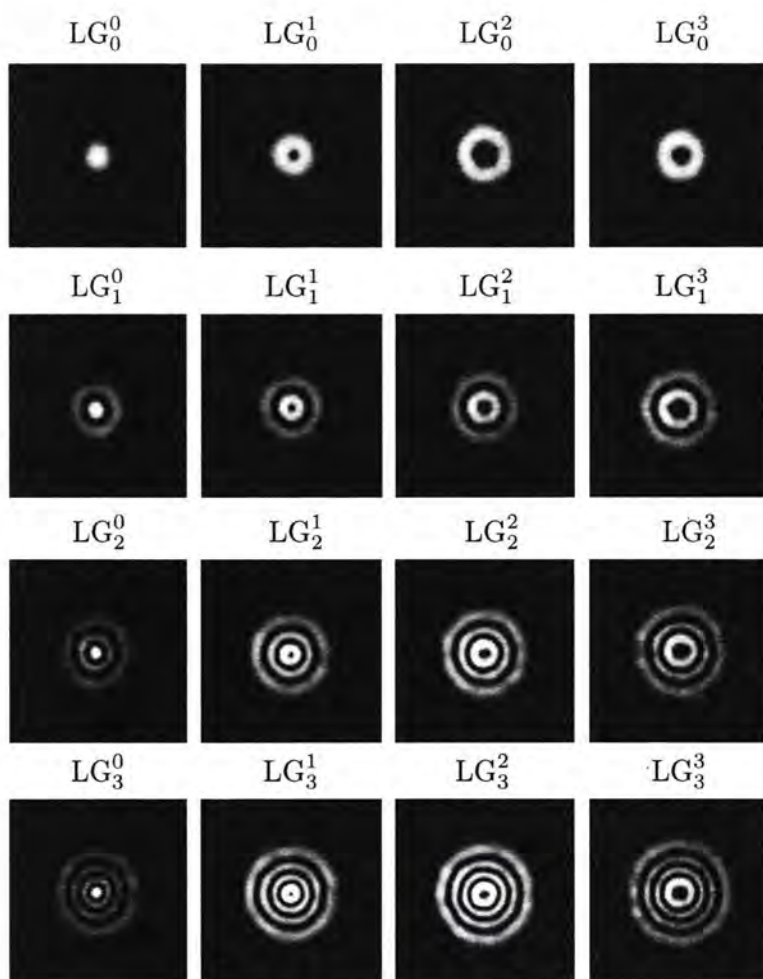


图 3.21 全息光束整形生成的 LG 模式光斑。

3.5.2 Hermite-Gaussian 光束

Hermite-Gaussian (HG, TEM) 光束的光场表达式如下:

$$\text{TEM}_{mn}(x, y) = H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}}, \quad (3.23)$$

$H_m(x)$ 表示 m 阶厄米多项式, w 表示束腰。按照类似的方法, 用 DMD 整形得到的各阶光斑模式如图3.22所示。

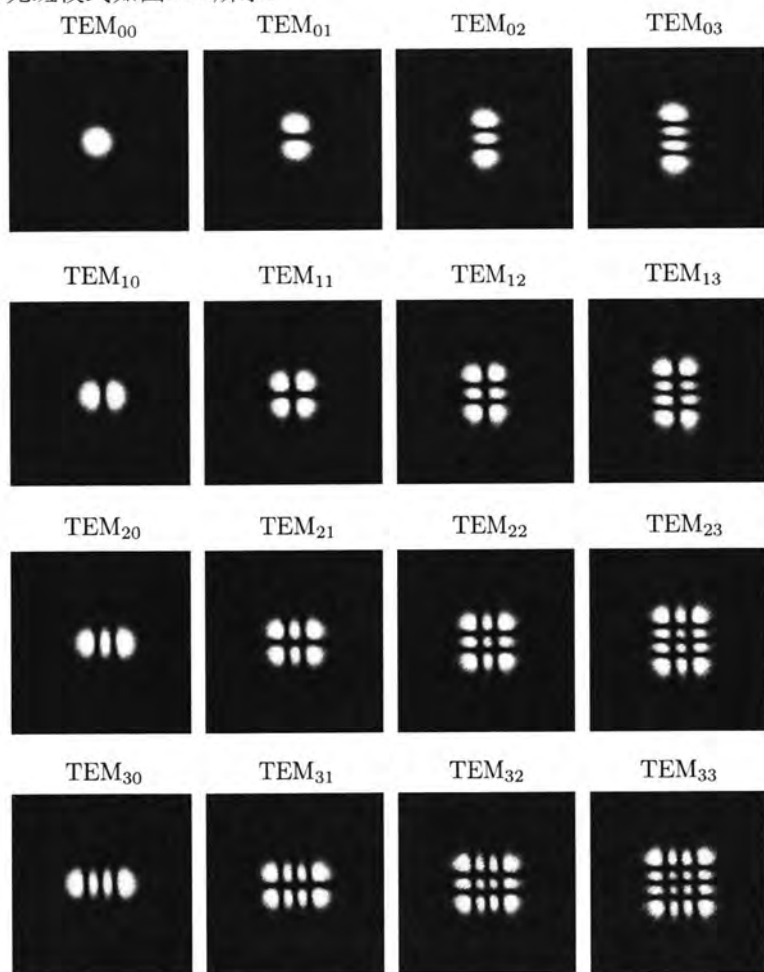


图 3.22 全息光束整形生成的 HG 模式光斑。

第4章 离子超分辨成像

4.1 简介

光学成像分辨率对于 AMO 实验来说非常重要, 高分辨率的探测和成像技术为研究量子输运、量子关联和相变问题提供了直接信息。但是远场光学成像的分辨率 Δr (点扩散函数的半高全宽) 受限于衍射极限,

$$\Delta r = \frac{0.61 \cdot \lambda}{NA} = \frac{0.61 \cdot \lambda}{n \cdot \sin \theta}, \quad (4.1)$$

式中 λ 是成像波长, n 是像平面介质折射率, θ 是物镜的收集角的一半, $NA = n \cdot \sin \theta$ 是物镜的数值孔径。

对于固定的实验系统而言, 荧光波长一般是固定的。要想提高分辨率可以增加 n 或增加 θ 。在 AMO 实验中, 真空环境限制了成像物镜的工作距离, 物镜一般位于真空腔体外, 因此设计高数值孔径的物镜并不是一件容易的事情。马里兰大学的 Monore 研究组在离子阱中设计了 $NA=0.6$ 的物镜 (图4.1(a)), 最近的表面距离离子有 17.2 mm (包含 4 mm 厚的窗口)。实验者需要仔细调节物镜的三维位置和倾角才能获得最佳的成像效果^[57]。在量子气体显微镜中, 在原子前增加的半球透镜, 相当于增加了介质折射率 n , 这种方法称之为“固态浸没透镜”效应 (solid immersion lenes, SIL) (图4.1(b))。球面透镜的表面距离原子通常是微米级, 最后能使数值孔径由 0.55 提高到 0.8 左右, 光学分辨率能达到 500 nm^[130]。也可以通过将反射抛物面镜替换普通物镜来增大 NA (图4.1(c))^[58,62]。当原子或离子处于抛物面镜的焦点时, 超过 80% 方位角的荧光将被反射成平行光, 考虑反射率后的收集效率可以达到 54%^[58]。澳大利亚的研究组用相位菲涅尔透镜替代普通的物镜, 能收集到 12% 的立体角范围内收集到的荧光, 总荧光收集效率能达到 4.5%, 相当于使用 $NA=0.6$ 物镜的收集效果 (图4.1(d))^[64,56,63]。相位菲涅尔透镜是在熔融石英衬底上电子束光刻而成, 相较于组装的物镜而言, 体积小, 集成度高。

但是以上方法始终未能突破光学衍射极限, 超分辨成像技术为解决这一问题提供新的工具和方法。1994 年, Hell 和 Wichmann 提出了一种能突破衍射极限的成像方法: 受激辐射耗尽荧光显微术 (stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy, STED microscopy)^[7]。该方法首先利用高斯光将荧光分子从基态激发到激发态, 然后利用高功率的空心光将处于激发态的荧光分子受激辐射耗尽, 使之回到基态。由于空心光中心的光强相较于其他地方很弱, 不能完全耗尽发光分子, 因此中心处的荧光分子仍然处于激发态继续辐射光子, 而其他地方的荧光分子被耗尽到基态, 无法辐射光子。STED 超分辨成像技术经过近三十年的发

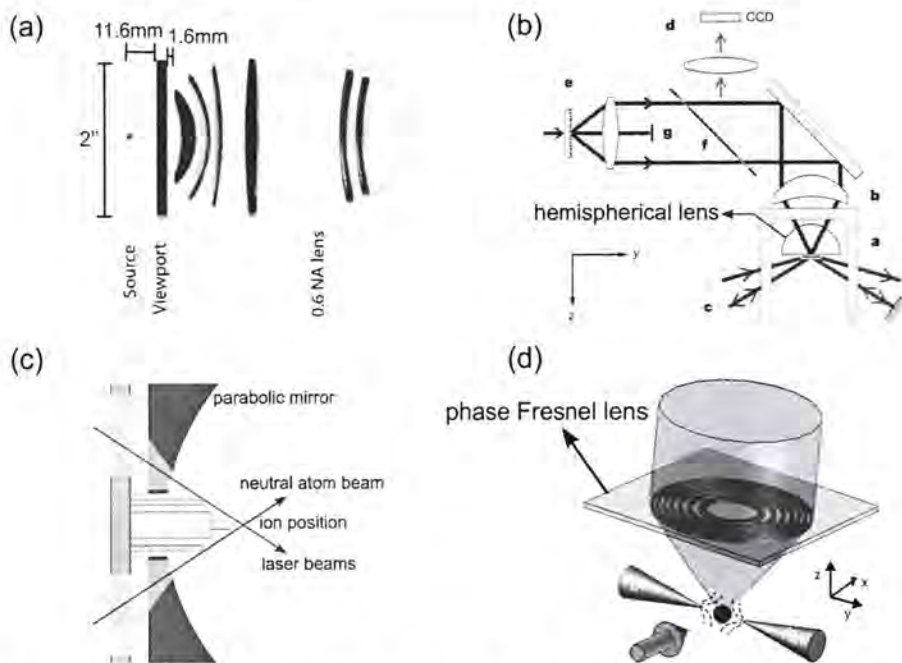


图 4.1 提高分辨率的方法。(a) 在离子阱系统中, 针对 $\lambda = 369.5 \text{ nm}$ 设计 $\text{NA}=0.6$ 的物镜^[57]。(b) 在量子气体显微镜中用半球透镜实现“固态浸没”效应, 增加了 n ^[130]。(c) 在离子阱系统中使用抛物面镜增加收集孔径角^[58]。(d) 在离子阱系统中, 使用相位菲涅尔透镜增加收集效率, 相当于 $\text{NA}=0.6$ 的物镜^[64]。

展, 在生物和化学领域得到广泛应用^[178]。近些年来, 由 STED 衍生出来的基态耗尽 (Ground state depletion, GSD) 显微成像术在量子系统上逐步发展起来^[179-180]。例如在原子的 Λ 型三能级系统中 (图4.2(a)), 将电磁诱导透明 (Electromagnetic Induced Transparency, EIT) 过程中的其中一束光设置成驻波场, 另一束光设置成均匀光场, 使得暗态的波函数在其中一个基态的投影依赖于空间位置。通过探测暗态在该基态上的投影可以得到离子的位置。利用暗态对于光场的非线性响应可以实现突破衍射极限的原子定位精度^[181,48,42,44]。Lukin 研究组基于金刚石 NV 色心系统发展了 spin-RESOLFT 方法, 可以实现 38 nm 的空间分辨率 (图4.2(c))^[35]。孙方稳研究组将分辨率提升到 6 nm ^[36], 而利用类似量子气体显微镜中的固态浸没技术, 单个金刚石色心的分辨率达到了 2 nm ^[182]。巴塞尔大学的 Kaldewey 研究组在量子点系统上实现了基于快速绝热通道开关的量子控制方案, 实现了开关态之间的相干切换, 在量子点体系中实现了 30 nm 的分辨率 (图4.2(b))^[39]。在光晶格系统中, Cheng Chin^[40] 和 Yang Wang^[46] 研究组基于类似的原理, 测量了衍射极限下的原子密度 (图4.2(d))。而在离子阱系统中, 仍然缺乏这样的研究。^①

^①在我们工作完成时, 我们注意到了美国茨大学的 Schmidt-Kaler 研究组的相关工作^[183]。

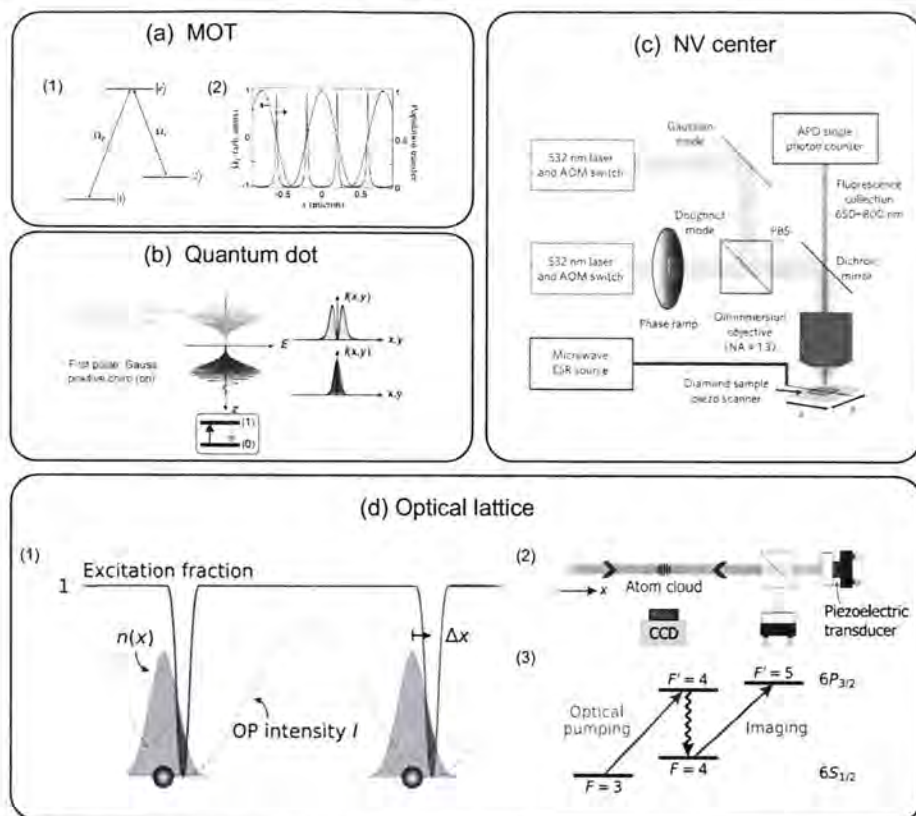


图 4.2 量子系统中的超分辨成像实验。(a) 磁光阱系统，通过暗态对光场的非线性响应实现超分辨成像和定位^[44]。(b) 量子点系统，通过快速绝热通道开关实现超分辨的量子控制^[39]。(c) 金刚石色心中的超分辨成像^[35]。(d) 光晶格中利用超分辨成像探测单个晶格中的原子密度^[40]。

4.2 实验原理

4.2.1 时序

实验原理与 GSD 超分辨显微成像类似。如图 4.3(a) 所示， $^{171}\text{Yb}^+$ 离子首先被初始化到暗态 ($^2S_{1/2}|F=0\rangle$)，接着空心光会将离子极化到亮态 ($^2S_{1/2}|F=1\rangle$)，当离子处于空心光中心时，光强几乎为零，仍然保持在暗态，而在其他地方，由于光泵浦作用，会被极化到亮态。最后用态依赖的荧光技术探测离子暗态的布居数。当离子处于亮态时，在探测光泵浦下可以持续辐射光子，而处于暗态时不会辐射光子。扫描空心光的位置（图 4.3(c)），通过高斯拟合得到分辨率。

实验时序如图 4.4 所示。离子位置保持不变，耗尽光的位置将会做二维的网格状 (21×21) 扫描。在每个网格点处，离子依次被多普勒冷却 1 ms，初始化到暗态，再被脉冲时长为 t 的空心光耗尽，最后探测 500 μs 。

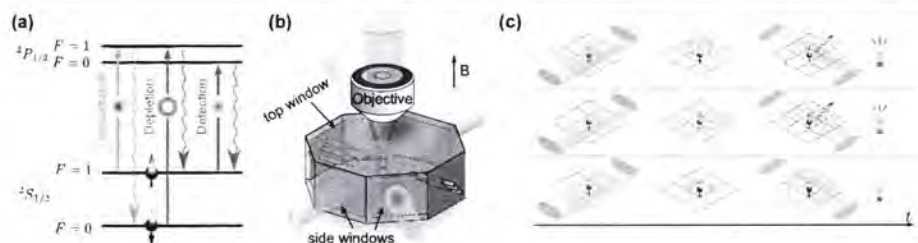


图 4.3 离子阱超分辨显微成像原理。(a) 初始化、耗尽和探测过程；(b) 激光的空间方位；(c) 扫描成像过程。

Super-resolved imaging sequence

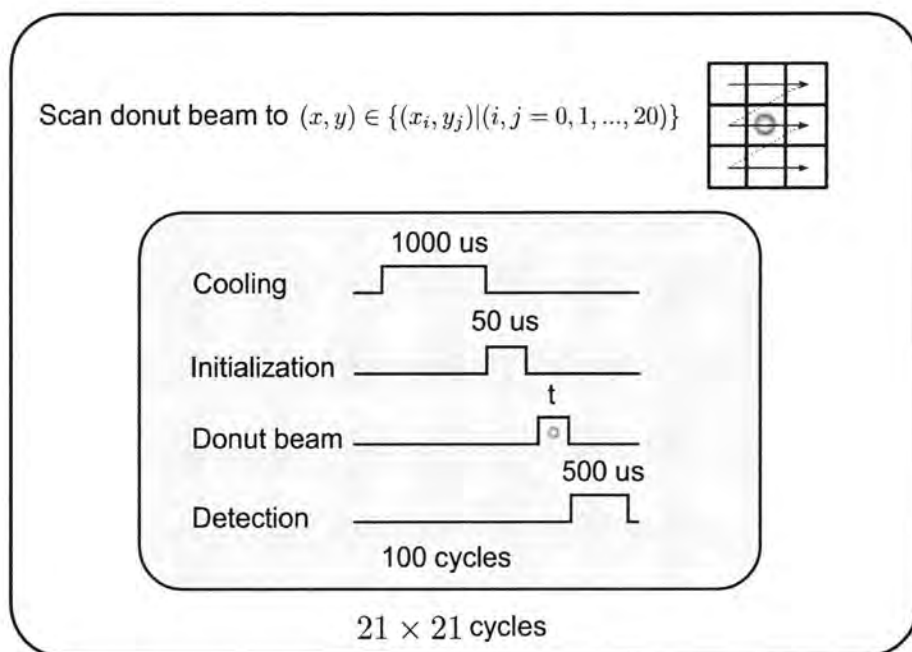


图 4.4 超分辨成像实验时序。

4.2.2 分辨率推导

影响分辨率的因素主要有两个：空心光的功率 P 和耗尽时间 t 。下面我们将推导耗尽过程的光泵浦模型。暗态概率 p_0 的态速率方程为：

$$\frac{dp_0}{dt} = -\beta\sigma \frac{I(x)}{\hbar\omega_0} p_0, \quad (4.2)$$

$\beta = 2/3$ 是离子从激发态自发辐射后落到亮态的概率 (branching ratio)， σ 是吸收截面， ω_0 是跃迁的角频率， $I(x)$ 是空心光的光强分布。为了一般性考虑，我们使用归一化光强 $s(x) = I(x)/I_{\text{sat}}$ ，饱和光强 $I_{\text{sat}} = \hbar\omega_0^3\Gamma/12\pi c^3 = 510 \text{ W/m}^2$ 。由态速率方程4.2得到：

$$p_0(x) = \exp\left(-\frac{\beta\sigma}{\hbar\omega_0} I_{\text{sat}} s(x) t_D\right), \quad (4.3)$$

定义系数 $k = (\beta\sigma/\hbar\omega_0)I_{\text{sat}}$, 从暗态耗尽到亮态的速率可以表示为 $R_x = ks(x)$, 正比于光强。所以暗态速率 $p_0(x)$ 又可以表示为:

$$p_0(x) = \exp(-ks(x)t_D).$$

归一化光强分布表示为:

$$s(x) = s_0 + s_{\text{max}}(x/r_0)^2 \exp\left(1 - \left(\frac{x}{r_0}\right)^2\right),$$

其中 $r_0 = \text{FWHM}_{01}$ 是空心光中心区域的半高全宽, s_0 是中心的剩余光强, s_{max} 是空心光的最大光强。用消光比 $\text{ER} = s_{\text{max}}/s_0$ 定义剩余光强的比例。ER 越大, 剩余光强所占比例越小, 可以认为空心光模式纯度越高。

在弱光条件下, $s_{\text{max}} \ll 1$, 亮态概率 $p_1 = 1 - p_0$ 正比于耗尽光光强, 这样, 分辨率 Δr 等于 FWHM_{01} 。在强光条件中, $s_{\text{max}} \gg 1$, 由于离子对耗尽光的非线性响应, 仅仅需要很弱的光就可以将离子耗尽, 所以耗尽区域远小于空心光尺度, 即 $\Delta r \ll \text{FWHM}_{01}$, 将光强分布函数 $s(x)$ 在 $x = 0$ 处做泰勒展开, 可以得到 $s(x)$ 满足二次曲线近似:

$$s(x) \approx s_0 + es_{\text{max}}\left(\frac{x}{r_0}\right)^2.$$

所以暗态概率满足:

$$\begin{aligned} p_0 &= \exp(-ks_0 t_D) \exp\left(-kes_{\text{max}} t_D \left(\frac{x}{r_0}\right)^2\right) \\ &= \exp\left(-\frac{ks_{\text{max}} t_D}{\text{ER}}\right) \exp\left(-kes_{\text{max}} t_D \left(\frac{x}{r_0}\right)^2\right). \end{aligned}$$

上式中的第一项 $p_0^{\text{max}} \triangleq \exp(-ks_{\text{max}} t_D / \text{ER})$ 表示当离子处于空心光中心时的暗态概率, 当剩余光强增加时, 这一项会指数下降, 意味着信号的降低。从第二项可以推导出分辨率, 其定义为第二项的半高全宽, 可以得到:

$$\Delta r = 2x = \sqrt{\frac{4 \ln 2}{ek s_{\text{max}} t_D}} r_0 \approx \frac{\text{FWHM}_{01}}{\sqrt{k s_{\text{max}} t_D}}.$$

统一弱光和强光条件下的分辨率公式, 得到分辨率如下:

$$\Delta r = \frac{\text{FWHM}_{01}}{\sqrt{1 + ks_{\max}t_D}}, \quad (4.4)$$

和 STED 显微镜中的分辨率公式十分类似^[32]。

4.2.3 分辨率极限

分辨率主要受限于剩余光强 s_0 。当二维扫描得到的暗态概率的信噪比 SNR 等于 1 时，即 $p_0^{\max}$ 等于暗态测量的概率误差 Δp ：

$$p_0^{\max} = \exp\left(-\frac{ks_{\max}t_D}{ER}\right) = \Delta p,$$

$$ks_{\max}t_D = -ER \ln \Delta p.$$

此时分辨率达到极限，结合式 4.4，得到极限分辨率 Δr_{limit} 为：

$$\Delta r_{\text{limit}} = \frac{\text{FWHM}_{01}}{\sqrt{-ER \ln \Delta p}}. \quad (4.5)$$

由于 $\text{FWHM}_{01} \propto \lambda/NA$ ，所以分辨率极限 $\Delta r_{\text{limit}} \propto \lambda/NA \sqrt{ER}$ 。

4.3 实验方法

4.3.1 激光光路

$^{171}\text{Yb}^+$ 离子涉及到的操作有激光多普勒冷却，初始化，态耗尽和态探测（图 4.5）。多普勒冷却是通过一束红失谐 10 MHz 的 369.5 nm 的激光完成的，电子在 $^2\text{S}_{1/2}|F=1\rangle \leftrightarrow ^2\text{P}_{1/2}|F=0\rangle$ 之间和 $^2\text{S}_{1/2}|F=0\rangle \leftrightarrow ^2\text{P}_{1/2}|F=1\rangle$ 之间来回跃迁。此外还需要一束 935 nm 的回泵光，使得电子从 $^2\text{D}_{3/2}$ 态跃迁到 $^3\text{D}[3/2]_{1/2}$ 态，然后再通过自发辐射回到 $^2\text{S}_{1/2}$ 态完成循环（见第二章）。离子有时会与背景气体碰撞跃迁到 $^2\text{F}_{7/2}$ 态，638 nm 的激光可以将离子泵浦到 $^1\text{D}[5/2]_{5/2}$ ，然后自发辐射回到冷却循环。初始化操作是通过一束与 $^2\text{S}_{1/2}|F=0\rangle \leftrightarrow ^2\text{P}_{1/2}|F=1\rangle$ 跃迁红失谐 3 MHz 的激光实现的，离子将会在 30 us 内被初始化到暗态 $^2\text{S}_{1/2}|F=0\rangle$ 。态探测是通过态依赖的荧光技术实现的，利用的是 $^2\text{S}_{1/2}|F=1\rangle$ 到 $^2\text{P}_{1/2}|F=0\rangle$ 之间的跃迁。当离子处于亮态时，会因为光泵浦作用持续散射荧光最后回到亮态而不会回到暗态，因为 $^2\text{S}_{1/2}|F=0\rangle$ 和 $^2\text{P}_{1/2}|F=0\rangle$ 之间是禁戒跃迁；而当离子处于暗态时，则因为 12.6 GHz 的大失谐不会被激散发射荧光，通过统计 500 us 内的平均光子计数来判断离子处于亮态或暗态。耗尽过程使用的是空心光，将离子从初始化后

的暗态泵浦到亮态，而泵浦的效率（或亮态的布居数）取决于离子位置的耗尽光的最大光强和耗尽时间。

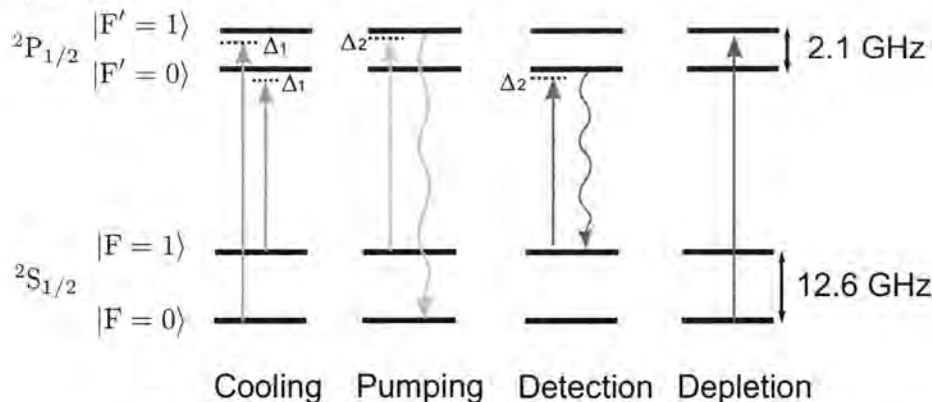


图 4.5 $^{171}\text{Yb}^+$ 能级及其相关的态操作：多普勒冷却、初始化、态探测和态耗尽。

激光光路图如图4.6所示。1号激光器（369 nm）是由 739 nm 的半导体激光器倍频得到，提供多普勒冷却、态初始化和探测光。对于冷却光，EOM 1 提供了 14.7 GHz 的边带，用来驱动 $2S_{1/2}|F=0\rangle$ 和 $2P_{1/2}|F=1\rangle$ 之间的跃迁。探测光和初始化光经过同一路光纤从侧边耦合到离子阱中（图4.7），两者通过开关 EOM 2 切换，EOM 2 提供 2.1 GHz 的边带。2号激光器是 1109 nm 通过三倍频得到的 369 nm 激光，用来产生耗尽光所需的频率，比 1号激光器蓝失谐 14.7 GHz。耗尽光经过 DMD 整形后变成空心光，再经过 NA=0.1 的物镜聚焦在离子上。两个激光器产生的紫外光都经过 PDH 稳频，线宽在 1 MHz 以内。声光调制器 (AOM) 起到光开关的作用。

从图4.6出射的激光经过光纤传输，再由光纤耦合头聚焦到离子上（图4.7）。多普勒冷却光、探测光和泵浦光与 y 轴成 45 度，三个运动模式方向分别沿着 y 轴、xz 平面的两个正交轴（与 z 轴成一定角度），这样冷却光的波矢方向不与任何运动模式垂直，三个方向的声子都可以被冷却。给 Yb 原子炉通 5A 的电流使得炉子迅速升温，Yb 原子会从炉子中喷射到囚禁区域，399 nm 和 369 nm 激光通过双光子电离过程将 Yb 原子离子化，从而被离子阱束缚住。369 nm 和 399 nm 光束的功率分别是 200 μW 和 500 μW 。

耗尽光被整形成空心光入射到物镜 1 中 (NA=0.1)，如图4.8所示。物镜 1 和物镜 2 都用来对离子进行成像，物镜 1 主要用来收集荧光进行态探测，放大倍率是 30。而物镜 2 主要是辅助校准空心光的位置，确保空心光聚焦在离子上。校准步骤分为以下三步：第一步，我们用一束 369 nm 的激光模拟离子荧光的光路轨迹。根据光路可逆原理，空心光的轨迹应当与离子荧光的轨迹重合。但是荧光信号很弱，难以肉眼观察，所以我们用一束强的模拟光再现荧光的光路轨迹。

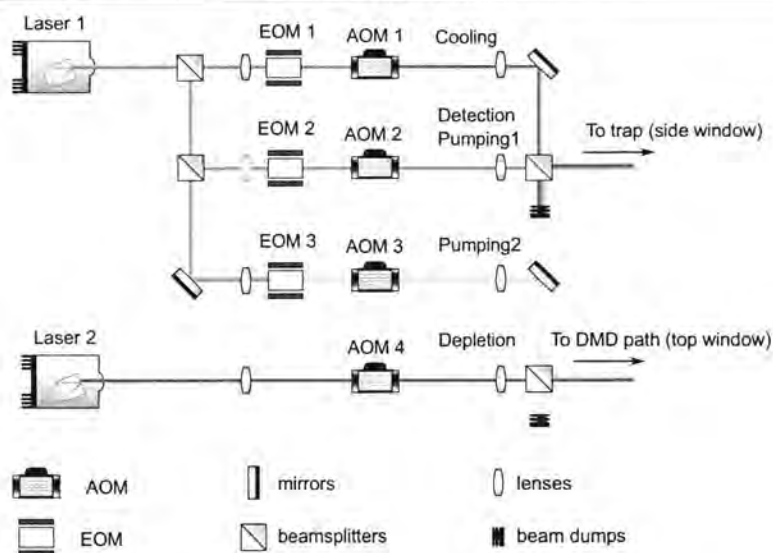


图 4.6 多普勒冷却光、初始化光、探测光和耗尽光的激光装置图。

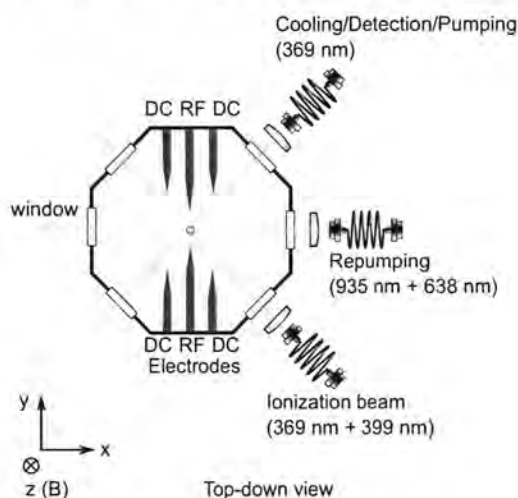


图 4.7 离子阱前的激光（俯视图）。

在物镜 2 后面安装一个光纤耦合头 (图中未显示)，调整物镜 2 三个维度的位置，使得模拟光聚焦在 Camera 1 上的位置与离子的像完全重合。然后调节整形光路 (holograph beam reshaping)，使得空心光的光线与模拟光基本重合，这一步达到粗调空心光位置的效果。第二步，利用离子在 Camera 2 上的像精细调节空心光位置。将模拟光的耦合头换成如图 4.8 所示的 Camera 2，找到离子在 Camera 2 上的位置，调节整形光路的反射镜，使得空心光在 Camera 2 聚焦的像和离子的像重合，这一步达到精调的效果，误差在 $0.5 \mu\text{m}$ 以内。第三步，利用离子荧光进一步缩小调节误差。将耗尽光与探测光同时打开组成冷却光，探测光的光强固定不变，荧光强度与耗尽光光强成正相关。如果将耗尽光整形成高斯光，微调耗尽光

的位置,使得荧光强度最大,则耗尽光的中心与离子重合,误差在 $0.1\text{ }\mu\text{m}$ 左右。

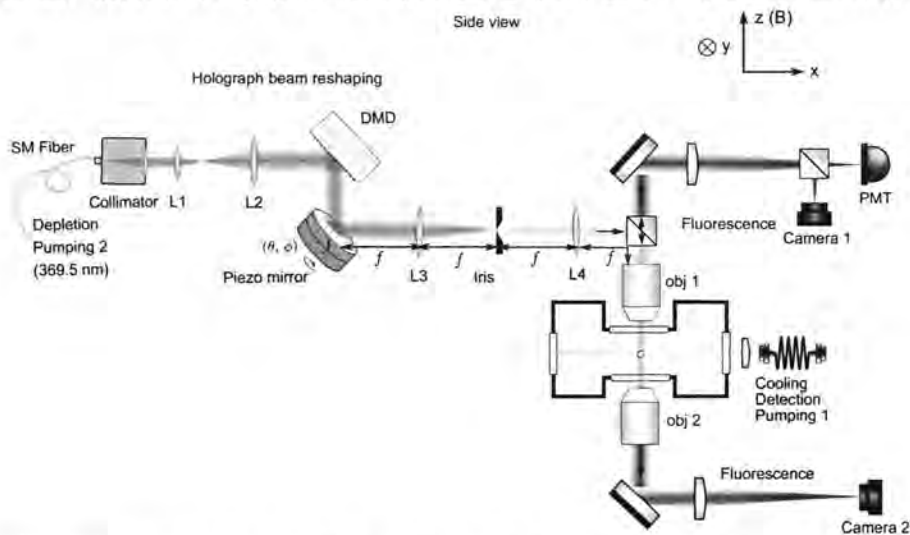


图 4.8 激光装置图 (侧视图)。灰色方框表示全息光束整形光路部分,可以将入射的耗尽光整形成高模式纯度的高斯光或空心光。光阑 (iris) 只允许第一级衍射光通过。物镜 1 用来收集荧光信号进行态探测和聚焦耗尽光。物镜 2 用来辅助校准耗尽光的位置。

4.3.2 光束整形

光束整形的原理和步骤已经在第三章详细介绍过,这里将不再赘述。光路部分如图4.7灰色方框,生成的 DMD 全息图案如图4.9(c,d) 所示。准直后的耗尽光经过 $L1$ (焦距 $f_1 = 75\text{ mm}$) 和 $L2$ (焦距 $f_2 = 200\text{ mm}$) 组成的扩束系统,光斑直径扩大为 27 mm ,使得照射在 DMD 芯片 (面积 $20.7 \times 11.7\text{ mm}^2$) 上的部分光强近似均匀。加载在 DMD 上的全息光栅图将入射光衍射成很多级次。DMD 上用来调制的面积是 660×660 像素。光栅的周期是 10 个像素。压电摆镜 (PI, S-330.2SH) 用来二维扫描空心光的位置,扫描区域 (在离子平面) 是 $50 \times 50\text{ }\mu\text{m}^2$,足够覆盖离子的运动范围。通过物镜 2 测得摆镜的偏转角和光斑在离子平面位移的对应关系是 $25\text{ nm}/\mu\text{rad}$ 。摆镜和 $L3$ 、 $L4$ 、物镜 1 组成 $4f$ 系统,使得偏折的光束位置在物镜 1 处保持不变。

空心光中心的剩余光强对于超分辨成像的极限分辨率有重要影响。我们用消光比 ER 来表示剩余光强的影响,ER 定义为空心光最大光强与中心剩余光强的比值。在大 NA 的物镜聚焦情况下,入射光的偏振对 ER 有非常重要的影响,当拉盖尔高斯光的 l 数与圆偏光的偏振 σ 相等时,聚焦点处的纵向电场才会完全消除,如图4.10所示。

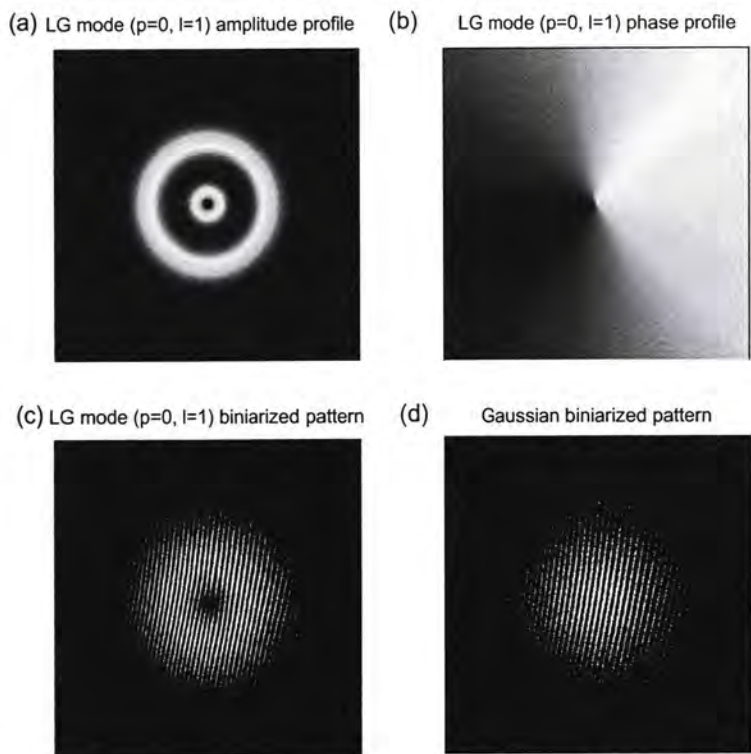


图 4.9 全息光束整形。(a,b) 空心光的强度和相位分布。(c,d) 加载在 DMD 上的空心光和高斯光的全息图。

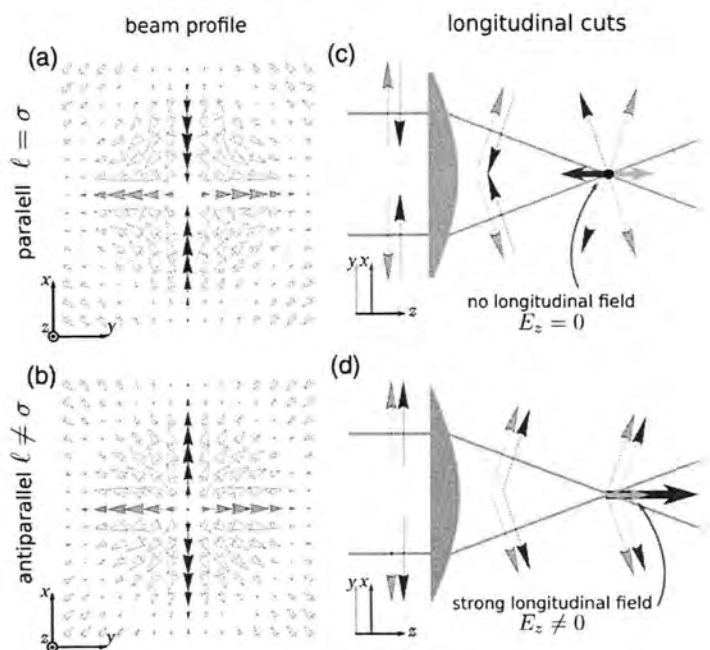


图 4.10 入射光的偏振对聚焦的空心光的纵向电场的影响^[184]。(a) $l = \sigma$ (b) $l \neq \sigma$ 时聚焦点处的光强分布 (x - y) 平面；(c) $l = \sigma$ (d) $l \neq \sigma$ 时沿着 z 轴的光强分布。

在我们的实验中, 聚焦物镜的数值孔径较小($NA=0.1$), 我们基于 Debye-Wolf 积分理论用 *virtuallab fusion* 软件模拟了入射光的偏振对 ER 的影响(图4.11)。可以看出当 $NA=0.7$, 线偏振的 LG 光聚焦情况时, 中心光强是最大光强的 43%, $ER = 2.3$, 而左旋圆偏振对应的情况更差, ER 只有线偏光的一半左右。但是当 NA 减小至 0.1 时, 偏振的影响远远下降了。最差的左旋光聚焦情况下, ER 也能达到 50 左右, 也就是说偏振对于中心剩余光强的贡献在 2% 左右。我们利用 DMD 全息光束整形得到的空心光的偏振是线偏振, $ER=26$, 如果将偏振调整为右旋光, 预计 ER 可以提升到 36。

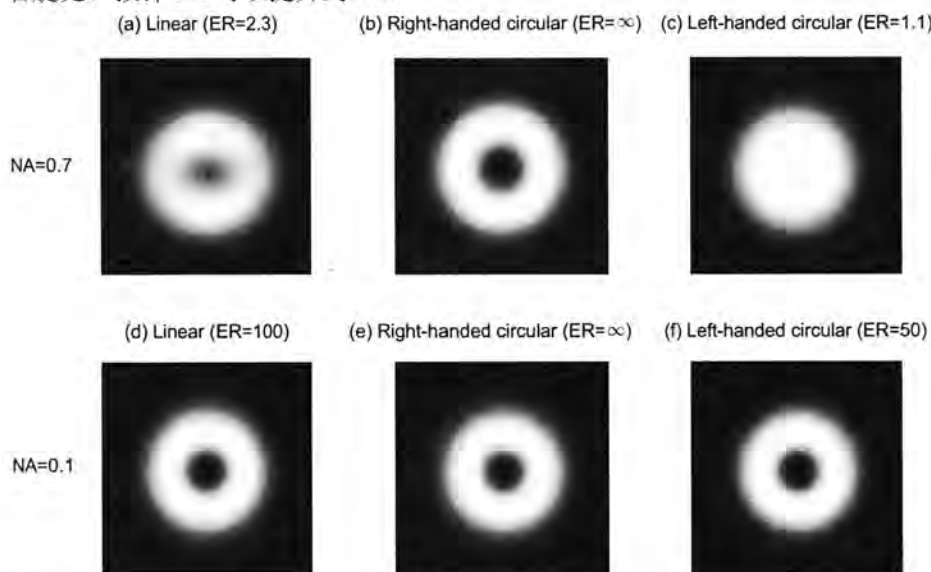


图 4.11 偏振对空心光 ER 的影响。第一行: $NA=0.7$ 下的线偏光 (a)、右旋偏振光 (b)、左旋偏振光 (c) 的聚焦光斑。第二行: $NA=0.1$ 下的线偏光 (d)、右旋偏振光 (e)、左旋偏振光 (f) 的聚焦光斑。ER 定义为空心光最大光强 ((a) 中绿色方框处) 与中心最小光强 ((a) 中黑色方框处) 的比值。

4.3.3 激光频率稳频

耗尽光的波长相对冷却光蓝失谐 14.7 GHz。1109 nm 种子光(输出功率约 13 mW)经过光纤放大器后功率达到 3 W 左右。放大后的 1109 nm 红外光经过倍频产生 554 nm 绿光, 然后再与 1109 nm 和频产生 369 nm 的紫外光。当放大器的电流达到 11A 时, 可以输出 50 mW 的紫外光。为了稳定 369 nm 光的频率, 我们采用 PDH 锁频技术稳定 1109 nm 的波长(装置图4.12, 示意图4.13)。超稳腔放置在真空环境中 ($1e-6$ torr) 以隔绝气流的扰动。腔镜粘在具有低热膨胀系数的 ULE 玻璃的两端以减小温度漂移带来的频率漂移, 整个真空腔用保温棉覆盖并进行温度反馈, 温度漂移在 10 mK 以内。由于超稳腔的共振频率是固定的, 为了移

动被锁激光的频率，我们用光纤 EOM 调制出一阶边带，将边带信号锁在超稳腔的共振频率上。



图 4.12 PDH 锁频装置图。1109 nm 光经过 PBS 后一路输入波长计监测波长，另一路耦合进光纤 EOM 后进入超稳腔。超稳腔锁频光路放置在隔震的面板上提高稳定性。腔体内部抽真空至 10^{-6} torr，外部用主动控温和被动保温（保温棉包裹）减少温度漂移带来的影响。

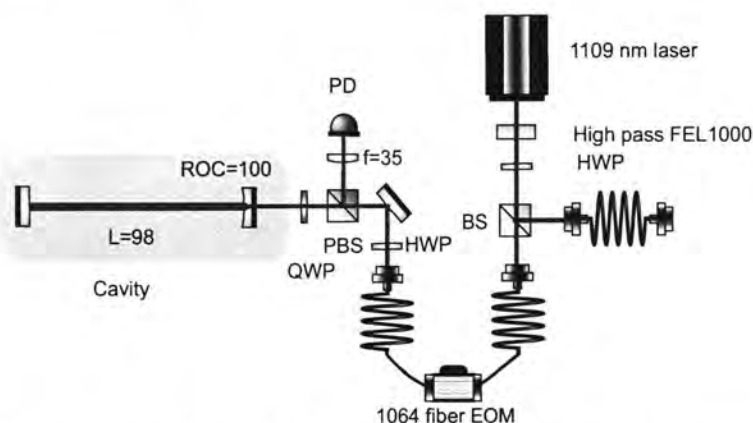


图 4.13 PDH 稳频示意图。长通滤波片 (FEL 1000) 滤出 1109 nm，反射 554 nm。超稳腔是一个平凹腔，由一片平面镜和一片凹面镜（曲率半径 100 mm）组成，相距 98 mm。

透射信号和误差信号如下图4.14所示。开启反馈后，误差信号如图4.14(c)所示。为了测试频率稳定性，我们将稳频后的 369 nm 与另一台 369 nm 激光器拍频。后者经过超稳腔锁频后频率线宽在 10 kHz。结果显示 150 分钟内，拍频信号的

标准差为 $0.11 \text{ MHz} \ll 1 \text{ MHz}$ ，满足我们的要求。

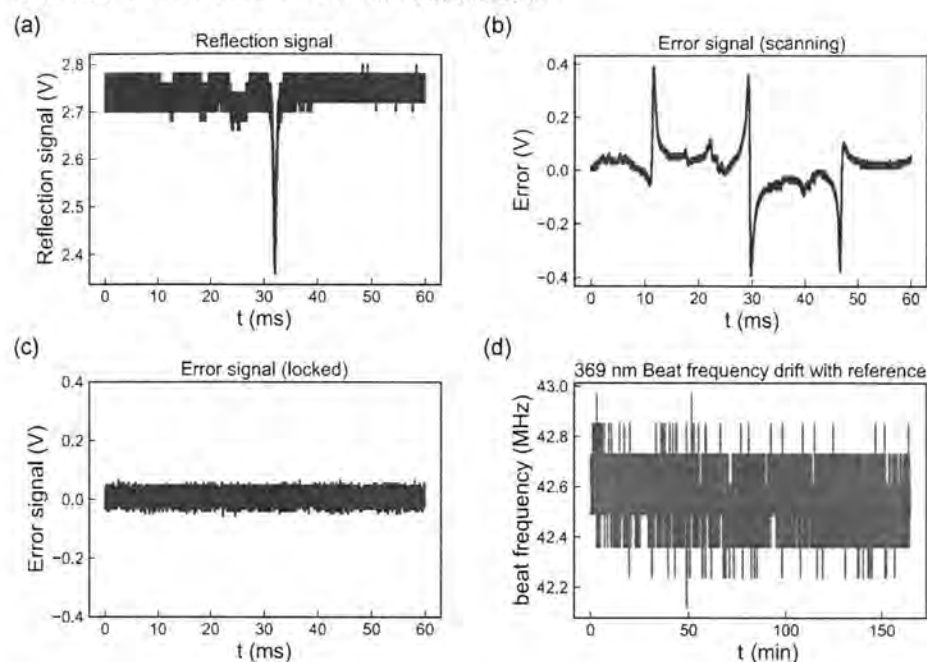


图 4.14 频率稳定结果。(a) 反射信号。(b) 扫频下的误差信号。(c) 锁频下的误差信号。(d) 与 369 nm 参考激光的拍频信号。

4.4 实验结果

根据前面的分析，在弱光情况下，分辨率 Δr 由空心光的中心区域的半高全宽决定。我们首先用离子作为探针扫描了空心光的光强分布（图4.15）。我们测得空心光中心区域的半高全宽是 $\text{FWHM}_{01}=1.4 \text{ }\mu\text{m}$ 。应用普通的荧光显微技术，需要用同等束腰的高斯光扫描离子，如图4.15(c,d)所示，得到点扩散函数 $\text{PSF}=\text{FWHM}_{00}=2.34 \text{ }\mu\text{m}$ 。所以用空心光代替高斯光斑显微成像，在不考虑原子对耗尽光的非线性响应的情况下，分辨率可以得到 1.67 倍的提高。

在强光条件下，由于原子态对耗尽光的非线性响应，分辨率得到进一步提升，如图4.16所示。耗尽时间 t 固定在 $1 \text{ }\mu\text{s}$ ，随着最大光强 $I_{\text{max}}/I_{\text{sat}}$ 的增加，分辨率从 $1.1 \text{ }\mu\text{m}$ 逐渐提高到 248 nm ，数据与公式4.4吻合地很好。

我们还研究了分辨率与耗尽时间的关系。最大光强固定为 $I_{\text{max}}/I_{\text{sat}}=20$ 。随着耗尽时间的增加，分辨率逐渐减小，当耗尽时间约为 $4 \text{ }\mu\text{s}$ 时，分辨率为 202 nm 。

优化耗尽光时间和光强后，我们得到的最小分辨率是 175 nm ，对应的耗尽光功率是 65 nW ，饱和系数是 14，耗尽时间为 $7 \text{ }\mu\text{s}$ 。相较于荧光显微镜的点扩散

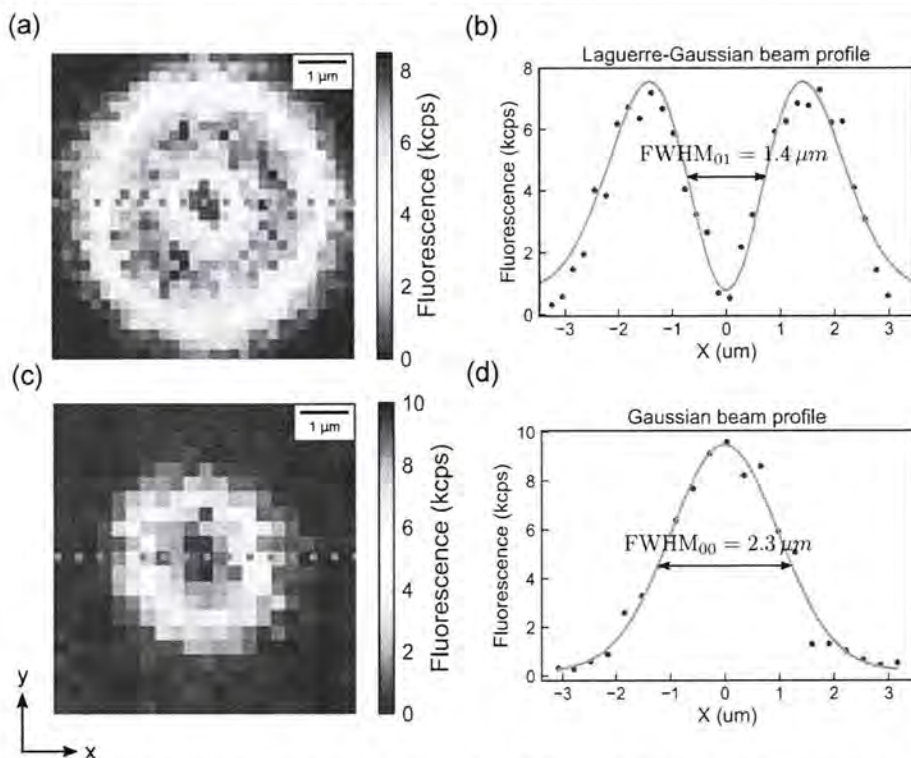


图 4.15 用单离子做探针扫描整形后的空心光和高斯光。光强用单位时间内收集到的荧光光子数表示 (kcps=kilocounts per second)。数据图以及减去了背景光子噪音。(a,b) 空心光光强分布。ER=26, 即中心剩余光强是空心光最大光强的 3.8%。中心区域的半高全宽是 $1.4 \mu\text{m}$ 。(c,d) 高斯光光强分布, 半高全宽为 $2.3 \mu\text{m}$ 。(b,d) 的曲线取自 (a,c) 中的绿色行。

函数的分辨率 $2.4 \mu\text{m}$, 我们的分辨率提高了 13 倍, 如下图 4.18 所示。实验中的暗态探测误差 $\Delta p \approx 0.05$ (见图 4.15 绿色曲线的背景值), ER=26, 根据公式 4.5, 计算得到理论分辨率极限为 159 nm , 与实际测得的最小分辨率很接近。

4.5 讨论与总结

我们基于基态耗尽 (GSD) 的超分辨显微术对单离子进行成像, 得到了最小 175 nm 的空间分辨率, 突破了衍射极限。与荧光显微成像的方法相比, 分辨率提高了 13 倍。我们还研究了分辨率与空心光最大光强、耗尽时间的关系, 实验数据与理论推导结果吻合地较好。

理论上来说, 只要提高 $I_{\text{max}} \cdot t$, 就可以提高分辨率超越衍射极限, 甚至达到亚纳米级别。但是从实验的角度来说, 分辨率受到一些因素的限制。首先, 最重要的一个因素是空心光的剩余光强。随着空心光功率的增加, 剩余光强也会增

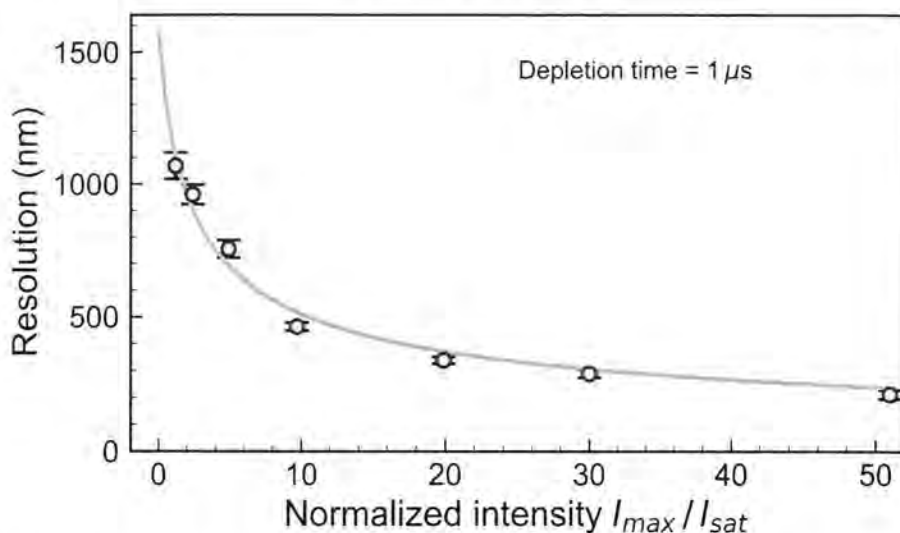


图 4.16 分辨率和空心光最大光强的关系。 $I_{\max}$: 空心光的最大光强, I_{sat} : Yb⁺ 的饱和光强。

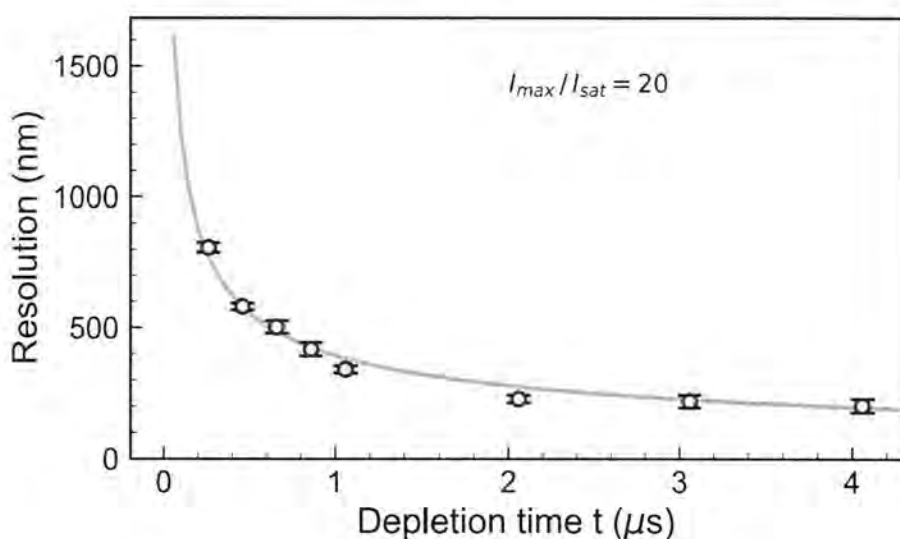


图 4.17 分辨率和耗尽时间的关系。最大光强 $I_{\max} / I_{\min}$ 固定在 20。

加, 如果达到饱和光强的量级, 也会将离子从暗态激发到亮态, 这样便不能提取出离子的位置信息。其次, 空间分辨率还受限于离子的波包大小 σ_i 。我们测得的分辨率 σ 为

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{PSF}}^2 + \sigma_i^2}, \quad (4.6)$$

其中 σ_{PSF} 表示离子“真实”成像的点扩散函数。在我们的系统中, 经过多普勒冷却后的波包大小 $\sigma_i \approx 20 \text{ nm} \ll \sigma$, 所以 $\sigma \approx \sigma_{\text{PSF}}$ 。但是在某些系统中, 如果声

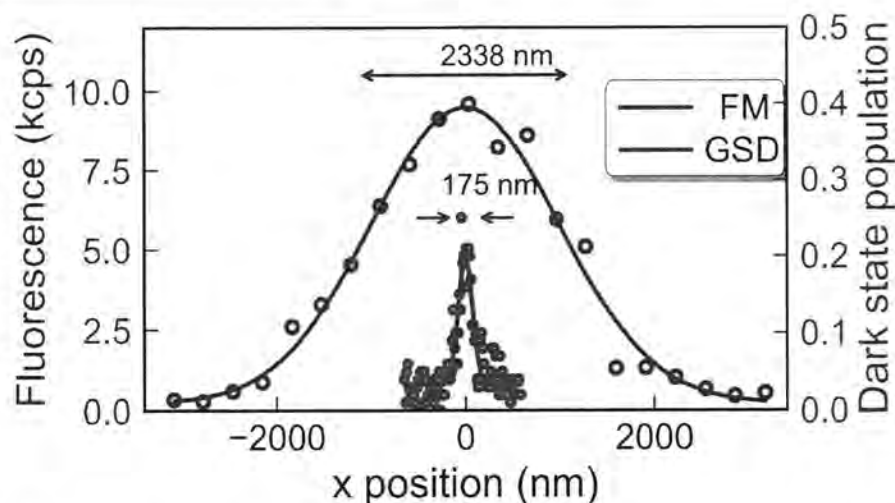


图 4.18 荧光显微镜(FM, 蓝线)和GSD超分辨显微镜(绿色)的分辨率对比, 后者提高了13倍, 分辨率达到175 nm。

子频率较低, 离子质量较轻(如 Be^+ 、 Ca^+), 多普勒冷却后的波包可以达到百纳米, 这时测得的分辨率将会受限。如果能够测出声子数(如通过边带法), 就可以提取出 σ_{PSF} 。

提高分辨率的方法有以下几种。第一, 提高空心光的模式纯度(即提高ER)。可以通过改进波前感知的算法减小像差、调节入射光的偏振为右旋圆偏光, 以实现更高的ER。第二, 增加物镜的数值孔径, 相当于减小 FWHM_{01} 。如果使用0.6的物镜, ER达到1000^[135-136], 预计分辨率可以达到4.7 nm, 利用如此高的分辨率可以观测基态波包。

第 5 章 离子运动探测

囚禁离子或冷原子的动力学探测对于量子信息的研究具有重要的意义。本章基于前面发展的单离子超分辨成像技术,对离子的久期运动进行了二维直接成像。我们将时间分辨率压缩到 50 ns,从而能够以远小于久期运动周期的时间分辨率观察离子的二维运动轨迹。可分辨的运动幅度达到百 nm 量级,轨迹的高斯拟合的精度达到 10 nm。我们的方法可以扩展到多离子体系和冷原子系统,未来可用于原子的位置、动量和运动关联探测。

5.1 离子动力学探测方法

离子的动力学观测具有广泛的应用。Blatt 和 Zoller 等人提出理论方案,通过实时测量离子久期运动的幅度,设计反馈环路,可以将离子冷却至多普勒极限以下^[185]。原理如图 5.1 所示,单个 $^{138}\text{Ba}^+$ 离子被囚禁在 Paul 阱中。冷却激光使得电子在 $S_{1/2}$ 和 $P_{1/2}$ 能级之间跃迁。反射镜将离子向左辐射的荧光反射向右,与向右辐射的荧光形成干涉,条纹的对比度达到 73%。PMT 通过望远系统收集到干涉条纹的荧光信号。离子投影到反射镜法线方向的运动分量将导致光程差发生变化,干涉条纹发生移动,从而引起 PMT 计数被运动信号调制。PMT 2 解调出来的信号经过滤波、移相后,反馈施加在离子阱电极上的微波,从而实时耗散离子运动,达到冷却的目的。Blatt 组基于此方案测量了单离子运动幅度,分辨率达到了 4 倍标准量子极限,并通过上述反馈环路抑制了光子散射造成的声子退相干过程^[186,60,187]。运动探测还可以用来测量离子的波包大小。Schmidt-Kaler 研究组利用与我们类似的方法,分别测量了多普勒冷却极限下和边带冷却下的 $^{40}\text{Ca}^+$ 的波包大小,可分辨的波包尺寸达到 39 nm。

探测微观物体的运动对于基础物理具有重要的意义。通过测量铯 Re 离子在 Penning trap 的回旋运动频率可以测量原子基态和激发态的静止质量,从而计算出激发态的能量。在精密光谱实验中,通过比较谐振频率之差,可以推算基本粒子的旋磁比,从而检验量子电动力学或寻找物质与反物质的不对称性^[60]。

研究久期运动的方法有以下几种。1. 边带法 (sideband)。通过扫描拉曼光的频率测量运动的频率谱。这种方法的优点在于可以扫描出所有的声子模式,可直接用于离子的边带冷却,将平均声子数降到 0.01 左右。缺点在于光路复杂,对于激光的相位、空间位置、频率稳定性要求较高。2. 荧光关联法 (photon-correlation)。离子的运动的多普勒效应会对散射荧光的频率产生调制。统计荧光光子到达探测器 (例如 PMT) 的时间间隔,经过长时间的积分 (~200 s),对关联信号进行傅

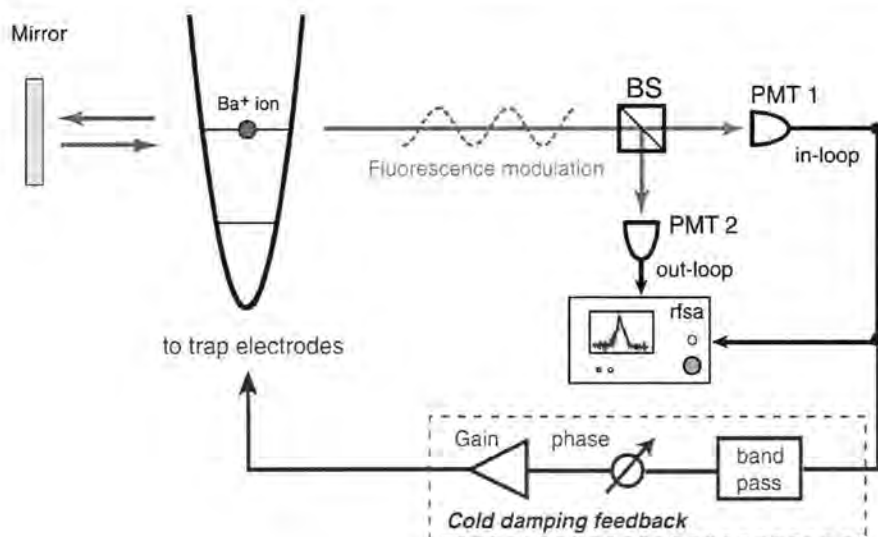


图 5.1 通过测量离子的实时运动反馈射频电压，实现离子冷却^[185]。

里叶变换就可以测量出久期运动的声子模式。这种方法装置简单，缺点是实时性较差，因为需要长时间积分才能得到高信噪比的信号。3. 外差探测法 (heterodyne detection)。将被调制过的荧光信号与激发光拍频可以将微弱荧光信号中特定频率信号进行外差放大。外差法不需要长时间积分就能测出特定声子模式的强度，但是增加了光路和电路上的难度。

这些方法主要是在频率域上分析离子的运动信息，在时域上还缺乏这方面的研究。我们首次在时域上直接观察离子的二维运动轨迹，时间分辨率达到了 50 ns，空间分辨率超越了衍射极限。我们的方法可以扩展到多离子体系和冷原子系统，对于探测他们的位置、动量和关联提供了新的工具和思路。

5.2 离子波包探测

可以通过边带法推测声子数，进而计算波包大小。基态波包的大小为 $\sigma_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ ，声子数为 n 时波包大小为 $\sigma_n = \sigma_0 \sqrt{2n+1}$ ， ω 是声子频率。以 $\omega = 2\pi \times 1 \text{ MHz}$ ， $m = 171m_p$ 为例， $\sigma_0 = 7.7 \text{ nm}$ 。这么小的波包无法通过传统的受衍射极限限制的成像方法探测到。美国茨大学的 Schmidt-Kaler 研究组通过超分辨的方法感知几十纳米的波包大小^[183]。下面将简要介绍他们的方法。

他们利用单个 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子的 $4S_{1/2} \longleftrightarrow 3D_{5/2}$ 能级作为耗尽能级 (图5.2)，这是一个电四极跃迁，空心光作用在单个 Ca 离子上一段时间 (19 us)，由于不同位置的光强不同，导致不同位置处的拉比震荡的周期不同，最终探测到的态的概率呈现如图5.3所示的圆环，而不是被完全耗尽。

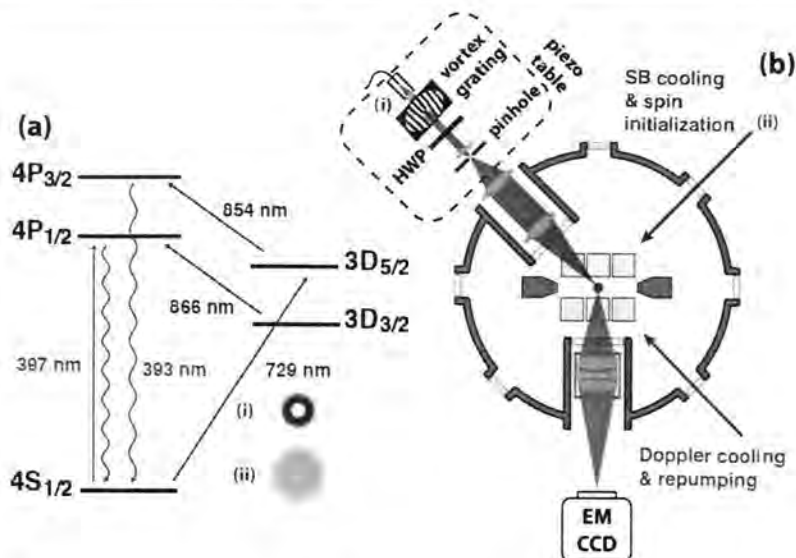


图 5.2 超分辨感知波包实验^[183]。(a) $^{40}\text{Ca}^+$ 离子能级。耗尽光驱动 $4\text{S}_{1/2} \rightarrow 3\text{D}_{5/2}$ 之间跃迁。(b) 实验装置图。用涡旋相位片生成 LG_0^1 模式，束腰 $4.2\text{ }\mu\text{m}$ 。

二维扫描耗尽光的位置，可以得到单离子的成像(图5.3(a))，该像是理想点扩散函数(PSF)与离子波包 σ 的卷积。提高耗尽光功率，PSF分辨率提高，但是实际像点的中心暗环的对比度下降。如果 $\text{PSF} < \sigma$ ，则对比度完全消失，无法提取波包大小信息。用这种方法，他们计算出了边带冷却后的离子的波包大小为 39 nm ，成像分辨率约为 110 nm 。

值得注意的是，我们与美因茨大学的方法有相似之处，都是基于基态耗尽的超分辨方法，分辨率都是 100 nm 量级。但是存在几点重要的不同之处。首先，他们的方法不能用于成像，因为点扩散函数中存在多层同心圆环，当分辨率小于波包大小时不能测量波包信息，而我们的PSF是一个类高斯函数，可以用于直接成像。只要分辨率足够高就可以观察到波包的分布。其次，他们的方法不适合动力学探测。因为耗尽时间达到了 $19\text{ }\mu\text{s}$ ，来不及记录离子轨迹。而我们的方法基于电偶极跃迁，耗尽时间可以达到 50 ns ，因而能够对快速运动进行拍摄。

5.3 实验方法

为了直接观察离子的运动，我们用一个正弦形式的电磁力 $F_d \sin(\omega_d t)$ 激发离子的声子模式，实验装置如图5.4(a)所示。我们选择激发沿着射频电极方向(y-axis)的声子模式，因为离子在该模式下运动的方向沿着空心光的径向(垂直于 k 波矢方向)。驱动的电磁力由施加在电极上的射频信号提供。为了更有效地驱动离子，驱动频率 ω_d 与声子频率 ω_y 达到近共振条件，驱动一段时间 t_d 后，关

扫描成像图

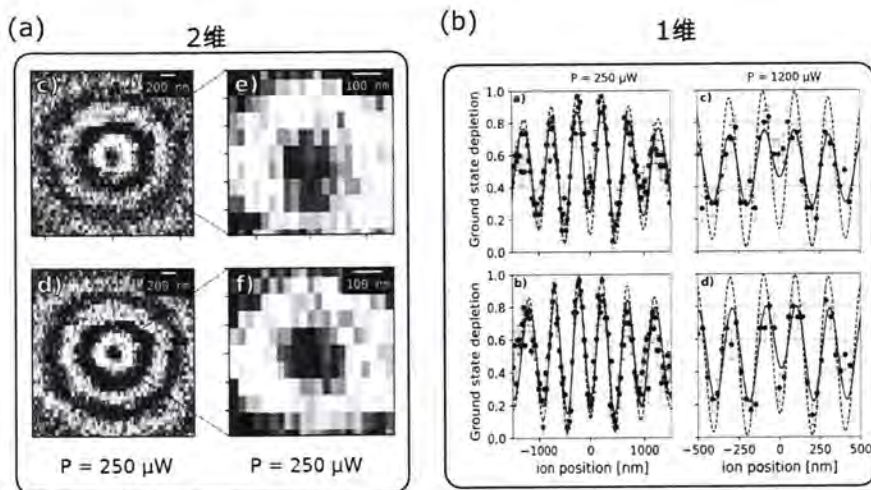


图 5.3 扫描成像图^[183]。(a) 二维图。扫描空心光对离子成像，由于拉比振荡形成很多同心光斑。(b) 一维图。增大耗尽光功率，PSF 分辨率提高，但是中心对比度下降。多普勒冷却下的波包成像图的中心对比度几乎消失，而边带冷却下的离子成像依然呈现出对比度。从右下角图中可以计算出波包大小为 39 nm 。

闭冷却光和驱动信号，离子将以恒定的幅度和本征频率进行振荡（推导过程见附录 A）。振荡的幅度可以表示为^[188]：

$$A = \frac{2F_d}{m(\omega_y^2 - \omega_d^2)} \sin\left[\frac{(\omega_y - \omega_d)t_d}{2}\right], \quad (5.1)$$

上式中 $\omega_y = 2\pi \times 1.36 \text{ MHz}$ 是离子的声子频率， m 是离子质量。近共振条件下，振幅 $A = F_d t_d / 2m\omega_y$ ，表明振幅与驱动力的振幅和驱动时间成正比。

实验时序如图 5.4(b) 所示。离子首先被多普勒冷却 1 ms ，然后被初始化到暗态。接着共振射频信号驱动离子一段时间 t_d 。停止驱动后，延迟一段时间 t 后，耗尽光在 50 ns 内对离子进行拍照（将离子耗尽到亮态），最后读出离子的暗态概率。保持延迟时间 t 不变，扫描耗尽光的位置（ 10×10 个点），重复上述时序，得到离子在 t 时刻的瞬时位置，如图 5.4(c) 第一幅图所示（ $t = 0$ ）。改变延迟时间 t ，便得到了离子在一个周期内不同时刻的运动轨迹，如图 5.4(c) 所示。

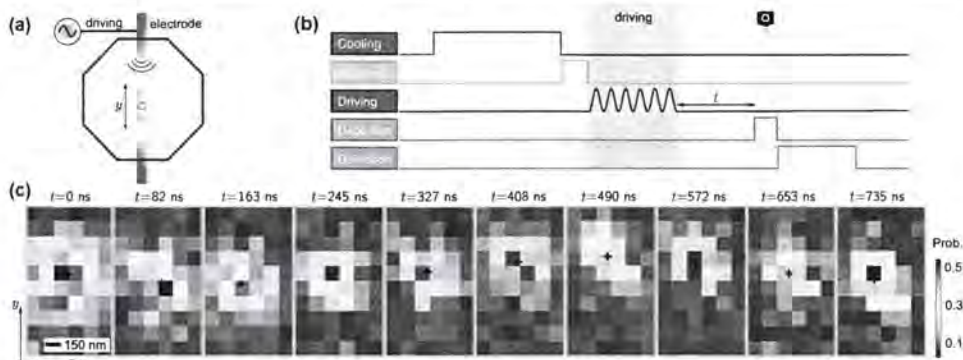


图 5.4 在纳秒时间尺度内观察离子的运动轨迹。(a) 原理示意图。将与声子频率共振的射频信号加载到电极上，产生一个正弦驱动信号驱动离子振荡。驱动一段时间后，离子进入稳定的周期振荡。(b) 实验时序图。离子先经过 1 ms 的多普勒冷却，然后被初始化到暗态。接着驱动射频作用在离子上，脉冲时长为 t_d 。离子开始稳定振荡，我们延迟时间 t 后，用超分辨枝成像技术对离子进行扫描成像。扫描分辨率为 10×10 ，以得到离子的瞬时位置，即 (c) 中的一幅图片。(c) 改变延迟时间 t ，可以观察到一个周期内离子的运动轨迹。通过二维高斯拟合得到离子的中心位置（蓝色十字位置）。每幅图删去了不含位置信息的的像素列。

5.4 实验结果

5.4.1 运动频率稳定

为了准确测量离子的运动，需要稳定声子频率 ω 。

$$\omega = \frac{e\mu V_0}{\sqrt{2m\Omega R^2}},$$

式中 μ 是常数，表示阱的结构因子， V_0 是电极上的 RF 电压， Ω 是囚禁 RF 的频率， R 是阱中心到电极的距离。实验上声子频率的不稳定主要是由于 V_0 的抖动，来源可能是 RF 放大器的输出功率抖动。此外谐振腔的机械形变、内部气流扰动、环境温度变化都会带来的品质因子 Q 的变化，从而导致 RF 电压的漂移。为了减小 V_0 的扰动，我们采用主动反馈环路的方式稳定电极上的交流电压振幅，原理图如图 5.5 所示。我们通过采样电路采样 RF 电极上的电压，经过整流后变成直流信号，再经过 24 位 ADC 模拟采样芯片得到数字信号，输入计算机反馈，得到数字信号后经过 DAC 进入混频器，和本振频率混频后的信号进入放大器（增益 51 dB）。本振信号频率 22.01 MHz，功率 -27 dBm，混频器的插损比为 5 dB。放大后的信号进入螺旋谐振腔（ $Q \approx 200$ ），输入到离子阱 RF 电极上。

采样电路由两个高精度电容组成 $C_1 = 1 \text{ pF}$, $C_2 = 20 \text{ pF}$ ，会将 5 % 的电极电压反馈到混频器中。该电容的温度系数为 $0 \pm 30 \text{ ppm/}^\circ\text{C}$ ，满足我们的要求。经过采样的交流电压约为 0.5 V，经过整流器的变换转换成直流信号。在整流器的电路

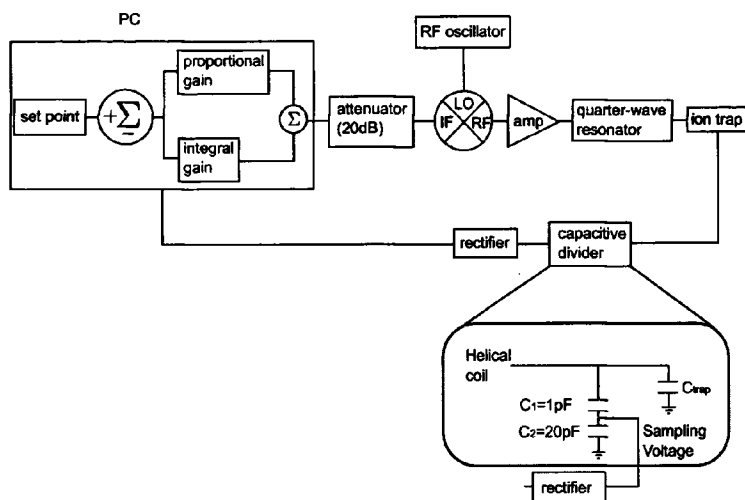


图 5.5 离子阱电极电压反馈环路。主要由采样电路、整流器和 PID 反馈构成。

设计中应当选择温漂小的电阻和电容以提高输出信号的稳定性，采用两个肖特基二极管 HMPS-2822 用来进行被动温度补偿，能提高直流信号的稳定性。整流后的信号被 6 位半的数字电压表 (Rigol DM3068) 测量，最小电压精度为 $1\ \mu\text{V}$ 。得到的数字信号接入计算机中运行 PID 算法进行反馈。反馈信号经过 24 位的数模转化 (DAC) 变成电压信号，与 RF 本振信号混频，用于控制输出信号的振幅。

我们首先测量了开启反馈环路后采样电压在 80 分钟内的稳定性，结果如图 5.6 所示。相对电压误差 $\delta V/V_{\text{set_point}} = (V_{\text{actual}} - V_{\text{set_point}})/V_{\text{set_point}}$ ，其标准差被抑制在 88 ppm。反馈中偶尔会出现一些电压毛刺，可能是由于螺旋谐振腔内的气流扰动导致的 Q 值突然变化，但是仍然能够迅速恢复到设定电压附近，说明反馈环路在起作用。提高气流密封性，并增加控温措施可以让电压更稳定。我们用激发声子的方式测量声子频率的稳定性。将任意波形发生器产生的信号接到电极上驱动离子运动，观察 CCD 上离子的成像变化。当发生共振时，离子的像会沿着运动方向拉伸，如图 5.7 所示。这种方法测量的声子的精度小于 0.5 kHz。我们测量了 1 小时内的声子频率变化，频率漂移小于 0.5 kHz。该反馈环路的效果满足我们的实验要求。

5.4.2 驱动电压的校准

驱动力由信号源产生。输出电压信号经过 π 滤波器衰减后连接到离子阱电极上，衰减幅度约 44 dB。我们用离子作为电场探针，校准了电极上的实际驱动电压。我们在相同的电极上施加相同的静电电压 V_0 ，在离子处产生的静电场场强为 E_0 ，在 CCD 上观察到离子发生位移 x_0 ，则

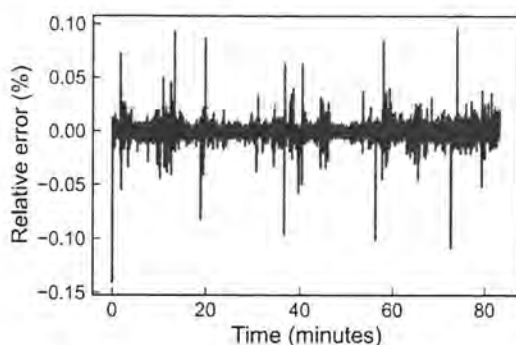


图 5.6 采样电压的漂移。纵轴为相对电压误差 $\delta V/V$ ，定义为反馈环路输出电压和设定电压之差与设定电压的比值

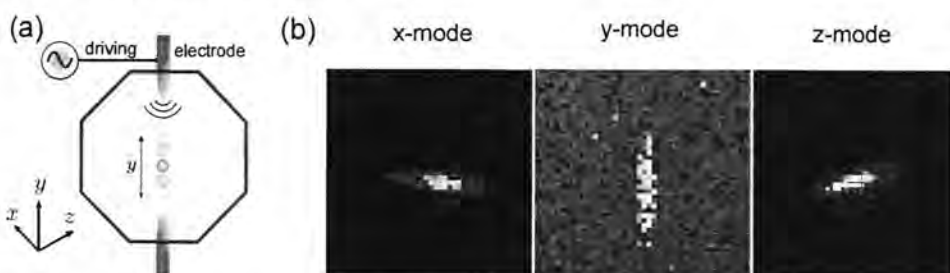


图 5.7 (a) 用射频信号驱动声子运动实验装置；(b) 相机上观察到到被激发的离子运动模式。当驱动信号的频率与不同模式的声子频率共振时，该模式声子会被激发，离子沿该方向的振荡幅度增加，在 CCD 上观察到离子的像不再是点状，而是长条状。从左到右分别是 x, y, z 三个方向上的声子模式。

$$E_0 q = m \omega_y^2 x_0.$$

据此可以推算出单位电压在离子处产生的场强大小 E_0/V_0 。由方程 5.1 可知，根据离子振荡幅度大小 A 可以计算出驱动力的大小 $F_d = E_d q$ ，进而计算出驱动场强的振幅 E_d ，在根据静电场下计算得到的 E_0/V_0 ，可以计算出相应的驱动电压振幅 V_d 。

实验中测到的结果如下：当信号发生器输出的电压峰峰值为 1 V 时，离子的运动幅度是 $x_0 = 104 \text{ nm}$ ，对应的电场强度振幅为 $E_d = 0.043 \text{ V/m}$ ，电极上的电压峰峰值为 $V_{pp} = 38 \text{ } \mu\text{V}$ ，驱动电场力峰峰值为 $F_d = 6.9 \pm 0.7 \text{ zN}$ 。

5.4.3 动力学的时间分辨率

空心光的作用时间 t_D 决定了离子动力学的时间分辨率。在实验中，我们用 AOM 控制空心光的开关，因此 t_D 会受限于 AOM 的上升时间 t_{rise} 与下降时间

t_{fall} ，其中上升时间由聚焦在 AOM 晶体 (TeO_2) 上的光斑尺寸 d 和晶体中的声速 v ($v=4200 \text{ m/s}$) 决定：

$$t_{\text{rise}} = \frac{d}{v}.$$

我们将 AOM 上的光斑聚焦到 $120 \mu\text{m}$ ，理论的上升时间为 28 ns ，这与我们的测量结果一致，如图 5.8(a) 所示。AOM 的实际上升时间为 23 ns （功率从 20% 变化到 100% 对应的时间），下降时间为 25 ns 。实验中空心光的开启时间设置为 50 ns ，实际测量的波形宽度为 52 ns ，表明我们的实验装置能以远小于久期运动周期的时间分辨率观察离子运动。

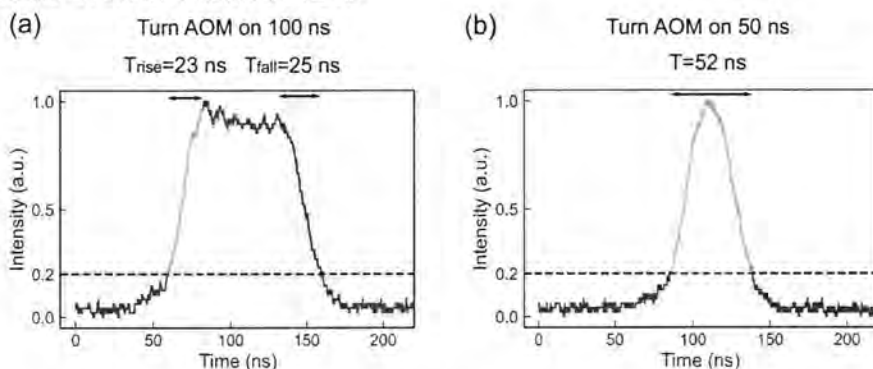


图 5.8 空心光脉冲形状。(a) AOM 开启 100 ns 。上升时间和下降时间分别为 23 ns 、 25 ns 。(b) AOM 开启 50 ns 。脉冲持续时间为 52 ns 。

5.4.4 离子的二维运动轨迹

我们用不同的驱动电压驱动离子振荡，驱动时间 t_d 固定为 100 个周期，即 $73.5 \mu\text{s}$ 。利用超分辨显微成像技术观察到的离子二维运动轨迹如下图 5.9 所示。

由此可以拟合出离子运动的振幅，如下图 5.10 所示，四组曲线拟合的运动振幅分别是 104.2 nm ($V_{\text{pp}} = 38 \mu\text{V}$)、 224.8 nm ($V_{\text{pp}} = 82 \mu\text{V}$) 和 333.6 nm ($V_{\text{pp}} = 122 \mu\text{V}$)，轨迹的拟合精度为 10 nm 。

我们还测量了两个周期内离子运动的轨迹，驱动电压 $V_{\text{pp}} = 82 \mu\text{V}$ ，如图 5.11 所示。

5.5 总结与讨论

我们利用超分辨显微成像计数，观察到了离子的动力学轨迹。不仅在空间分辨率上突破了衍射极限，而且在时间分辨率上达到了 50 ns 量级。

我们的方法具有可扩展性，可以应用到多离子体系中。利用 DMD 全息光束整形的方法可以生成一维或二维的点阵光斑，以实现一维或二维离子晶体的寻

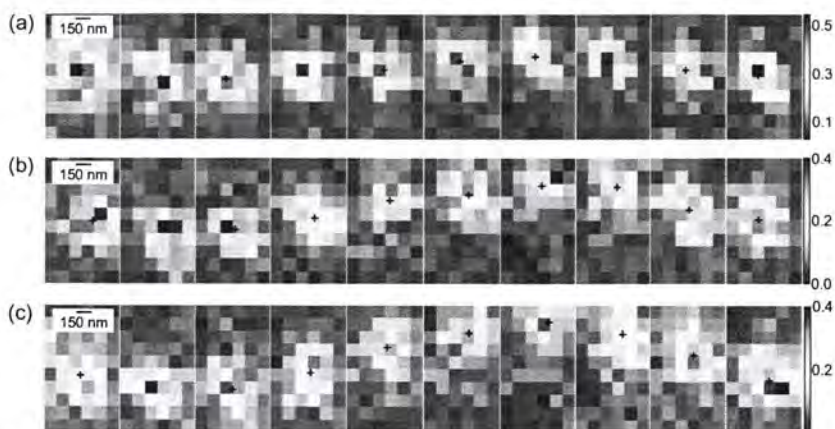


图 5.9 离子在不同驱动电压下的运动轨迹。(a, b, c, d) 驱动电压峰峰值分别为 $38 \mu\text{V}$, $82 \mu\text{V}$ 和 $122 \mu\text{V}$ 。

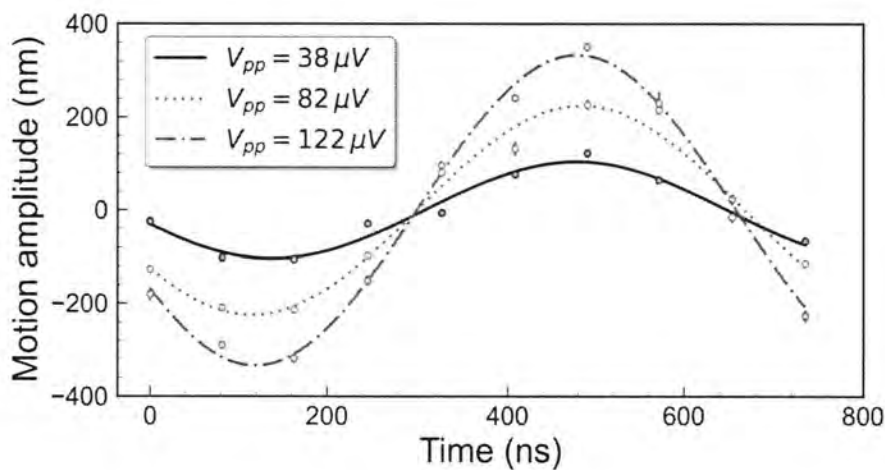


图 5.10 离子振荡的运动幅度。

址操作。通过产生点阵空心光，我们可以并行地对任意离子进行耗尽操作，测量多离子之间的运动关联。这种方法同样适用于冷原子体系，可以用来测量多体相互作用的动力学，测量原子的动量分布。

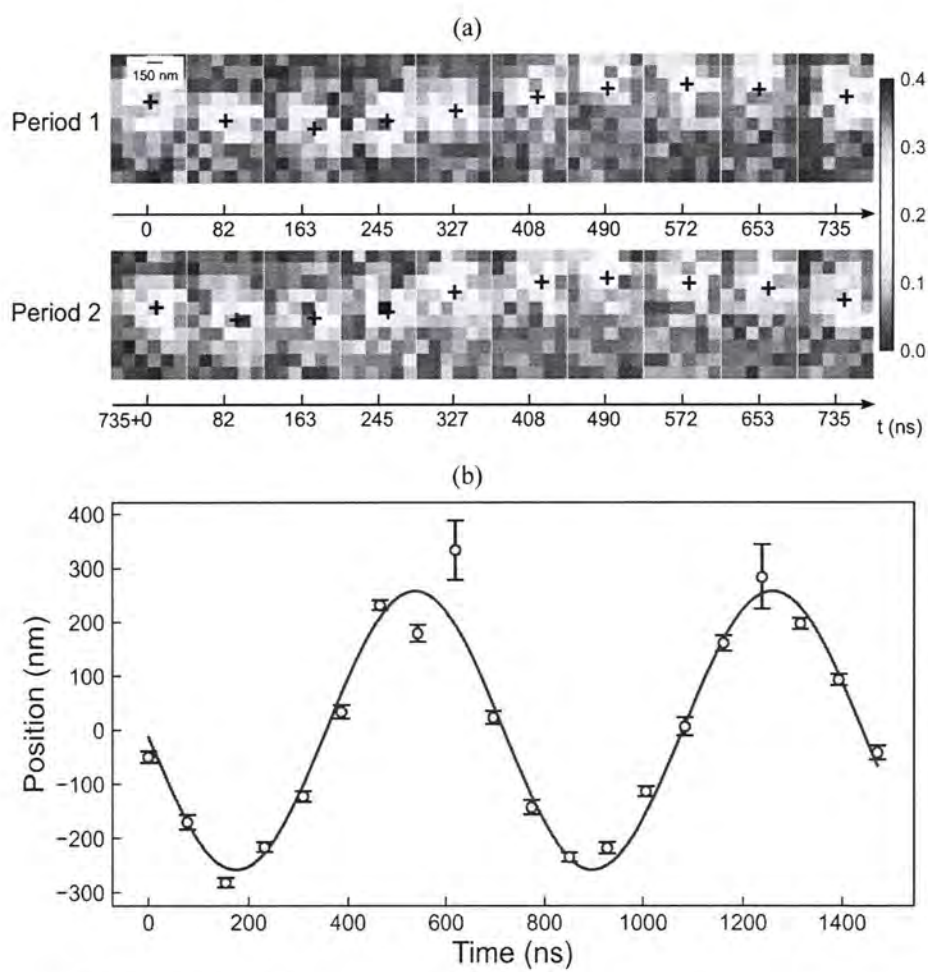


图 5.11 离子在两个周期内的运动轨迹。(a) 二维运动轨迹；(b) 拟合的中心位置。

第6章 基于贝叶斯优化的波前感知

对于光束整形来说,最重要的一步是测量并修正系统的像差。因为实际光场是理想光场与存在像差的系统的点扩散函数的卷积。当系统存在像差时,点扩散函数偏离艾里斑,会降低光束整形的质量。为了提高离子超分辨成像的分辨率,需要提高空心光的纯度,需要提高我们目前的波前感知算法。我们提出了一种新的波前感知算法,期望可以提高测量波前的速度和精度。

波前感知指的是测量目标波前与参考波前(通常是一个平面波)之间的差异。波前感知有着广泛的应用,例如在天文观测领域,扰动的大气湍流会在光路中引入相位畸变,降低成像质量。解决这个问题需要首先用波前感知技术测量不完美的波前,然后使用光束整形设备如变形镜来纠正像差^[189-190]。在高功率激光装置中,由于多级透镜或激光器本身模式的不完美带来的波前扭曲会使得原本聚焦在晶体上的光斑变得分散,降低了频率转换效率^[191-192],此时波前感知技术对于提高整个系统的转换效率至关重要。波前感知技术包含两类:使用波前感知器(如 Shack-Hartmann sensor)^[193]和基于图像的波前感知^[194-195]。前者使用特殊的光学仪器,试图从硬件上解决问题,而后者则从算法层面出发,试图从一幅或多幅图像中(通常是点扩散函数图像)计算出波前差,具有光路易校准,低成本,高灵活度的优点。文章我们将首先概述常用的基于图像的波前感知技术,包括 Gerchberg-Saxton (GS) 算法^[194,196]和它的其他演化版本,以及最近发展起来的基于深度学习的算法^[190,197-199],然后介绍我们提出的基于贝叶斯优化的波前感知算法^[200],并且模拟仿真了该算法的特性,在实验上验证了该算法。结果表明这种算法在具有准确度高和鲁棒性的优点,为主动光学提供了新的工具和思路。

6.1 基于图像的波前感知

基于图像的波前感知需要从傅里叶平面像的点扩散函数(PSF)的光强信息计算出物平面的相位信息,如图6.1所示。这里为了符号方便,用 x 和 u 分别表示物平面和像平面坐标。物平面和像平面的光场满足光学傅里叶变换:

$$F(u) = |F(u)| \exp(i\psi(u)) = \mathcal{F}\{f(x)\}, \quad (6.1)$$

$$f(x) = |f(x)| \exp(i\phi(u)) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u)\}. \quad (6.2)$$

先验信息包括物平面振幅的模 $|f(x)|$ 和像平面的模 $|F(u)|$,波前感知意味着从 PSF 求解 $\psi(u)$ 或 $\phi(u)$ 。这类算法在过去的几十年里已经被广泛研究,包括 Gerchberg-Saxton (GS) 算法, Error-Reduction 算法, Steepest-Descent Gradient 算

法, Input-Output 算法^[196]等。尽管这些算法在工程领域有广泛的应用,但是关于它们的数学理论仍然不清晰^[201],收敛的条件和速度等问题有待探究。最近随着人工智能的发展,有不少学者提出了基于深度学习的波前感知算法^[198,197]。通过采集大量的物平面和像平面的光场作为训练集,训练出复杂的神经网络模型。基于训练好的模型,当输入像平面的 PSF 数据时便可以得到物平面的相位。

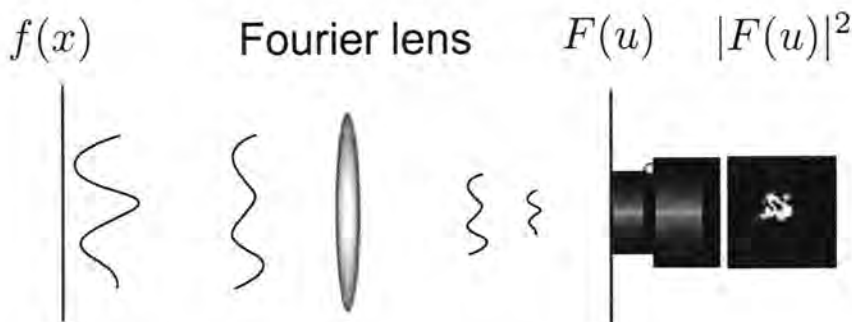


图 6.1 入射光场 E_{in} 和成像光场 E_{out} 之间的关系。

6.1.1 GS 算法

GS 算法是一种迭代算法,每一次迭代分为以下四步(图6.2):

1. 对物平面的估计光场 $g_k(x)$ 进行傅里叶变换;

$$g_k(x) = |f(x)| \exp(i\theta'_k(x)), \quad (6.3)$$

$$F\{g_k(x)\} = G_k(u) = |G_k(u)| \exp(i\phi_k(u)). \quad (6.4)$$

2. 将傅里叶变换结果中的振幅部分 $|G_k(u)|$ 替换为已知的像平面振幅分布 $|F(u)|$, 得到估计的像平面光场 $G'_k(u)$;

$$G_k(u) = |G_k(u)| \exp(i\phi_k(u)) \rightarrow G'_k(u) = |F(u)| \exp(i\phi_k(u)). \quad (6.5)$$

3. 对估计的像平面光场 $G'_k(u)$ 进行逆傅里叶变换;

$$F^{-1}\{G'_k(u)\} = g'_k(x) = |g'_k(x)| \exp(i\theta'_k(x)). \quad (6.6)$$

4. 将逆傅里叶变换结果中的振幅部分 $|g'_k(x)|$ 替换为已知的物平面振幅分布 $|f(x)|$, 得到估计的物平面光场 $g_{k+1}(x)$.

$$g'_k(x) = |g'_k(x)| \exp(i\theta'_k(x)) \rightarrow g_{k+1}(x) = |f(x)| \exp(i\theta'_k(x)) = |f(x)| \exp(i\theta_{k+1}(x)), \quad (6.7)$$

在 GS 算法, 我们实现测量了物平面和像平面的振幅绝对值 $|f(x)|, |F(u)|$, 作为迭代算法中的约束条件。事实上, 这种约束条件不一定是振幅值, 也可以被扩展

到其他约束条件。基于此思路, Fienup 于 1982 年提出了泛化版的 GS 算法, 即误差下降 (Error-Reduction) 算法。

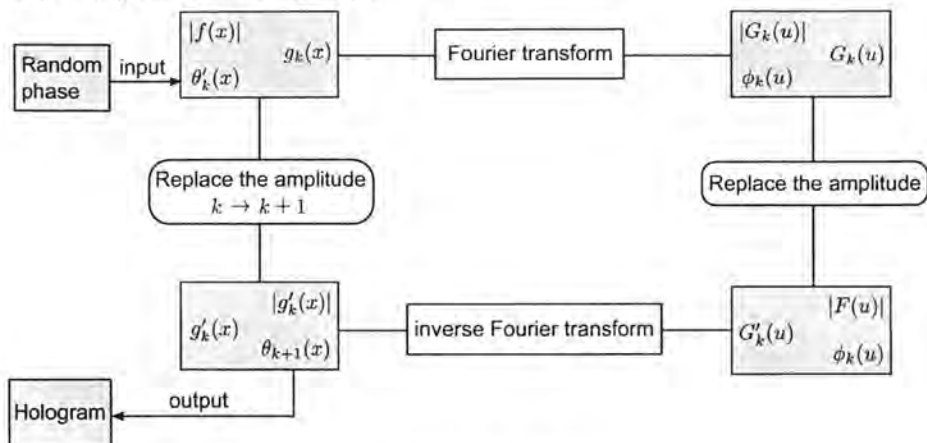


图 6.2 GS 算法步骤。

6.1.2 Error-Reduction 算法

对于 Error-Reduction 算法而言, 只需将 GS 算法中的第 2 步和第 4 步的操作换成满足约束条件的其他操作即可。举例来说, 如果要根据单幅 PSF 图像计算物平面相位, 只需要将第 4 步改为

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} g'_k(x) & x \notin \gamma \\ 0 & x \in \gamma \end{cases} \quad (6.8)$$

γ 表示 $g'_k(x)$ 不满足约束条件的点集。定义第 k 次迭代的误差 (傅里叶平面) 为

$$E_{Fk}^2 = N^{-2} \sum_u |G_k(u) - G'_k(u)|^2. \quad (6.9)$$

可以证明每次迭代能使得误差下降或者保持不变, 这也是 Error-Reduction 算法名字的来源。

Steepest-Descent Gradient 利用方程 6.9 定义的误差函数求梯度, 也可以达到收敛效果, 被证明和 Error-Reduction 算法等价^[196]。Error-Reduction 算法在开始阶段收敛速度较快, 但是随着迭代次数的增加, 收敛速度逐渐变慢。输入输出 (Input-Output) 算法针对这个问题, 改进了第四步, 提高了收敛速度。

6.1.3 Input-Output 算法

在 Error-Reduction 算法中, 每次迭代会由 $g_k(x)$ 生成一个新的物平面光场函数 $g_{k+1}(x)$, 可以将前者看作输入, 后者看作输出。输入和输出均满足约束条件。

而 Input-Output 算法的思想是, 每次迭代产生的输出的意义在于指明了优化的方向, 虽然最终会趋向于正确的解, 但每次都要满足约束条件, 限制了迭代的速度。该算法在 Error-Reduction 的基础上叠加一个 $\Delta g_k(x)$, 使得 $g_{k+1}(x)$ 的每一步更新虽然不满足约束条件, 但总是更快地朝着正确的方向去优化。Input-Output 算法的收敛速度通常比 Error-Reduction 算法要快。 $g_{k+1}(x)$ 的表达式通常有三种:

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} g_k(x), & x \notin \gamma \\ g_k(x) - \beta g'_k(x), & x \in \gamma \end{cases} \quad (\text{basic input-output algorithm}), \quad (6.10)$$

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} g'_k(x), & x \notin \gamma \\ g'_k(x) - \beta g'_k(x), & x \in \gamma \end{cases} \quad (\text{input-output algorithm}), \quad (6.11)$$

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} g'_k(x), & x \notin \gamma \\ g_k(x) - \beta g'_k(x), & x \in \gamma \end{cases} \quad (\text{hybrid input-output algorithm}). \quad (6.12)$$

6.1.4 基于深度学习的波前感知算法

基于神经网络模型的波前感知算法最早应用于天文观测领域中, 用来修正大气湍流引起的像差^[202-203]。近些年, 随着深度学习的发展, 神经网络模型由早期的单隐藏层、全连接模型网络发展为现在的深层、卷积神经网络, 并且和传统的迭代算法结合, 提高了收敛速度^[204]。这些模型一般以像平面的 PSF 图像作为输入数据的特征, 以泽尼克 (Zernike) 系数或物平面的相位作为输出, 首先采集上万幅的训练集, 优化出合适的模型参数, 然后输入位置的目标 PSF 图像, 得到物平面的相位信息 (图6.3)。



图 6.3 Adapted Inception v3 架构的卷积神经网络, 用来预测 Zernike 系数。数据从最左端输入, 从最优端流出。

6.2 基于贝叶斯优化的波前感知

6.2.1 贝叶斯优化

贝叶斯优化^[205-207] 是一种全局优化算法, 被广泛被用于计算机^[7], 机器控制^[208]、粒子物理^[209] 等领域。近年来随着深度学习的快速发展, 贝叶斯优化还用于神经网络模型的参数优化, 与网格优化和随机优化算法相比, 具有更高的效

率^[210-211]。

贝叶斯优化针对的优化问题可以表示为

$$\max_{z \in \mathcal{A}} F(z), \quad (6.13)$$

式中 $F(z)$ 是待优化的目标函数或黑箱函数 (black-box function)。 $z \in \mathbb{R}^d$ 是待优化的参数, d 是参数空间的维度。一般而言, 维度 d 不超过 20, 维度太高会导致搜索空间太大。 $\mathcal{A}$ 表示参数空间, 通常是一个超立方体 $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{R}^d : a_i \leq z_i \leq b_i\}$ 。贝叶斯优化的应用场景是: (1) 目标函数迭代成本较高, 计算耗费资源; (2) 目标函数表达形式未知; (3) 无法求 $F(z)$ 的梯度。贝叶斯优化的过程如下:

(1) 在指定的参数空间 $\mathcal{A}$ 中采样 $F(z)$, 得到一系列采样点 $(z_i, F(z_i))$, $i = 1, 2, \dots, k$;

(2) 由采样数据和高斯过程建立替代函数 $f(z)$ 模拟 $F(z)$, 并根据采集函数 $\alpha(z)$ 计算下一个待采样点坐标 z_{k+1} , 并采样出函数值 $F(z_{k+1})$;

(3) 根据之前和最新的采样点更新替代函数和采集函数;

(4) 迭代 (2) 和 (3), 直到找到全局最大值。

贝叶斯优化的关键是第二步, 下面将简要介绍高斯过程和采集函数。具体的数学推导可以参见文献^[207], 代码实现参见此处^[212]。

高斯过程

高斯过程 (Gaussian process) 是一组随机变量, 其任意子序列都满足联合高斯分布。高斯过程 $f(x)$ 的平均值函数和协方差函数分别定义为^[192]:

$$m(x) = E[f(x)],$$

$$k(x, x') = E[(f(x) - m(x)) \cdot (f(x') - m(x'))].$$

高斯过程记做: $f(x) \sim \mathcal{GP}(m(x), k(x, x'))$ 。举例来说明高斯过程, 假设给某病人每隔一小时 (6:00, 7:00, ..., 12:00) 测量一次心率, 则不同时刻的心率数据可以构成一条曲线。周一到周四都重复这样的测量过程, 可以绘出图6.4四条曲线。如果采样时间点是无限维的, 则图中的每条曲线代表一个无限维的采样过程, 相当于采样到了一个连续函数, 多次采样函数后便得到了函数的分布。这个无限元高斯分布就是一个高斯过程。

均值函数可以用常数函数, 或简单设为 0, 也可以根据 $f(x)$ 的先验信息设定其他函数。协方差函数又称核函数, 决定了一个高斯过程的波动情况, 用来衡量任意两个点之间的相关程度, 如图6.5所示。核函数应当满足几个要求: (1) 距离相近的点之间具有更大的正协方差, 因为两者的函数值更接近; (2) 协方差矩阵是对称半正定矩阵。常用的核函数包括高斯核函数和 Matern 核函数。高斯核函数定义为:

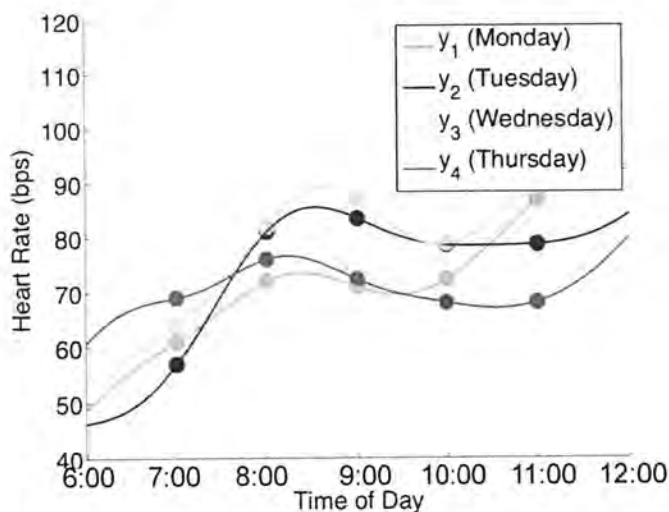


图 6.4 高斯过程举例。横轴表示一天中的时间点，纵轴表示心率。不同曲线表示不同天数测量的一天中的心率数据，符合联合高斯分布。

$$k(x, x') = \alpha_0 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|x_1 - x_2\|^2\right),$$

其中 α_0, σ 是参数。Matern 核函数定义为：

$$k(x, x') = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\sqrt{2\nu} \|x_1 - x_2\|\right)^\nu K_\nu\left(\sqrt{2\nu} \|x_1 - x_2\|\right),$$

其中 $\Gamma(\nu)$ 是伽马函数， K_ν 是贝塞尔函数， ν 是正参数。根据核函数可以计算协方差矩阵 K ：

$$K = \begin{bmatrix} k(x_1, x_1) & \dots & k(x_1, x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ k(x_n, x_1) & \dots & k(x_n, x_n) \end{bmatrix}.$$

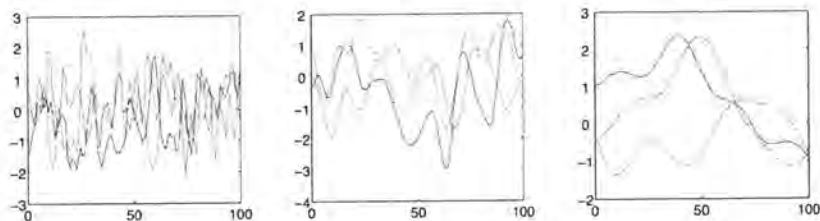


图 6.5 高斯核函数下的高斯过程^[207]。从左到右， α_0 依次减小，曲线变得越来越平滑。

高斯过程回归

高斯过程回归是指使用高斯过程对先验数据进行回归分析。假设已经得到一组样本数据 $x_{1:t} = [x_1, x_2, \dots, x_t]$ 和对应的函数值 $f(x_{1:t}) = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_t)]$ ，我们想预测新的数据点 x_{t+1} 处的函数值 $f(x_{t+1})$ 。由高斯过程可知， $f(x_{1:t+1})$ 服从 $t+1$ 维的正态分布：

$$\begin{bmatrix} f(x_{1:t}) \\ f(x_{t+1}) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ k^T(x_{1:t}, x_{t+1}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K & k(x_{1:t}, x_{t+1}) \\ k^T(x_{1:t}, x_{t+1}) & k(x_{t+1}, x_{t+1}) \end{bmatrix} \right),$$

协方差 $k(x_{1:t}, x_{t+1}), k(x_{t+1}, x_{t+1})$ 可由核函数计算出。在已知 $f(x_{1:t})$ 的情况下， $f(x_{t+1})$ 的条件概率分布服从一维正态分布：

$$f(x_{t+1})|f(x_{1:t}) \sim \mathcal{N}(\mu(x), \sigma^2(x)).$$

根据贝叶斯定理可以计算出均值和方差^[192]：

$$\begin{aligned} \mu(x) &= k^T K^{-1} f(x_{1:t}), \\ \sigma^2(x) &= k(x_{t+1}, x_{t+1}) - k^T K^{-1} k. \end{aligned}$$

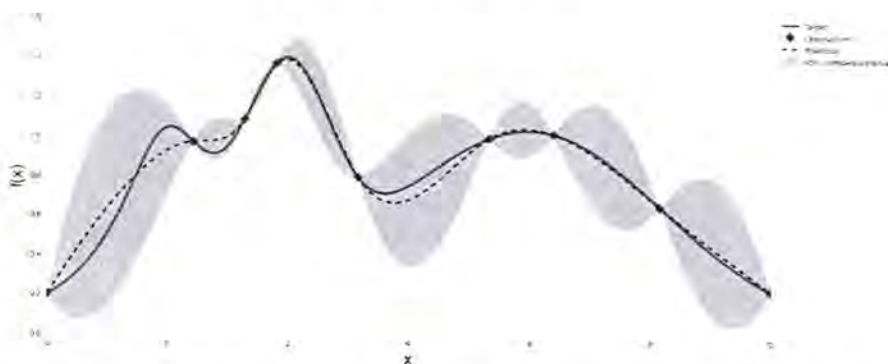


图 6.6 高斯过程回归^[212]。红色表示采样点，实线表示未知的真实函数，虚线表示根据高斯过程回归预测的函数分布，绿色区域表示 95% 的置信区间（2 倍标准差）。

采集函数

采集函数的作用是确定下一个应该采样的点。采集函数应该满足以下条件：

- (1) 在先验的采样点处采集函数值较小，因为已知的点没有探索价值；
- (2) 在相同均值的情况下，置信区间越大（图6.6），出现最大值的可能性越大，采集函数的值应该越大；
- (3) 相同置信区间宽度的情况下，均值越大，出现最大值的可能性越大，采集函数值越大。综合以上考虑，采集函数应该同时考虑均值和方差。均值体现的是已知信息，而方差体现探索价值。常用的采集函数包括期望改进

法^[213-214]、知识梯度法、熵搜索法和上置信边界法^[215]。下面仅介绍期望改进法的推导过程。

假设 $f_n^* = \max_{m \leq n} f(m)$ 是当前采样点的最大函数值, n 是目前采样的次数。假设我们进行了一次新的采样 x , 观察到了函数值 $f(x)$ 。如果 $f(x) \geq f_n^*$, 那么目前的最大值变成了 $f(x)$, 否则还是 f_n^* 。这次新采样的价值可以定义为 $[f(x) - f_n^*]^+$, 其中定义 $[a]^+ = \max(a, 0)$, 其为正值表示采样到了一个新的最大值。由于 $f(x)$ 是未知函数, 我们并不知道 $[f(x) - f_n^*]^+$ 的确切的值, 只能根据替代函数的条件概率分布计算期望值:

$$E I_n(x) = E \left[[f(x) - f_n^*]^+ | f(x_{1:n}) \right], \quad (6.14)$$

$f(x)|f(x_{1:n})$ 满足一维正态分布, 均值和方差已由前面公式给出。可以求出式6.14, 结果如下^[207]:

$$E I_n(x) = [\Delta_n(x)]^+ + \sigma^2(x) \psi \left(\frac{\Delta_n(x)}{\sigma(x)} \right) - |\Delta_n(x)| \Phi \left(\frac{\Delta_n(x)}{\sigma(x)} \right),$$

其中 $\Delta_n(x) = \mu(x) - f_n^*$, $\psi(x)$ 是标准正态分布的概率密度函数, $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数。图6.7展示了根据采集函数确定下一个采样点的过程。

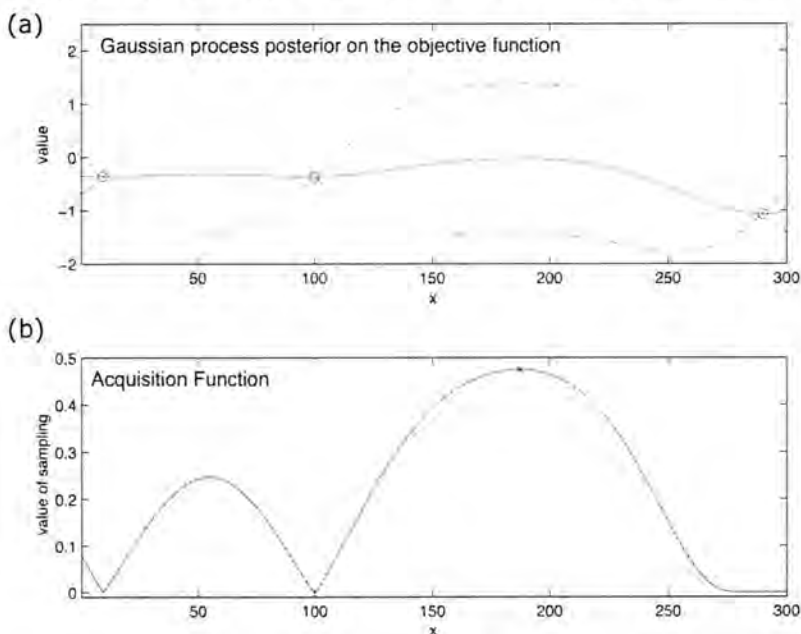


图 6.7 贝叶斯优化过程。(a) 采样过程。采样三个数据点, 实线是根据高斯过程回归计算的均值, 虚线是置信区间内函数分布的上下界。(b) 采集函数。取采集函数最大点对应的 x 为下一个采样点。

6.2.2 实验方法

我们提出并演示了基于贝叶斯优化的波前感知算法 (BOWFS: Bayesian Optimization Wavefront Sensing)^[200], 示意图6.8如下。

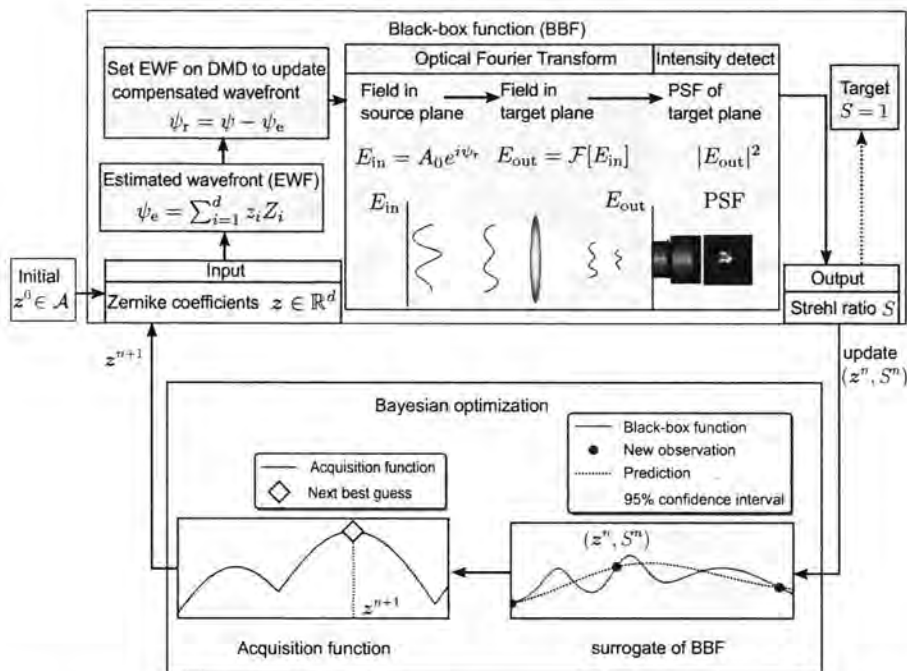


图 6.8 BOWFS 原理图。主要分为黑箱函数的构建（上半部分）和贝叶斯优化过程（下半部分）。

该算法可以被分成两部分：黑箱函数和贝叶斯优化过程。对黑箱函数来说，首先初始化 Zernike 系数为 z^0 作为黑箱函数的初始输入。由 Zernike 系数可以计算出张成的相位 ψ_e ，以此作为估计相位加载到相位调制器件（如 DMD, SLM 或变形镜）上，以此来补偿系统本身的原始相位差 ψ ，产生剩余波前差 $\psi_r = \psi - \psi_e$ 。剩余波前差构成的入射光场经过光学系统后成像在像面上。入射光场和像面光场满足傅里叶变换关系。用相机测量像面上的光强分布，进而可以测出斯特列尔比 S (Strehl ratio)，作为黑箱函数的输出。于是第 n 步迭代产生了一个新的数据点 (z^n, S^n) 。在贝叶斯优化过程中，起初，在参数空间中会随机采样一些数据点，目的是建立替代函数。在之后的迭代过程中，会用新的数据点更新替代函数的后验概率分布。采集函数也会被更新，用来产生下一个迭代点。实验中，我们采用 UCB 函数^[215]作为采集函数。当输出的 Strehl ratio 接近 1 时，根据 Maréchal 近似^[216]，剩余相位会接近 0，估计相位接近原始相位 $\psi_e \approx \psi$ 。

我们用 10 阶 zernike 参数和多项式来表示波前相位以减少参数的维度。其中

第0阶项 (piston 项) 和第1, 2阶项 (x, y 方向的 tilt) 项对成像质量没有实质性影响, 因此可以被忽略。此外, 两个 tilt 项可以用中心算法拟合出来^[217]。所以实际拟合的参数维度是 $d = 8$ 。光学系统被抽象成了黑箱函数 $F(\mathbf{z})$, 输入是一个8维矢量 $\mathbf{z}$, 输出是 Strehl ratio S , S 被定义为有像差的点扩散函数 (光强分布) 的最大值与衍射极限下的光强最大值之比。当 $S=1$ 时, 成像质量达到衍射极限。

6.2.3 模拟方法

模拟光学系统的黑箱函数如下图所示。后焦平面处的光场 $E_{\text{out}}(u, v)$ 是前焦平面光场 $E_{\text{in}}(x, y)$ 的光学傅里叶变换。前后焦平面处的相位图和光强分布由 128×128 像素的圆形区域采样得到。原始相位差的 Zernike 系数满足均匀分布。这里我们考虑了小像差 (均方根 0.16λ) 和大像差 (均方根 0.57λ) 分布的情况。像差未修正的情况下的斯特列尔比 S 分别是 0.28 和 0.05。

6.2.4 模拟结果

对于小像差情况, 在最初的 20 步中, BOWFS 算法随机采样以建立黑箱函数 $F(\mathbf{z})$ 的替代函数 $f(\mathbf{z})$, 在之后的 140 步中, 由采集函数决定下一个采样点。黑箱函数的输出斯特列尔比 S 随着迭代次数的增加总体上缓慢提升, 但是会有起伏, 这是由于贝叶斯优化过程中需要平衡探索和利用, 防止陷入局部最优。结果如下图所示。斯特列尔比从一开始的 0.28, 到第 46 步迭代提升到 0.95, 到第 160 步提升到 0.992。残余波前的均方根减小到 0.004λ 。我们模拟了 100 种不同的原始像差, 在每种像差实验中尝试了 10 个不同的种子以随机建立不同的初始替代函数。结果如下图所示。经过 160 步的迭代, 斯特列尔比提高到了 $98.97 \pm 2.16\%$, 残余波前差均方根减小到了 0.008λ , 一共消耗 3.64 ± 0.21 分钟。

对于大像差情况, 我们演示了多轮优化过程, 具有对初始值不敏感的特性。结果如下图所示。我们使用的 CPU 型号是 core i7-7700, 主频 3.6 GHz。3 轮优化过程完成后, 斯特列尔比提高到了 99.7%, 一共消耗 7 分钟。在第一轮优化中, 一开始随机采样 100 个点, 之后由贝叶斯优化过程迭代产生 150 个点。对比前期的随机采样和后期的贝叶斯优化过程产生的斯特列尔比数值可以发现, 后者平均值更大, 这表明, 贝叶斯优化过程确实比随机采样效率更高。在第二轮优化过程中, 我们根据前一轮优化结果调整了参数空间。每个参数的中心值设为前一次优化的最佳值, 参数的范围减小了一半。这次贝叶斯优化重新开始, 并没有继续上一次的结果, 避免落入局部最优解。这一次 BOWFS 找到了一个更优解, 斯特列尔比达到 99.7%。接着执行第三轮优化, 利用同样的原则优化参数空间, 这次每个参数的范围缩小到 0.2, 最终得到最优的斯特列尔比为 99.8%。在三轮优化过程中, 采样点的数目逐渐减少, 从 100 到 50 到最终的 10 个点, 因为随着

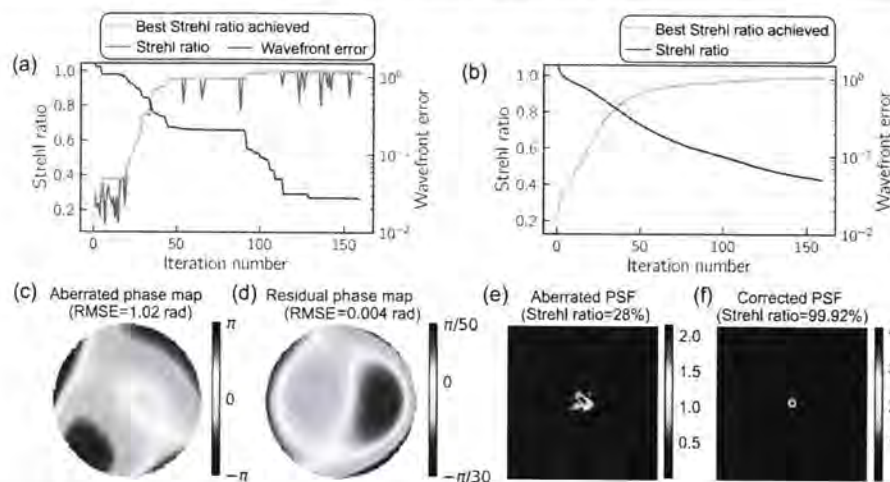


图 6.9 BOWFS 在小像差情况下的表现。(a) 成像质量随迭代次数变化曲线。青色：斯特列尔比，绿色：截止到目前迭代次数最好的斯特列尔比，蓝色：最好的波前差。(b) 斯特列尔比和残余波前差随迭代次数演化曲线（模拟了 100 种不同的初始像差）。填充面积表示标准差。(c,d) 初始像差图 (RMSE=1.02rad) 和初始的处理过的点扩散函数图（点扩散函数的均方根）。(e) 纠正后的残余相位图 (RMSE=0.027 rad)。(f) 纠正像差后的拉伸点扩散函数图。（斯特列尔比=99.92%）。

优化次数的增加，探索的必要在减小，算法越来越靠近最优解，因此将算力逐渐分配到贝叶斯优化过程而不是前期采样过程。我们模拟了 10 种不同的初始像差 (RMSE=3.6 ± 0.5)，斯特列尔比最终达到了 99.68 ± 0.19%，每一种情况从开始到完成整个过程消耗 6.36 ± 0.45 分钟。在实际系统中，考虑到相位图加载到 DMD 上的时间 t_{load} 、DMD 投影时间 t_{proj} 和焦面图像采集时间 t_{acq} ，整个过程需要额外增加 $t = t_{\text{load}} + t_{\text{proj}} + t_{\text{acq}} \approx (10 \text{ ms} + 1 \text{ ms} + 1 \text{ ms}) \times 460 = 5.5 \text{ s}$ 相对于 BOWFS 在计算机上的运行时间来说可以忽略。

在大像差情况下，我们也运行了 GS 算法对比。与 BOWFS 不同，GS 算法只需要一幅 PSF 图的数据，而不需要驱动 DMD。但是，GS 算法的一个缺点是容易陷入局部最优解，并且其收敛性对初始条件十分敏感。我们模拟了 100 种不同的初始像差（与 BOWFS 满足同样的分布和参数空间），每种初始值迭代了 3000 步，消耗 9.65 ± 0.8 分钟。只有两种情况下 GS 算法成功收敛到 94.27%。

6.3 实验

我们在实验上验证了 BOWFS 算法的有效性，实验装置图如图 6.11 所示。相位图被编码成计算全息图加载在 DMD 设备上。DMD 入射窗口的分辨率是 1024 × 768。实验中使用的开启面积是 440 × 440 像素，每个像素微镜的边长是 13.7 μm ×

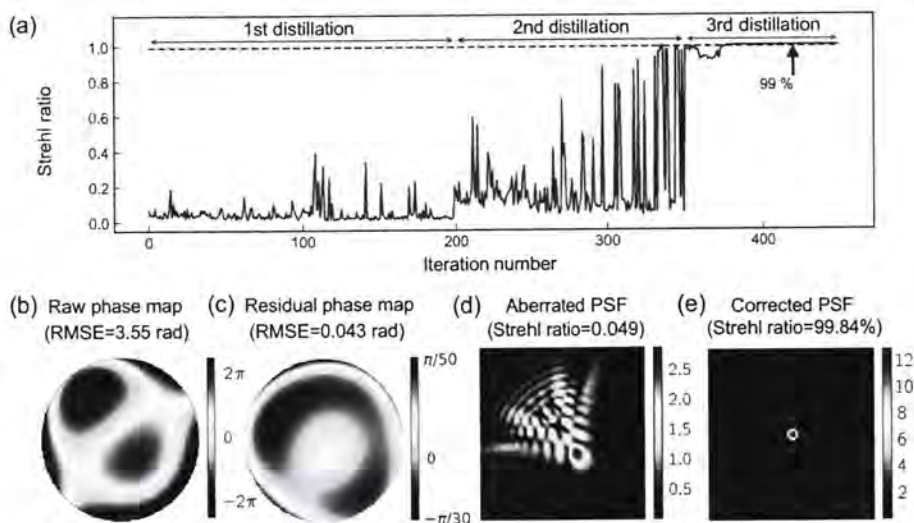


图 6.10 BOWFS 在大像差情况下的表现。(a) 三轮 BOWFS 优化结果。(b,c) 初始相位图和初始点扩散函数图。(d,e) 经过优化后的残余相位图和点扩散函数。

13.7 μm 。入瞳直径是 6 mm，透镜的有效焦距是 1300 mm。经过 DMD 衍射的光束中，我们用 +1 级衍射光进行相位调制。衍射极限的光斑直径为 195.6 μm 。CMOS 相机每个像素大小是 6.5 μm ，满足奈奎斯特采样定律。实验中使用的激光波长是 369.5 nm。

我们定义了归一化能量 E_{norm} 来作为 PSF 的评价函数。归一化能量定义如下：

$$E_{\text{norm}} = \sum_{\text{valid pixels}} I/I_{\text{max}} = E/I_{\text{max}}, \quad (6.15)$$

式中 I 是相机采集到的光强亮度值， I_{max} 是有效像素中的光强亮度最大值。有效像素指的是在信号窗口范围内，去除坏点的像素。 E_{norm} 反比于斯特列尔比。相比于斯特列尔比， E_{norm} 消除了光源功率抖动带来的影响，使得 BOWFS 的收敛性更加稳定。最终待优化的参数是 $-E_{\text{norm}}$ ，因为贝叶斯优化一般优化到最大值。实验装置如图 6.11 所示。激光经过准直扩束后入射到 DMD 芯片表面，经过加载估计相位的计算全息图案的衍射，滤出一级衍射光，经过透镜成像在后焦面上，被 CMOS 相机收集 (andor zyla4.2)，我们的相机具有 16 位的动态范围。实验结果如图所示。经过 BOWFS 算法修正像差后的系统的斯特列尔比提升到了 $88.22 \pm 1.74\%$ ，迭代了 97 步，整个过程花费 141 秒。从图 6.12(a) 中可以发现，BOWFS 早在第 37 步就已经搜索出一个相对准确的估计相位（斯特列尔比约为 86%），在第 60 步后收敛速度缓慢。在实际应用中，考虑到牺牲一点准确度的前提下较大程度地提升效率。

我们也尝试了全息光束整形的方法^[135]交叉验证了我们方法的准确性。在这

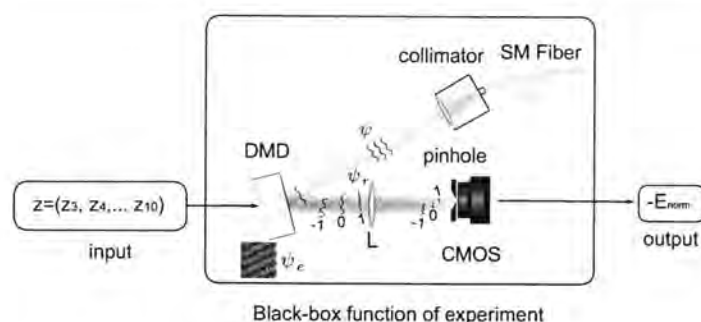


图 6.11 BOWFS 实验装置图。

种方法中，每次开启 DMD 的一小片参考区域和样本区域，经过这两个区域衍射后的细光束在像面处干涉，改变样本区域全息图案的相位，应用多步迭代法可以计算出该样本区域相对参考区域的相位。逐个扫描样本区域，即可测出所有区域相对参考区域的相位差。在我们的实验中，每个区域的大小选为 40×40 像素，为了测得准确的相位图，需要按顺序加载 $11 \times 11 \times 3 = 363$ 张全息图，然后解包测出的相位并插值使之光滑连续。为了提高相位图的精度，至少需要两次这样的测量过程，所以一共至少需要 726 张图像需要被加载。用这种方法得到的相位图和 BOWFS 的结果比较吻合（图 6.12(b)），斯特列尔比达到 $86.31 \pm 1.36\%$ ，稍低于 BOWFS 的结果。BOWFS 相比于全息光束整形的优点在于入射光的光强阈值降低了 2 个数量级。

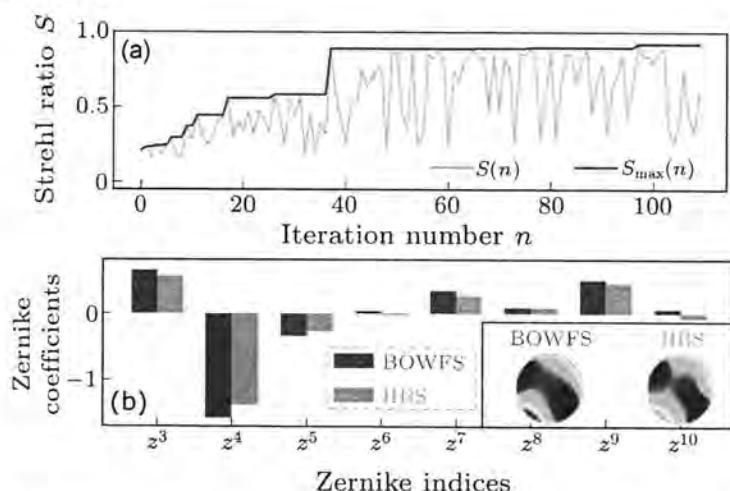


图 6.12 BOWFS 实验结果。(a) 蓝线：斯特列尔比；橘色：截止到目前的迭代次数最好的斯特列尔比，(b) 使用 BOWFS 和全息光束整形方法的 Zernike 系数对比。

6.4 讨论与总结

基于贝叶斯优化的波前感知算法适用于静态像差系统或像差变化缓慢的系统，比如在原子分子实验中消除物镜像差得到更聚焦的光束，提高量子态操纵的精度。另外，这种算法得益于较好的全局优化的特性，可以为其他算法如 GS 算法提供更准确的初始值，从而提高收敛速度和成功率。总结本章，我们从模拟和实验角度演示了基于贝叶斯优化的波前感知算法。结果表明，在小像差和大像差情况下，该算法都可以获得超过 99% 的准确度，并且对初始值具有鲁棒性。这种算法未来可能应用于光束整形中，以提高模式纯度，提高超分辨成像的空间分辨率。

第7章 总结与展望

7.1 总结

在整个博士期间，我搭建了一套离子阱系统和基于数字微镜设备的全息整形光路，在紫外光系统中将高斯光整形成高质量的拉盖尔高斯光和厄米高斯光束。

借鉴基态耗尽显微镜的思路，我们提出并演示了单离子的超分辨成像方案。用 0.1 NA 的物镜实现了 175 nm 的空间分辨率，与传统荧光显微镜相比，分辨率提升了 13 倍。研究者已经在金刚石色心、量子点和原子系统中演示了超越衍射极限的成像效果，我们的研究补齐了超分辨成像在离子阱领域的空白。

以往增加物镜数值孔径的方法，因为时空分辨率低无法拍摄离子的运动轨迹，仅仅通过拟合得到静态离子的位置。基于边带法、荧光关联法和外差探测法的运动研究虽然能测量出久期运动的频率，不能从时域上观察离子的轨迹。而我们演示的超分辨成像方法，具有很高的时空成像分辨率，基于这种方法，我们拍摄了单离子的二维久期运动轨迹，时间分辨率达到了 50 ns，轨迹重构精度达到 10 nm，丰富了离子运动探测的研究。

为了提高分辨率，我们提出了一种新的波前感知算法以提高光束整形的质量。这种基于贝叶斯估计的波前感知^[200]，以 Zernike 系数作为参数，以点扩散函数的 Strehl ratio 作为优化目标，通过模拟和实验验证了该算法在小像差和大像差情况下的收敛性和鲁棒性。与 GS 算法相比，该算法更易收敛，对初始相位不敏感。与深度学习算法相比，该算法耗费的训练资源更少，对计算硬件的要求更低。我们的方法为自适应光学补充了新工具和思路，未来可用于提高空心光的纯度，以提高超分辨成像分辨率。

7.2 展望

我们希望基于离子的超分辨成像工作可以起到抛砖引玉的作用。关于下一步工作，我们提出了一些构想。

首先，超分辨成像技术可以扩展到其他系统，包括一维的离子链、二维离子晶体、原子光晶格系统等，单个的空心光可以扩展为空心光阵列，用来研究不同原子之间的运动关联问题。需要重点解决紫外光生成高质量光斑阵列的问题，特别是临近光斑对剩余光强的串扰问题。解决的思路是增大光斑间距，并且使用更高质量的物镜去减小像差，还要仔细调节入射光的偏振，减小传播方向上的电场强度。该方案利用关联测量可以测的多离子或原子的运动频率，并且可以扩展到

光镊系统。

其次，若增加数值孔径至 0.6，并改善光束质量，分辨率可提高至几纳米量级，该技术可以用来对离子波包直接成像，不仅仅是单离子，甚至可以探测两个纠缠原子的波包形状。要实现这一点，需要克服目前方法中光泵浦带来的荧光散射引起的加热问题。解决的思路是通过相干过程让原子在耗尽光作用下实现态转移过程，例如使用电磁诱导透明 (EIT)，受激拉曼绝热通道 (STIRAP) 等方法，这样可以避免自发辐射过程，减小光子的反冲带来的加热。最后，由于空心光存在空间上的光强分布梯度，会在原子上施加一个光偶极力，这个力具有二次函数的形式，叠加离子阱的赝势力，会调制离子的声子频率，这对于研究可扩展的多比特门有一定的意义^[218]。

附录 A 离子的受激振荡模型

假设离子的久期运动频率为 ω_0 ，现在被一个脉冲外力驱动 $F \sin \omega t$ ，驱动频率是 ω ，驱动时间 t_D 。在不考虑耗散的情况，离子的运动方程是：

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = F \sin \omega t, \quad (\text{A.1})$$

初始条件为 $x = 0, \dot{x}|_{t=0} = 0$ 。在复数域 z 中解此方程更简单，

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = f \exp(i\omega t), \quad (\text{A.2})$$

式中 $f = F/m$ ， x 可以表示为 z 的虚部 $x = \text{Im}(z)$ 。上述方程的解由通解和特解组成，都满足指数的形式 $z_i = C_i \exp(\lambda_i t)$ 。

A.1 通解

通解满足二阶线性齐次微分方程：

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

本征方程为

$$\lambda^2 + \omega_0^2 \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \pm i\omega_0.$$

所以通解表示为 $z_1 = C_1 \exp(i\omega_0 t)$, $z_2 = C_2 \exp(-i\omega_0 t)$ 。

A.2 完整解

特解 $z = A \exp(i\omega t)$ ，代入方程 A.2，可以得到系数 $A = f/(\omega_0^2 - \omega^2)$ 。所以特解为 $z_3 = f/(\omega_0^2 - \omega^2) \exp(i\omega t)$ 。根据初始条件，可以推导出 C_1, C_2 。

完整解为

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{f}{2\omega_0(\omega_0 + \omega)} \exp(-i\omega t) - \frac{f}{2\omega_0(\omega_0 - \omega)} \exp(i\omega t) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \exp(i\omega t),$$

$$x = \text{Im}(z) = -\frac{f\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

速度表示为

$$v = \dot{x} = -\frac{f\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega_0 t + \frac{f\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t = \frac{2F\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}.$$

当停止驱动时，离子将会以本征频率 ω_0 振动，但是相位会保持连续。于是速度可以表示为：

$$\dot{x} = \frac{2F\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin \frac{(\omega - \omega_0)t_D}{2} \sin(\omega_0 t + \Phi), \quad (\text{A.3})$$

式中 $\Phi = \frac{(\omega - \omega_0)t_D}{2}$ 。在近共振条件下，速度振幅为 $A = \frac{Ft_D}{2m}$ ，与文献^[188]给出的结果一致。

A.3 相位稳定性条件

停止驱动后，离子将会以固定的频率和幅度振荡。为了保证离子在每一次结束驱动后都从同一位置开始振荡，需要保持A.3中的相位和幅度稳定。这就要求 $(\omega - \omega_0)t_D/2 \ll 1$ 。在我们的实验中， $t_D = 100 * 2\pi/\omega_0$ ， $\Delta\omega/\omega \approx 88 \text{ ppm}$ ， $(\omega - \omega_0)t_D/2 = 0.028 \ll 1$ ，满足相位要求。

参 考 文 献

- [1] TALBOT H. XLIV. experiments on light[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1834, 5(29): 321-334.
- [2] ZERNIKE F. Phase contrast, a new method for the microscopic observation of transparent objects[J]. Physica, 1942, 9(7): 686-698.
- [3] ZERNIKE F. How i discovered phase contrast[J]. Science, 1955, 121(3141): 345-349.
- [4] STOCKERT J C, BLAZQUEZ-CASTRO A. Fluorescence microscopy in life sciences[M]. BENTHAM SCIENCE PUBLISHERS, 2017.
- [5] KHATER I M, NABI I R, HAMARNEH G. A review of super-resolution single-molecule localization microscopy cluster analysis and quantification methods[J]. Patterns, 2020, 1(3): 100038.
- [6] GUSTAFSSON M G L. Surpassing the lateral resolution limit by a factor of two using structured illumination microscopy. SHORT COMMUNICATION[J]. Journal of Microscopy, 2000, 198(2): 82-87.
- [7] HELL S W, WICHMANN J. Breaking the diffraction resolution limit by stimulated emission: stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy[J]. Opt Lett, 1994, 19(11): 780-782.
- [8] HOFMANN M, EGDELING C, JAKOBS S, et al. Breaking the diffraction barrier in fluorescence microscopy at low light intensities by using reversibly photoswitchable proteins[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2005, 102(49): 17565-17569.
- [9] FORNASIERO E F, OPAZO F. Super-resolution imaging for cell biologists[J]. BioEssays, 2015, 37(4): 436-451.
- [10] SMITH K C A, OATLEY C W. The scanning electron microscope and its fields of application [J]. British Journal of Applied Physics, 1955, 6(11): 391-399.
- [11] MCMULLAN D. Scanning electron microscopy 1928-1965[J]. Scanning, 2006, 17(3): 175-185.
- [12] WIKTOR C, MELEDINA M, TURNER S, et al. Transmission electron microscopy on metal-organic frameworks – a review[J]. Journal of Materials Chemistry A, 2017, 5(29): 14969-14989.
- [13] KNAPEK E, DUBOCHET J. Beam damage to organic material is considerably reduced in cryo-electron microscopy[J]. Journal of Molecular Biology, 1980, 141(2): 147-161.
- [14] WANG H W, LEI J, SHI Y. Biological cryo-electron microscopy in china[J]. Protein Science, 2016, 26(1): 16-31.
- [15] YAN C, WAN R, BAI R, et al. Structure of a yeast activated spliceosome at 3.5 a resolution

- [J]. *Science*, 2016, 353(6302): 904-911.
- [16] PI X, ZHAO S, WANG W, et al. The pigment-protein network of a diatom photosystem II-light-harvesting antenna supercomplex[J]. *Science*, 2019, 365(6452): 4406.
- [17] ZHAO Y, ZHAO Z, WANG Y, et al. Single-cell RNA expression profiling of ACE2, the receptor of SARS-CoV-2[J]. 2020, 57(2): 248-256.
- [18] WRAPP D, WANG N, CORBETT K S, et al. Cryo-EM structure of the 2019-nCoV spike in the prefusion conformation[J]. *Science*, 2020, 367(6483): 1260-1263.
- [19] Resolving power of microscopes[EB/OL]. <https://www.sciencelearn.org.nz/images/526-resolving-power-of-microscopes>.
- [20] MURPHY D B, DAVIDSON M W. Fundamentals of light microscopy and electronic imaging [M]. John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- [21] PRITCHARD J D, ISAACS J A, SAFFMAN M. Long working distance objective lenses for single atom trapping and imaging[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2016, 87(7): 073107.
- [22] LI X, ZHOU F, KE M, et al. High-resolution ex vacuo objective for cold atom experiments [J]. *Appl Opt*, 2018, 57(26): 7584-7590.
- [23] GILL G W. Köhler illumination[M]. Springer New York, 2012: 309-323.
- [24] GOODMAN J W. Introduction to fourier optics[M]. 1968.
- [25] HELL S W, LINDEK S, CREMER C, et al. Confocal microscopy with an increased detection aperture: type-b 4pi confocal microscopy[J]. *Optics Letters*, 1994, 19(3): 222.
- [26] HEINZELMANN H, POHL D W. Scanning near-field optical microscopy[J]. *Applied Physics A Solids and Surfaces*, 1994, 59(2): 89-101.
- [27] AN S, DAN D, HUA YU X, et al. Progress and prospect of research on single-molecule localization super-resolution microscopy(invited review)[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2020, 49(11): 0918001.
- [28] SIGAL Y M, ZHOU R, ZHUANG X. Visualizing and discovering cellular structures with super-resolution microscopy[J]. *Science*, 2018, 361(6405): 880-887.
- [29] BETZIG E, PATTERSON G H, SOUGRAT R, et al. Imaging intracellular fluorescent proteins at nanometer resolution[J]. *Science*, 2006, 313(5793): 1642-1645.
- [30] HESS S T, GIRIRAJAN T P, MASON M D. Ultra-high resolution imaging by fluorescence photoactivation localization microscopy[J]. *Biophysical Journal*, 2006, 91(11): 4258-4272.
- [31] RUST M J, BATES M, ZHUANG X. Sub-diffraction-limit imaging by stochastic optical reconstruction microscopy (STORM)[J]. *Nature Methods*, 2006, 3(10): 793-796.
- [32] WESTPHAL V, HELL S W. Nanoscale resolution in the focal plane of an optical microscope [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(14): 143903.
- [33] HELL S W, KROUG M. Ground-state-depletion fluorescence microscopy: A concept for

- breaking the diffraction resolution limit[J]. *Applied Physics B Lasers and Optics*, 1995, 60 (5): 495-497.
- [34] The concept of superresolution with sted microscopy[EB/OL]. <http://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/tutorials/superresolution/stedconcept/indexflash.html>.
- [35] MAURER P C, MAZE J R, STANWIX P L, et al. Far-field optical imaging and manipulation of individual spins with nanoscale resolution[J]. *Nature Physics*, 2010, 6(11): 912-918.
- [36] Li S, Chen X D, Zhao B W, et al. Optical far-field super-resolution microscopy using nitrogen vacancy center ensemble in bulk diamond[J]. *Applied Physics Letters*, 2016, 109(11): 111107.
- [37] STORTERBOOM J, BARBIERO M, CASTELLETTO S, et al. Ground-state depletion nanoscopy of nitrogen-vacancy centres in nanodiamonds[J]. *Nanoscale Research Letters*, 2021, 16(1): 44.
- [38] WILDANGER D, PATTON B R, SCHILL H, et al. Solid immersion facilitates fluorescence microscopy with nanometer resolution and sub-ångström emitter localization[J]. *Advanced Materials (Deerfield Beach, Fla.)*, 2012, 24: OP309 - OP313.
- [39] KALDEWEY T, KUHLMANN A V, VALENTIN S R, et al. Far-field nanoscopy on a semiconductor quantum dot via a rapid-adiabatic-passage-based switch[J]. *Nature Photonics*, 2018, 12(2): 68-72.
- [40] MCDONALD M, TRISNADI J, YAO K X, et al. Superresolution microscopy of cold atoms in an optical lattice[J]. *Physical Review X*, 2019, 9(2): 021001.
- [41] AGARWAL G S, KAPALE K T. Subwavelength atom localization via coherent population trapping[J]. *Journal of Physics B-Atomic Molecular and Optical Physics*, 2006, 39(17): 3437-3446.
- [42] MILES J A, SIMMONS Z J, YAVUZ D D. Subwavelength localization of atomic excitation using electromagnetically induced transparency[J]. *Phys. Rev. X*, 2013, 3: 031014.
- [43] GORSHKOV A V, JIANG L, GREINER M, et al. Coherent quantum optical control with subwavelength resolution[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(9): 093005.
- [44] MILES J A, DAS D, SIMMONS Z J, et al. Localization of atomic excitation beyond the diffraction limit using electromagnetically induced transparency[J]. *Physical Review A*, 2015, 92(3): 033838.
- [45] WANG Y, SUBHANKAR S, BIENIAS P, et al. Dark state optical lattice with a subwavelength spatial structure[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(8): 083601.
- [46] SUBHANKAR S, WANG Y, TSUI T C, et al. Nanoscale atomic density microscopy[J]. *Physical Review X*, 2019, 9(2): 021002.
- [47] LI H, SAUTENKOV V A, KASH M M, et al. Optical imaging beyond the diffraction limit

- via dark states[J]. Physical Review A, 2008, 78(1): 013803.
- [48] YAVUZ D D, SIMMONS Z J. Optical imaging with nanoscale resolution using optical nonlinearities and spatiotemporal modulation[J]. Physical Review A, 2012, 86(1): 013817.
- [49] WANG P, LUAN C Y, QIAO M, et al. Single ion qubit with estimated coherence time exceeding one hour[J]. Nature Communications, 2021, 12(1): 223.
- [50] HARTY T, ALLCOCK D, BALLANCE C, et al. High-fidelity preparation, gates, memory, and readout of a trapped-ion quantum bit[J]. Physical Review Letters, 2014, 113(22): 220501.
- [51] FAN M, HOLLIMAN C A, WANG A L, et al. Laser cooling of radium ions[J]. Physical Review Letters, 2019, 122: 223001.
- [52] MONROE C, MEEKHOF D M, KING B E, et al. Resolved-sideband raman cooling of a bound atom to the 3d zero-point energy[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(22): 4011-4014.
- [53] ESCHNER J, MORIGI G, SCHMIDT-KALER F, et al. Laser cooling of trapped ions[J]. Journal of the Optical Society of America B, 2003, 20(5): 1003.
- [54] WATANABE T, NOMURA S, TOYODA K, et al. Sideband excitation of trapped ions by rapid adiabatic passage for manipulation of motional states[J]. Physical Review A, 2011, 84(3): 033412.
- [55] CHEN J S, WRIGHT K, PISENTI N C, et al. Efficient-sideband-cooling protocol for long trapped-ion chains[J]. Physical Review A, 2020, 102(4): 043110.
- [56] Blüms V, Piotrowski M, Hussain M I, et al. A single-atom 3D sub-attoneutron force sensor [J]. Science Advances, 2018, 4(3): 4453.
- [57] WONG-CAMPOS J D, JOHNSON K G, NEYENHUIS B, et al. High-resolution adaptive imaging of a single atom[J]. Nature Photonics, 2016, 10(9): 606-610.
- [58] MAIWALD R, GOLLA A, FISCHER M, et al. Collecting more than half the fluorescence photons from a single ion[J]. Physical Review A, 2012, 86(4): 043431.
- [59] EGL A, ARAPOGLOU I, HÖCKER M, et al. Application of the continuous stern-gerlach effect for laser spectroscopy of the $^{40}\text{Ar}^{13+}$ fine structure in a penning trap[J]. Physical Review Letters, 2019, 123: 123001.
- [60] CERCHIARI G, ARANEDA G, PODHORA L, et al. Motion analysis of a trapped ion chain by single photon self-interference[J]. Applied Physics Letters, 2021, 119(2): 024003.
- [61] LEIBFRIED D, BLATT R, MONROE C, et al. Quantum dynamics of single trapped ions[J]. Reviews of Modern Physics, 2003, 75(1): 281-324.
- [62] SRIVATHSAN B, FISCHER M, ALBER L, et al. Measuring the temperature and heating rate of a single ion by imaging[J]. New Journal of Physics, 2019, 21(11): 113014.
- [63] NORTON B G, STREED E W, PETRASJUNAS M J, et al. Millikelvin spatial thermometry

- of trapped ions[J]. New Journal of Physics, 2011, 13(11): 113022.
- [64] JECHOW A, STREED E W, NORTON B G, et al. Wavelength-scale imaging of trapped ions using a phase fresnel lens[J]. Optics Letters, 2011, 36(8): 1371.
- [65] DEHMELT H. Radiofrequency spectroscopy of stored ions i: Storage[J]. 1968: 53-72.
- [66] CIRAC J I, ZOLLER P. Quantum computations with cold trapped ions[J]. Physical Review Letters, 1995, 74(20): 4091-4094.
- [67] MONROE C, MEEKHOF D M, KING B E, et al. Demonstration of a fundamental quantum logic gate[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(25): 4714-4717.
- [68] HAGER J W. A new linear ion trap mass spectrometer[J]. Rapid Communications in Mass Spectrometry, 2002, 16(6): 512-526.
- [69] SCHWARTZ J C, SENKO M W, SYKA J E P. A two-dimensional quadrupole ion trap mass spectrometer[J]. Journal of the American Society for Mass Spectrometry, 2002, 13(6): 659-669.
- [70] KLUGE H J, BOLLEN G. Ion traps — recent applications and developments[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms, 1992, 70(14): 473-481.
- [71] DIDDAMS S A. An optical clock based on a single trapped 199hg^+ ion[J]. Science, 2001, 293(5531): 825-828.
- [72] MARGOLIS H S. Hertz-level measurement of the optical clock frequency in a single 88sr^+ ion[J]. Science, 2004, 306(5700): 1355-1358.
- [73] MATSUBARA K, HAYASAKA K, LI Y, et al. Frequency measurement of the optical clock transition of 40ca^+ ions with an uncertainty of 10^{-14} level[J]. Applied Physics Express, 2008, 1: 067011.
- [74] WEINSTOCK R. On a fallacious proof of earnshaw's theorem[J]. American Journal of Physics, 1976, 44(4): 392-393.
- [75] MCLOUGHLIN J. Development and implementation of an yb^+ ion trap experiment towards coherent manipulation and entanglement[D]. University of Sussex, 2012.
- [76] WANG X, SORENSEN A, MOLMER K. Multibit gates for quantum computing[J]. Physical Review Letters, 2001, 86(17): 3907-10.
- [77] SØRENSEN A, MØLMER K. Entanglement and quantum computation with ions in thermal motion[J]. Physical Review A, 2000, 62(2): 022311.
- [78] KHROMOVA A, PILTZ C, SCHARFENBERGER B, et al. Designer spin pseudomolecule implemented with trapped ions in a magnetic gradient[J]. Physical Review Letters, 2012, 108(22): 220502.
- [79] BENTLEY C D B, CARVALHO A R R, KIELPINSKI D, et al. Fast gates for ion traps by

- splitting laser pulses[J]. *New Journal of Physics*, 2013, 15: 043006.
- [80] DEBNATH S. A programmable five qubit quantum computer using trapped atomic ions[J]. *Nature*, 2016, 536(7614): 63-66.
- [81] BERKELAND D J, MILLER J D, BERGQUIST J C, et al. Minimization of ion micromotion in a paul trap[J]. *Journal of Applied Physics*, 1998, 83(10): 5025-5033.
- [82] Deslauriers L. Cooling and heating of the quantum motion of trapped cadmium(+) ions[D]. University of Michigan, 2006.
- [83] MANNING T A. Quantum information processing with trapped ion chains[D]. University of Maryland, 2014.
- [84] SMIRNITSKAYA G V, BABERTSYAN R P. Kinetics of the positive ions in a penning discharge[J]. *Zh. Tekh. Fiz.*, 36: 1217-25(July 1966), 1966.
- [85] LEE P J. Quantum information processing with two trapped cadmium ions[D]. University of Michigan, 2006.
- [86] OLMSCHENK S, YOUNGE K C, MOEHRING D L, et al. Manipulation and detection of a trapped Yb+ hyperfine qubit[J]. *Physical Review A*, 2007, 76(5): 052314.
- [87] OLMSCHENK S M. Cooling and heating of the quantum motion of trapped Cd ions[D]. University of Michigan, 2009.
- [88] DESLAURIERS L, ACTON M, BLINOV B B, et al. Efficient photoionization loading of trapped ions with ultrafast pulses[J]. *Physical Review A*, 2006, 74(6): 063421.
- [89] DENG K, SUN Y L, YUAN W H, et al. A modified model of helical resonator with predictable loaded resonant frequency and q-factor[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2014, 85(10): 104706.
- [90] MACALPINE W W, SCHILDKNECHT R O. Coaxial resonators with helical inner conductor [J]. *Proceedings of the IRE*, 1959, 47(12): 2099-2105.
- [91] AI M Z, LI S, HOU Z, et al. Experimental realization of nonadiabatic holonomic single-qubit quantum gates with optimal control in a trapped ion[J]. *Physical Review Applied*, 2020, 14: 054062.
- [92] AI M Z, DING Y, BAN Y, et al. Experimentally realizing efficient quantum control with reinforcement learning[J]. *arXiv*, 2021.
- [93] HU C K, SANTOS A C, CUI J M, et al. Adiabatic quantum dynamics under decoherence in a controllable trapped-ion setup[J]. *Physical Review A*, 2019, 99: 062320.
- [94] ONODA Y, SUGIYAMA K, IKEDA M, et al. Loading rate of Yb+ loaded through photoionization in radiofrequency ion trap[J]. *Applied Physics B*, 2011, 105(4): 729-740.
- [95] STENHOLM. Laser cooling and trapping[J]. *European Journal of Physics*, 1988, 9(4): 242-249.

- [96] WINELAND D J, DRULLINGER R E, WALLS F L. Radiation-pressure cooling of bound resonant absorbers[J]. *Physical Review Letters*, 1978, 40(25): 1639-1642.
- [97] MYERSON A H, SZWER D J, WEBSTER S C, et al. High-fidelity readout of trapped-ion qubits[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100: 200502.
- [98] ZHUKAS L A, SVIHRA P, NOMEROTSKI A, et al. High-fidelity simultaneous detection of a trapped-ion qubit register[J]. *Physical Review A*, 2021, 103: 062614.
- [99] HUME D B, CHOU C W, LEIBRANDT D R, et al. Trapped-ion state detection through coherent motion[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107: 243902.
- [100] TODARO S, VERMA V, MCCORMICK K, et al. State readout of a trapped ion qubit using a trap-integrated superconducting photon detector[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 126(1): 010501.
- [101] DING Z H, CUI J M, HUANG Y F, et al. Fast high-fidelity readout of a single trapped-ion qubit via machine-learning methods[J]. *Physical Review Applied*, 2019, 12: 014038.
- [102] SEIF A, LANDSMAN K A, LINKE N M, et al. Machine learning assisted readout of trapped-ion qubits[J]. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2018, 51(17): 174006.
- [103] ALDOSSARY O. Bottle atom trapping configuration by optical dipole forces[J]. *Journal of King Saud University - Science*, 2014, 26(1): 29-35.
- [104] XU P, HE X, WANG J, et al. Trapping a single atom in a blue detuned optical bottle beam trap[J]. *Optics Letters*, 2010, 35(13): 2164.
- [105] SHENG D, ZHANG J, OROZCO L A. Rb atoms in a blue-detuned dipole trap: Coherence and ground-state differential ac stark shift[J]. *Physical Review A*, 2013, 87(6): 063412.
- [106] PUPPE T, SCHUSTER I, GROTHE A, et al. Trapping and observing single atoms in a blue-detuned intracavity dipole trap[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(1): 013002.
- [107] PIOTROWICZ M J, LICHTMAN M, MALLER K, et al. Two-dimensional lattice of blue-detuned atom traps using a projected gaussian beam array[J]. *Physical Review A*, 2013, 88(1).
- [108] STORTERBOOM J, BARBIERO M, CASTELLETTO S, et al. Ground-state depletion nanoscopy of nitrogen-vacancy centres in nanodiamonds[J]. *Nanoscale Res Lett*, 2021, 16(1): 44.
- [109] RAČIUKATIS G. Laser processing by using diffractive optical laser beam shaping technique [J]. *Journal of Laser Micro/Nanoengineering*, 2011, 6(1): 37-43.
- [110] KATZ S, KAPLAN N, GROSSINGER I. Using diffractive optical elements[J]. *Optik & Photonik*, 2018, 13(4): 83-86.
- [111] QU W, GU H, TAN Q, et al. Precise design of two-dimensional diffractive optical elements

- for beam shaping[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(21): 6521.
- [112] MIKLYAEV Y V, IMGRUNT W, PAVELYEV V S, et al. Novel continuously shaped diffractive optical elements enable high efficiency beam shaping[C]//*Optical Microlithography XXIII*. SPIE, 2010.
- [113] TAN X, GU B Y, YANG G Z, et al. Diffractive phase elements for beam shaping: a new design method[J]. *Applied Optics*, 1995, 34(8): 1314.
- [114] BEIJERSBERGEN M, ALLEN L, VAN DER VEEN H, et al. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum[J]. *Optics Communications*, 1993, 96(1-3): 123-132.
- [115] PADGETT M, ARLT J, SIMPSON N, et al. An experiment to observe the intensity and phase structure of laguerre-gaussian laser modes[J]. *American Journal of Physics*, 1996, 64(1): 77-82.
- [116] PETROV D V, CANAL F, TORNER L. A simple method to generate optical beams with a screw phase dislocation[J]. *Optics Communications*, 1997, 143(4-6): 265-267.
- [117] ZHANG Y, WU R, LIU P, et al. Double freeform surfaces design for laser beam shaping with monge-ampère equation method[J]. *Optics Communications*, 2014, 331: 297-305.
- [118] KNOTH R, HELLMANN C, WYROWSKI F. How the design concepts of high-NA beam splitters and diffusers, as well as of beam shapers by freeform surfaces are related (conference presentation)[C]//*Components and Packaging for Laser Systems V*. SPIE, 2019.
- [119] YANG L, BADAR I, HELLMANN C, et al. Light shaping by freeform surface from a physical-optics point of view[J]. *Optics Express*, 2020, 28(11): 16202.
- [120] Kukhtarev N V, Kukhtareva T V, Glebov L B, et al. Laser beam shaping by holographic optical elements[C]//Klimusheva G V, Iljin A G, Kostyukevych S A. *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series: volume 5257 Ninth International Conference on Nonlinear Optics of Liquid and Photorefractive Crystals*. 2003: 152-162.
- [121] CHEN L, ZHANG W, LU Q, et al. Making and identifying optical superpositions of high orbital angular momenta[J]. *Physical Review A*, 2013, 88(5): 053831.
- [122] SZATKOWSKI M, MASAJADA J, AUGUSTYNIAK I, et al. Generation of composite vortex beams by independent spatial light modulator pixel addressing[J]. *Optics Communications*, 2020, 463: 125341.
- [123] FRANKE-ARNOLD S, LEACH J, PADGETT M J, et al. Optical ferris wheel for ultracold atoms[J]. *Optics Express*, 2007, 15(14): 8619.
- [124] STUART D, KUHN A. Single-atom trapping and transport in dmd-controlled optical tweezers[J]. *New Journal of Physics*, 2018, 20(2): 023013.
- [125] SCHMIEGELOW C T, SCHULZ J, KAUFMANN H, et al. Transfer of optical orbital angular

- momentum to a bound electron[J]. *Nature Communication*, 2016, 7: 12998.
- [126] EBADI S, WANG T T, LEVINE H, et al. Quantum phases of matter on a 256-atom programmable quantum simulator[J]. *Nature*, 2021, 595(7866): 227-232.
- [127] HU X, ZHAO Q, YU P, et al. Dynamic shaping of orbital-angular-momentum beams with an optimized lee method[C]//Optical Manipulation Conference. SPIE, 2018.
- [128] MEYRATH T P, SCHRECK F, HANSSEN J L, et al. A high frequency optical trap for atoms using hermite-gaussian beams[J]. *Optics Express*, 2005, 13(8): 2843.
- [129] KAZEMI S H, VEISI M, MAHMOUDI M. Atom localization using laguerre-gaussian beams [J]. *Journal of Optics*, 2019, 21(2): 025401.
- [130] BAKR W S, GILLEN J I, PENG A, et al. A quantum gas microscope for detecting single atoms in a hubbard-regime optical lattice[J]. *Nature*, 2009, 462(7269): 74-77.
- [131] HALLER E, HUDSON J, KELLY A, et al. Single-atom imaging of fermions in a quantum-gas microscope[J]. *Nature Physics*, 2015, 11(9): 738-742.
- [132] YAMAMOTO R, KOBAYASHI J, KUNO T, et al. An ytterbium quantum gas microscope with narrow-line laser cooling[J]. *New Journal of Physics*, 2016, 18(2): 023016.
- [133] YAMAMOTO R, KOBAYASHI J, KATO K, et al. Site-resolved imaging of single atoms with a faraday quantum gas microscope[J]. *Physical Review A*, 2017, 96: 033610.
- [134] PICARD L R B, MARK M J, FERLAINO F, et al. Deep learning-assisted classification of site-resolved quantum gas microscope images[J]. *Measurement Science and Technology*, 2019, 31(2): 025201.
- [135] ZUPANCIC P, PREISS P M, MA R, et al. Ultra-precise holographic beam shaping for microscopic quantum control[J]. *Opt. Express*, 2016, 24(13): 13881-13893.
- [136] ZUPANCIC P P J. Dynamic holography and beamshaping using digital micromirror devices [D]. Ludwig-Maximilians-Universitat Munchen, 2013.
- [137] BEUGNON J, TUCHENDLER C, MARION H, et al. Two-dimensional transport and transfer of a single atomic qubit in optical tweezers[J]. *Nature Physics*, 2007, 3(10): 696-699.
- [138] MULDOON C, BRANDT L, DONG J, et al. Control and manipulation of cold atoms in optical tweezers[J]. *New Journal of Physics*, 2012, 14(7): 073051.
- [139] COOPER A, COVEY J P, MADJAROV I S, et al. Alkaline-earth atoms in optical tweezers [J]. *Phys. Rev. X*, 2018, 8: 041055.
- [140] BARREDO D, LIENHARD V, DE LÉSÉLEUC S, et al. Synthetic three-dimensional atomic structures assembled atom by atom[J]. *Nature*, 2018, 561(7721): 79-82.
- [141] NÄGERL H C, LEIBFRIED D, ROHDE H, et al. Laser addressing of individual ions in a linear ion trap[J]. *Physical Review A*, 1999, 60(1): 145-148.
- [142] PERNTHALER L F. Single ion addressing of up to 50 ions[D]. University of Innsbruck,

- 2019.
- [143] POGORELOV I, FELDKER T, MARCINIAK C D, et al. Compact ion-trap quantum computing demonstrator[J]. *PRX Quantum*, 2021, 2: 020343.
- [144] HE R, CUI J M, LI R R, et al. An ion trap apparatus with high optical access in multiple directions[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2021, 92(7): 073201.
- [145] SHIH C Y, MOTLAKUNTA S, KOTIBHASKAR N, et al. Reprogrammable and high-precision holographic optical addressing of trapped ions for scalable quantum control[J]. *npj Quantum Information*, 2021, 7(1): 57.
- [146] KULIN S, AUBIN S, CHRISTE S, et al. A single hollow-beam optical trap for cold atoms [J]. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2001, 3(6): 353-357.
- [147] OEMRAWSINGH S S R, VAN HOUWELINGEN J A W, ELIEL E R, et al. Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths[J]. *Applied Optics*, 2004, 43 (3): 688.
- [148] KOTLYAR V V, KOVALEV A A, SKIDANOV R V, et al. Simple optical vortices formed by a spiral phase plate[J]. *Journal of Optical Technology*, 2007, 74(10): 686.
- [149] BEIJERSBERGEN M, COERWINKEL R, KRISTENSEN M, et al. Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate[J]. *Optics Communications*, 1994, 112(5-6): 321-327.
- [150] CAÑO-GARCÍA M, QUINTANA X, OTÓN J M, et al. Dynamic multilevel spiral phase plate generator[J]. *Scientific Reports*, 2018, 8(1): 15804.
- [151] DUARTE M F, DAVENPORT M A, TAKHAR D, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling[J]. *Ieee Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 83-91.
- [152] SUN B, EDGAR M P, BOWMAN R, et al. 3d computational imaging with single-pixel detectors[J]. *Science*, 2013, 340(6134): 844-847.
- [153] GIBSON G M, JOHNSON S D, PADGETT M J. Single-pixel imaging 12 years on: a review [J]. *Optics Express*, 2020, 28(19): 28190.
- [154] SUN M J, ZHANG J M. Single-pixel imaging and its application in three-dimensional reconstruction: A brief review[J]. *Sensors*, 2019, 19(3): 732.
- [155] EDGAR M P, GIBSON G M, PADGETT M J. Principles and prospects for single-pixel imaging[J]. *Nature Photonics*, 2018, 13(1): 13-20.
- [156] KRISTENSSON E, EHN A, BERROCAL E. High dynamic spectroscopy using a digital micromirror device and periodic shadowing[J]. *Optics Express*, 2017, 25(1): 212.
- [157] TAO C, LI C, LI Y, et al. A UV digital micromirror spectrometer for dispersive AFS: spectral interference in simultaneous determination of se and pb[J]. *Journal of Analytical Atomic Spectrometry*, 2018, 33(12): 2098-2106.

- [158] Fourspring K D, Ninkov Z, Kerekes J P. Scattered light in a DMD based multi-object spectrometer[C]//Atad-Ettinger E, Lemke D. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series: volume 7739 Modern Technologies in Space- and Ground-based Telescopes and Instrumentation. 2010: 77393X.
- [159] POPOFF S. Python library: Alp4lib[EB/OL]. <https://pypi.org/project/ALP4lib/>.
- [160] 钟锡华. 现代光学基础[M]. 2003.
- [161] GABOR D. A new microscopic principle[J]. Nature, 1948, 161(4098): 777-778.
- [162] AN J, WON K, KIM Y, et al. Slim-panel holographic video display[J]. Nature Communications, 2020, 11(1): 5568.
- [163] SANDO Y, SATOH K, BARADA D, et al. Real-time interactive holographic 3d display with a 360° horizontal viewing zone[J]. Applied Optics, 2019, 58(34): G1.
- [164] XU X, PAN Y, LWIN P P M Y, et al. 3d holographic display and its data transmission requirement[C]//2011 International Conference on Information Photonics and Optical Communications. 2011: 1-4.
- [165] PAN Y, LIU J, LI X, et al. A review of dynamic holographic three-dimensional display: Algorithms, devices, and systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2016, 12(4): 1599-1610.
- [166] SU Y, CAI Z, WU K, et al. Projection-type multiview holographic three-dimensional display using a single spatial light modulator and a directional diffractive device[J]. IEEE Photonics Journal, 2018, 10(5): 1-12.
- [167] KUKHTAREV N V, MARKOV V B, ODULOV S G, et al. Holographic storage in electrooptic crystals. i. steady state[J]. Ferroelectrics, 1978, 22(1): 949-960.
- [168] SUZUKI N, TOMITA Y, KOJIMA T. Holographic recording in TiO₂ nanoparticle-dispersed methacrylate photopolymer films[J]. Applied Physics Letters, 2002, 81(22): 4121-4123.
- [169] CURTIS K, DHAR L, HILL A, et al. Holographic data storage[M]. Wiley, 2010.
- [170] YONEDA N, NOBUKAWA T, MORIMOTO T, et al. Common-path angular-multiplexing holographic data storage based on computer-generated holography[J]. Optics Letters, 2021, 46(12): 2920.
- [171] CHEN R, HAO J, YU C, et al. Dynamic sampling iterative phase retrieval for holographic data storage[J]. Optics Express, 2021, 29(5): 6726.
- [172] GEORGES M P, VANDENRIJT J F, THIZY C, et al. Digital holographic interferometry with CO₂ lasers and diffuse illumination applied to large space reflector metrology [invited] [J]. Applied Optics, 2012, 52(1): A102.
- [173] LIEBLING M, BLU T, UNSER M. Complex-wave retrieval from a single off-axis hologram [J]. Journal of the Optical Society of America A, 2004, 21(3): 367.

- [174] ZHAO M, HUANG L, ZHANG Q, et al. Quality-guided phase unwrapping technique: comparison of quality maps and guiding strategies[J]. *Applied Optics*, 2011, 50(33): 6214.
- [175] MICCIO L, ALFIERI D, GRILLI S, et al. Direct full compensation of the aberrations in quantitative phase microscopy of thin objects by a single digital hologram[J]. *Applied Physics Letters*, 2007, 90(4): 041104.
- [176] SCHOFIELD M A, ZHU Y. Fast phase unwrapping algorithm for interferometric applications [J]. *Optics Letters*, 2003, 28(14): 1194.
- [177] LEE W H. Binary computer-generated holograms[J]. *Applied Optics*, 1979, 18(21): 3661.
- [178] HELL S W. Far-field optical nanoscopy[J]. *Science*, 2007, 316(5828): 1153-1158.
- [179] FÖLLING J, BOSSI M, BOCK H, et al. Fluorescence nanoscopy by ground-state depletion and single-molecule return[J]. *Nature Methods*, 2008, 5(11): 943-945.
- [180] SCHERMELLEH L, HEINTZMANN R, LEONHARDT H. A guide to super-resolution fluorescence microscopy[J]. *Journal of Cell Biology*, 2010, 190(2): 165-175.
- [181] YAVUZ D D, PROITE N A. Nanoscale resolution fluorescence microscopy using electromagnetically induced transparency[J]. *Physical Review A*, 2007, 76: 041802.
- [182] WILDANGER D, PATTON B R, SCHILL H, et al. Solid immersion facilitates fluorescence microscopy with nanometer resolution and sub-ångström emitter localization[J]. *Advanced Materials*, 2012, 24(44): OP309-OP313.
- [183] DRECHSLER M, WOLF S, SCHMIEGELOW C T, et al. Optical superresolution sensing of a trapped ion's wave packet size[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 127: 143602.
- [184] QUINTEIRO G, SCHMIDT-KALER F, SCHMIEGELOW C T. Twisted-light-ion interaction: The role of longitudinal fields[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(25): 253203.
- [185] BUSHEV P, ROTTER D, WILSON A, et al. Feedback cooling of a single trapped ion[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96: 043003.
- [186] BUSHEV P, HETET G, SLODICKA L, et al. Shot-noise-limited monitoring and phase locking of the motion of a single trapped ion[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(13): 133602.
- [187] ROTTER D, MUKHERJEE M, DUBIN F, et al. Monitoring a single ion's motion by second-order photon correlations[J]. *New Journal of Physics*, 2008, 10(4): 043011.
- [188] BIERCUK M J, UYS H, BRITTON J W, et al. Ultrasensitive detection of force and displacement using trapped ions[J]. *Nature Nanotechnology*, 2010, 5(9): 646-650.
- [189] Engler B, Weddell S, Clare R. Wavefront sensing with prisms for astronomical imaging with adaptive optics[C]//2017 International Conference on Image and Vision Computing New Zealand (IVCNZ). 2017: 1-7.
- [190] ANDERSEN T, OWNER-PETERSEN M, ENMARK A. Neural networks for image-based wavefront sensing for astronomy[J]. *Optics Letters*, 2019, 44(18): 4618.

- [191] YOON J W, JEON C, SHIN J, et al. Achieving the laser intensity of $5.5 \times 10^{22} \text{ w/cm}^2$ with a wavefront-corrected multi-pw laser[J]. Opt. Express, 2019, 27(15): 20412-20420.
- [192] KUDRYASHOV A, SAMARKIN V, ALEXANDROV A, et al. Adaptive optics for high-power laser beam control[C]//WITTRUCK U. Adaptive Optics for Industry and Medicine. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005: 237-248.
- [193] PLATT B C, SHACK R. History and principles of shack-hartmann wavefront sensing[J]. Journal of Refractive Surgery, 2001, 17(5): S573-S577.
- [194] FIENUP J R. Phase-retrieval algorithms for a complicated optical system[J]. Appl. Opt., 1993, 32(10): 1737-1746.
- [195] SONG H, FRAANJE R, SCHITTER G, et al. Model-based aberration correction in a closed-loop wavefront-sensor-less adaptive optics system[J]. Opt. Express, 2010, 18(23): 24070-24084.
- [196] FIENUP J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. Appl. Opt., 1982, 21(15): 2758-2769.
- [197] NISHIZAKI Y, VALDIVIA M, HORISAKI R, et al. Deep learning wavefront sensing[J]. Optics Express, 2019, 27(1): 240.
- [198] ALLAN G, KANG I, DOUGLAS E S, et al. Deep residual learning for low-order wavefront sensing in high-contrast imaging systems[J]. Opt. Express, 2020, 28(18): 26267-26283.
- [199] PAINE S W, FIENUP J R. [C]//Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series: volume 10980 Machine learning for avoiding stagnation in image-based wavefront sensing. 2019: 109800T.
- [200] QIAN Z H, DING Z H, AI M Z, et al. Bayesian optimization for wavefront sensing and error correction[J]. Chinese Physics Letters, 2021, 38(6): 064202.
- [201] BAUSCHKE H H, COMBETTES P L, LUKE D R. Phase retrieval, error reduction algorithm, and fienu variants: a view from convex optimization[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2002, 19(7): 1334.
- [202] ANGEL J R P, WIZINOWICH P, LLOYD-HART M, et al. Adaptive optics for array telescopes using neural-network techniques[J]. Nature, 1990, 348(6298): 221-224.
- [203] SANDLER D G, BARRETT T K, PALMER D A, et al. Use of a neural network to control an adaptive optics system for an astronomical telescope[J]. Nature, 1991, 351(6324): 300-302.
- [204] PAINE S W, FIENUP J R. Machine learning for improved image-based wavefront sensing [J]. Optics Letters, 2018, 43(6): 1235.
- [205] PELIKAN M, GOLDBERG D E, CANTÚ-PAZ E. Boa: The bayesian optimization algorithm [C]//GECCO'99: Proceedings of the 1st Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation - Volume 1. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc.,

- 1999: 525-532.
- [206] SHAHRIARI B, SWERSKY K, WANG Z, et al. Taking the human out of the loop: A review of bayesian optimization[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2016, 104(1): 148-175.
 - [207] FRAZIER P I. A tutorial on bayesian optimization[J]. *arXiv*, 2018.
 - [208] CALANDRA R, SEYFARTH A, PETERS J, et al. Bayesian optimization for learning gaits under uncertainty[J]. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2015, 76(1-2): 5-23.
 - [209] EKSTRÖM A, FORSSÉN C, DIMITRAKAKIS C, et al. Bayesian optimization in ab initio nuclear physics[J]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2019, 46(9): 095101.
 - [210] RANJIT M P, GANAPATHY G, SRIDHAR K, et al. Efficient deep learning hyperparameter tuning using cloud infrastructure: Intelligent distributed hyperparameter tuning with bayesian optimization in the cloud[C]//2019 IEEE 12th International Conference on Cloud Computing (CLOUD). 2019: 520-522.
 - [211] DAHL G E, SAINATH T N, HINTON G E. Improving deep neural networks for lvcsr using rectified linear units and dropout[J]. *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2013: 8609-8613.
 - [212] NOGUEIRA F. Opensource project: Bayesian optimization[EB/OL]. <https://github.com/fmfn/BayesianOptimization>.
 - [213] JONES D R, SCHONLAU M, WELCH W. Efficient global optimization of expensive black-box functions[J]. *Journal of Global Optimization*, 1998, 13: 455-492.
 - [214] CLARK C E. The greatest of a finite set of random variables[J]. *Operations Research*, 1961, 9(2): 145-162.
 - [215] SHAHRIARI B, SWERSKY K, WANG Z, et al. Taking the human out of the loop: A review of bayesian optimization[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2016, 104(1): 148-175.
 - [216] ROSS T S. Limitations and applicability of the maréchal approximation[J]. *Appl. Opt.*, 2009, 48(10): 1812-1818.
 - [217] DELABIE T, SCHUTTER J D, VANDENBUSSCHE B. An accurate and efficient gaussian fit centroiding algorithm for star trackers[J]. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2014, 61(1): 60-84.
 - [218] OLSACHER T, POSTLER L, SCHINDLER P, et al. Scalable and parallel tweezer gates for quantum computing with long ion strings[J]. *PRX Quantum*, 2020, 1: 020316.

致 谢

五年的博士生涯转眼间即将画上一个句号。回首往日，也曾无所畏惧，也曾孤独彷徨，也曾欣喜若狂，也曾失意沮丧。但所有的一切都将未来路上的一笔财富。这五年，我学会了如何从实践中运用课本上的知识，学会了如何在困境中坚持初心，学会了如何开展一个未知的课题，学会了如何与他人协作共同推进。尽管未来我可能不会再从事量子方面的科研工作，但是这段宝贵的科研经历仍将给我探索未知、负重前行的勇气和力量。

博士期间，我很幸运地遇到了很多师长和朋友，他们在我遇到困难时慷慨地伸出援手，在我沮丧时给我以信心。

首先我要感谢郭光灿院士。他作为国内量子光学的开创者之一，不仅在学术造诣上登峰造极，在人格修养上也值得我学习一生。郭老师虽然年近八旬，但他仍然坚持工作。郭老师创建的中科院量子信息重点实验室为我们开展离子阱实验研究提供了充足的硬件和软件支持；其次我要感谢李传锋老师。当我第一次与李老师交谈时，他向我描述了量子信息世界的宏伟蓝图，扫清了我心中的迷茫，点燃了我对科研的热情。李老师对学生细致耐心，循循善诱，平易近人；对科研充满热情，高瞻远瞩，令人景仰。

我的导师黄运锋老师对我的课题研究提供了很大帮助。他总是把学生培养放在第一位。每次遇到疑惑去找黄老师时，他总是立刻放下手中的事情参与讨论。虽然他对实验的具体细节不甚了解，但是总是立刻把握问题的根本，通过提问的方式，梳理出问题的脉络，这种逻辑思考能力着实令人敬佩。黄老师在分析问题的时候，总是保持一种实事求是的态度，不被主观情绪左右。他让我明白对于一个科研人员来说，虽然技术很重要，但是更重要的是这种从大局上把握问题，直击本质的逻辑思维能力。

崔金明副研究员教会了我很多实验技能。一开始进入实验室，我对光学实验一窍不通，畏首畏尾，不敢动手，崔老师总是不厌其烦地教导我，他告诉我做实验最重要的是建立物理模型，把握数量级，凡是要讲数据。崔老师还时常教育我做科研不要走捷径，要修炼好内功，今后才能走得更远。在我的实验陷入僵局，每每想要放弃时，他并没有因此苛责我，反而一直鼓励我。

此外，我还要感谢众多师兄师姐们。感谢王健师兄经常给我们传授科研之“道”，王健师兄涉猎广泛，眼界开阔，沉稳健谈，始终不忘初心，对科研始终保持饱满的热情，是我学习的榜样。感谢胡长康师兄带我入门，他做实验善于把握细节，治学严谨，使我受益匪浅。感谢赵圆圆、袁媛师姐，感谢张超、侯志博、胡晓敏、吕为民、周坤、陈江山、王钊、贺冉、曹洹师兄，他们在学习和生活上

给予我很大的帮助。

感谢艾铭忠同学在学术和生活上的帮助，感谢郭钰、沈振雄、马凤华、闫飞飞等。

感谢我非常优秀的师弟师妹们，他们是高新霞、郑永祥、李睿睿、潘宇豪、陈炎、房鼎、鲍新宇、周小龙、李黎、叶蔚然、沈泽民、黄冬郁，他们充满激情，乐观活泼，祝愿他们在科研路上可以披荆斩棘，勇创佳绩。

最后感谢我的妻子周士迪一直以来的陪伴，感谢父母、岳父母和姐姐以及其他亲人们的默默支持，他们永远是我坚强的后盾和奋斗的动力。

钱忠华

November 13, 2021

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文:

1. QIAN Z H, DING Z H, AI M Z, ZHENG Y X, CUI J M, HUANG Y F, LI C F, GUO G C. Bayesian optimization for wavefront sensing and error correction[J]. Chinese Physics Letters, 2021, 38(6): 064202.
2. QIAN Z H, CUI J M, LUO X W, ZHENG Y X, HUANG Y F, AI M Z, HE R, LI C F, GUO G C. Super-resolved imaging of a single cold atom on a nanosecond timescale[J]. Physical Review Letters, 2021, accepted.
3. ZHENG Y X, CUI J M, AI M Z, QIAN Z H, CAO H, HUANG Y F, JIA X J, LI C F, GUO G C. Large 2tuning range frequency stabilization of an ultraviolet laser by an openloop piezoelectric ceramic controlled fabry – péröt cavity[J]. Optics Express, 2021, 29(16): 24674.
4. HE R, CUI J M, LI R R, QIAN Z H, CHEN Y, AI M Z, HUANG Y F, LI C F, GUO G C. An ion trap apparatus with high optical access in multiple directions[J]. Review of Scientific Instruments, 2021, 92(7): 073201.
5. AI M Z, LI S, HOU Z B, HE R, QIAN Z H, XUE Z Y, CUI J M, HUANG Y F, LI C F, GUO G C. Experimental realization of nonadiabatic holonomic singlequbit quantum gates with optimal control in a trapped ion[J]. Phys. Rev. Applied, 2020, 14: 054062.
6. ZHOU K, AI M Z, QIAN Z H, GAO X X, HU Z H, LI Q, YUAN L, WANG Z, HUANG Y F, TU T, CUI J M, LI C F, GUO G C. Highsensitivity strain sensor with an infiber airbubble fabryperot interferometer[J]. Applied Physics Letters, 2018, 113(18): 181901



中国科学技术大学博士学位论文
