

中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

博士学位论文



论文题目 基于离子阱系统的量子控制实验研究

作者姓名 艾铭忠

学科专业 物理学

导师姓名 黄运锋 研究员 崔金明 副研究员

完成时间 二〇二一年五月

黄运锋

中国科学技术大学 博士学位论文



基于离子阱系统的量子控制实验研究

作者姓名： 艾铭忠

学科专业： 物理学

导师姓名： 黄运锋 研究员 崔金明 副研究员

完成时间： 二〇二一年五月二十五日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



Experimentally Investigation of Quantum Control Based on Trapped Ion System

Author: Ming-Zhong Ai

Speciality: Physics

Supervisors: Prof. Jin-Ming Cui, Prof. Yun-Feng Huang

Finished time: May 25, 2021

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名： 艾铭忠

签字日期： 2021.05.25

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☒ 公开 ☐ 保密 (____ 年)

作者签名： 艾铭忠

导师签名： 黄运锋

签字日期： 2021.05.25

签字日期： 2021.5.25

摘 要

量子力学主要描述物质在微观世界中的规律，和相对论一起被认为是现代物理学的两大基石。自第二次量子力学革命以来，受益于人类技术的提高，基于量子力学基本原理的量子保密通讯、量子精密测量和量子计算都得到了很大的发展。特别是最近几年兴起的 Noisy Intermediate-Scale Quantum (NISQ) 技术概念，要想在短期内将量子技术应用于实际的社会问题，就必须对中等尺度的量子系统进行有效而精确的量子控制。目前世界上探索量子信息处理技术的平台有很多，其中离子阱系统因其量子比特位于真空环境中，相干时间长；拥有全同的量子比特；可以实现任意两个比特的有效耦合等十分突出的优点，获得了大量的关注。在本文中，我们搭建了一套 needle 形离子阱，并开展了一系列的关于量子控制的研究，主要包括：

(1). 实验演示抑制剩余的几何退相干。量子系统的退相干目前是进行精确量子控制和提高量子门保真度的一个非常棘手的阻碍。传统的动力学方法能够有效的抑制动力学退相干，然而却不能抑制几何退相干。我们从量子系统的演化过程出发，设计了改善动力学解耦的方法，可以同时动力学和几何学退相干进行有效的抑制。我们在囚禁离子的二能级系统上对量子比特在高斯噪声下的退相干情况进行了探索，验证了改善的动力学解耦方法比传统方法可以减小退相干速率一个量级以上。

(2). 利用优化控制方法在单个囚禁离子上实现非绝热和单比特量子门。通过几何相位设计的量子门具有天然的抗噪声特性，然而在以往的设计中，几何相位门都是需要绝热实现的，系统有限的相干时间往往限制了几何相位门的抗噪声特性。我们利用离子超精细结构中的三能级，发展了一套实现非绝热和单量子门的方法，该方法对于系统的拉比频率误差干扰相比以往的和单量子门具有更强的鲁棒性。

(3). 在可控噪声驱动下的量子系统中验证反 Kibble-Zurek (KZ) 机制。KZ 机制是描述相变过程的一套普适框架，但是最近几年在铁磁相变等领域也观察到了一些违背 KZ 机制的现象。由于难以有效的对相变过程中的参数进行有效的控制，目前极少有对这方面的实验探索。我们利用微波中混频高斯噪音，可控的驱动离子中的二能级系统，定量的探索了噪音强度和相变过程中产生缺陷的关系。

(4). 实验实现基于强化学习的有效量子控制。我们利用强化学习方法，并且使用绝热路径控制方法中的有效控制时间作为先验信息，发展出了一种可以实现快速而又具有鲁棒性的量子控制方法。不同于绝热路径中需要连续变化的脉冲形式，我们设计了数字式多脉冲驱动的方法完成特定的量子任务。经过实验验

证, 该方法对于拉比频率误差和失谐频率误差都有很好的鲁棒性。

关键词: 离子阱, 动力学解耦, 量子控制, 机器学习, Kibble-Zurek 机制, 和乐量子计算

ABSTRACT

Quantum mechanics, which mainly describes the laws of matter in the micro world, is considered as the two cornerstones of modern physics together with the theory of relativity. Since the second quantum mechanics revolution, benefiting from the improvement of technology, quantum communication, quantum metrology and quantum computation based on principles of quantum mechanics have been greatly developed. In recent years, the concept of Noisy Intermediate-Scale Quantum (NISQ) technology is proposed. In order to apply quantum technology to practical problems in sociology, it is necessary to effectively and accurately control the quantum system of medium scale. At present, there are many promising platforms to explore quantum information process in the world, among which the trapped ion system has received a lot of attention due to its outstanding advantages, such as long coherent time, identical quantum bits and effective coupling of any two qubits. In this thesis, we have built a needle ion trap and carried out a series of research on quantum control, including:

(1). Experimental demonstration of suppressing residual geometric dephasing. The dephasing of quantum systems is a very difficult obstacle to carry out accurate quantum control and improve the fidelity of quantum gates. Traditional dynamic decoupling methods can effectively suppress the dephasing of dynamics, but they can not suppress geometric dephasing. Based on the evolution of quantum system, we design a method to improve the dynamic decoupling, which can effectively suppress the dynamics and geometric dephasing. The decoherence of qubit under Gaussian noise is explored in the two-level system of a trapped ion. It is verified that the modified dynamic decoupling method can reduce decoherence rate by more than one order of magnitude than the traditional method.

(2). Experimental realization of nonadiabatic holonomic single-qubit quantum gates with optimal control in a trapped ion. Quantum gates based on geometric phase have natural anti noise properties. However, in previous proposal, geometric phase quantum gates have to be implemented adiabatically. The limited coherent time of the system often limits the anti noise properties of geometric phase quantum gates. Using the three-level structure of trapped ion, we develop a method to realize nonadiabatic holonomic quantum gates. This method is more robust to the rabi frequency error than previous geometric quantum gates.

(3). Experimentally verifying anti-Kibble-Zurek behavior in a quantum system

under noisy control field. Kibble-Zurek (KZ) mechanism is a universal framework to describe the phase transition process. However, some phenomena violating KZ mechanism have been observed in the field of ferromagnetic phase transition in recent years. Because it is difficult to effectively control the parameters in the process of phase transition, there are few experiments in this area. We quantitatively explore the relationship between the noise intensity and the defects in the phase transition process by using the mixing Gaussian noise in microwave and controllable two-level system in driving ions.

(4). Experimentally realizing efficient quantum control with reinforcement learning. By using reinforcement learning method and the effective control time of shortcut to adiabatic (STA) as a priori information, we develop a fast and robust quantum control method. Different from the waveform which needs to be changed continuously in the adiabatic path, we design a digital multi pulse waveform to complete specific quantum tasks. The experimental results show that the proposed method is robust to both rabi frequency errors and detuning errors.

Key Words: ion trap; dynamic decoupling; quantum control; machine learning; Kibble-Zurek mechanism; holonomic quantum computation

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 量子计算简介	1
1.1.1 量子比特	2
1.1.2 量子逻辑门和量子电路	4
1.1.3 量子态的测量	5
1.1.4 量子计算的物理实现	6
1.1.5 量子计算的现状及挑战	10
1.2 量子控制简介	12
1.2.1 开环量子控制	13
1.2.2 闭环量子控制	14
1.3 本文结构	16
第 2 章 离子阱系统	17
2.1 囚禁原理及系统搭建	17
2.1.1 离子囚禁原理	17
2.1.2 实验系统搭建	21
2.2 初态制备、操作及测量	27
2.3 双光子拉曼操作声子	31
第 3 章 剩余几何退相干的有效抑制	38
3.1 背景介绍	38
3.2 几何相位门中的退相干	39
3.3 有效抑制退相干	41
3.4 实验结果	43
3.5 本章小结	46
第 4 章 非绝热和乐量子计算	47
4.1 背景介绍	47
4.2 通用单比特量子门	48
4.3 两比特门方案	50
4.4 实验验证	52
4.4.1 量子过程层析 (QPT)	53
4.4.2 Randomized Benchmarking	56
4.5 实验结果	58

4.6 鲁棒性对比	59
4.7 四能级和乐量子门	61
4.7.1 实验原理	61
4.8 本章小结	65
第 5 章 可控噪声场下反 Kibble-Zurek 机制的研究	66
5.1 Kibble-Zurek 机制背景介绍	66
5.2 横场 XY 链中的反 KZ 机制理论	69
5.3 实验设计及验证	73
5.3.1 实验设备	73
5.3.2 白高斯噪音的生成	73
5.3.3 三种退火方案实施	75
5.3.4 最优化退化时间	77
5.4 本章小结	78
第 6 章 基于机器学习的鲁棒性量子控制	79
6.1 基于机器学习的物理问题	79
6.1.1 机器学习理论	80
6.1.2 机器学习在量子物理中的应用	82
6.2 理论模型	84
6.2.1 Shortcut to Adiabaticity 模型	84
6.2.2 机器学习模型	86
6.3 实验实现及结果	89
6.3.1 训练与数值实验	89
6.3.2 离子系统实验结果	90
6.4 本章小结	92
第 7 章 总结与展望	94
参考文献	96
致谢	109
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	111

第1章 绪 论

自从1900年德国物理学家马克思·普朗克提出量子的概念以来^[1],量子科学与技术在这120年中获得了飞速的发展。量子理论不仅在诸如原子能、芯片制造、激光、卫星定位等有关国计民生的领域得到了应用,并且随着人们对微观物质操控能力的提高,一些新的基于量子理论的技术和应用,像量子保密通讯^[2]、量子精密测量^[3]和量子计算^[4]等开始进入人们的视野。其中在量子计算领域,由于其潜在的重大经济效益和国防科研价值,不仅涌现出一批深耕该领域的优秀初创公司,如国内的本源量子,美国的IonQ等,而且被谷歌、IBM、华为、腾讯等国际头部公司作为面向未来的战略方向进行投资研发。目前,针对量子科技的研发博弈已经上升到了国家层面,2018年9月24日,美国白宫科技政策办公室的国家科学技术委员会发布了《量子信息科学国家战略概述》,在2020年中国十九大报告中,同样将量子信息科技作为我国未来仅次于人工智能的科技发展方向。可以说,未来量子信息技术的进一步深入应用将会极大的改变人民的生活水平和人类认识世界、改造世界的能力。

与经典计算机的原理有所不同的是,量子计算基于量子态叠加和量子比特纠缠的特性发展而来。这些特性允许量子计算机拥有十分强大的并行计算能力。然而,由于量子比特非常容易受到周围环境的影响,想要实现通用的量子计算是一个非常复杂而又困难的事情。目前来说,有两个比较大的问题需要解决,一个是应对量子比特退相干的容错与纠错问题,另外一个则是量子比特的扩展性问题。目前各大研究机构正针对不同的实现体系尝试不同的解决方案。基于量子计算迅猛的发展趋势,本绪论将主要分为三个部分。第一部分简要介绍量子计算的前世今生,包括量子计算的起源、发展及将来的挑战。第二部分简要介绍用于量子计算的优化控制,包括目前量子控制的各种方法及其应用和优缺点。最后给出本论文的框架结构。

1.1 量子计算简介

经典计算问世至今不过几十年,但它的快速发展支撑起了现代社会信息文明的大厦,不仅极大的丰富了人们的日常生活,对于经济的发展也起到了举足轻重的作用。自从1946年世界上第一台计算机ENIAC在宾夕法尼亚大学投入运行,计算机的发展迈入了快车道,尤其是基尔比发明集成电路之后,片上集成的晶体管数量更是按照摩尔定律飞速扩张。以前重30吨,占地百平方米以上大型计算机的计算能力,现在甚至都比不上你我手中方寸之间的手机。然而,目前计

算能力的飞速发展并不能无限制的延续下去。实际上,随着近几年芯片制程达到 5nm 之后,研发更小的晶体管尺寸必然会受到量子力学的限制,但是人们日益增长的计算能力的需求并没有相应的减少。这时,具备更快运算能力的量子计算自然而然的进入了人们的视野。目前公认的量子计算的说法来源于诺贝尔奖获得者 Richard Feynman 在一次公开演讲中提出的两个问题:1. 经典计算机是否能够有效地模拟量子系统? 2. 如果放弃经典的图灵机模型,是否可以做得更好? 目前量子系统的演化主要依靠微分方程来描述,但是对于多体问题,由于变量太多,是不可能靠经典计算机来准确求解的。而放弃经典计算机的结构体系,转而使用一些自身带有量子特性的诸如原子和分子的物质构建计算机,是否可以对多体量子系统进行更加准确的描述。此后,世界各地的科学家开始针对这一重要的科学问题进行攻关。

20 世纪 90 年代,量子计算机的算法取得了重大进展。1992 年 Deutsch-Jozsa 提出了 D-J 算法^[5]; 1994 年, Peter Shor 提出了 Shor 算法^[6], 和经典计算机算法相比,这个算法在大数分解问题上具有压倒性优势,并且理论上可以破解目前的 RSA 加密体系,引起了当时人们的广泛关注,特别是非量子领域人士的关注; 1996 年, Lov Grover 提出了另外一个具有重要意义的 Grover 量子搜索算法^[7]。尽管这些量子算法具有重要的应用前景,但是由于实现这些算法都要基于上百万的量子比特,并不是短时间内可以完成的事情,因此大家对量子计算的热度又逐渐冷却下来。2009 年, MIT 的三位科学家联合开发了一种求解线性系统的量子算法 HHL^[8], 由于线性系统是当前很多工程领域的核心,并且 HHL 对于经典算法具有指数加速的效果,从而使得量子计算有潜力成为在机器学习、人工智能等领域取得关键性突破的技术,量子计算的概念又一次火热了起来。

在量子计算硬件方面,2013 年,加拿大 D-Wave 系统公司发布了 512 比特的量子计算设备。但是该设备只能执行量子退火算法,具有很强的限制性。2016 年,IBM 发布了 6 量子比特的可编程的量子计算机。2018 年初,Intel 和 Google 分别测试了 49 比特和 72 比特的量子芯片。2019 年 1 月,IBM 发布了世界上第一台独立的量子计算机 IBM Q System One。美国的谷歌公司和中国的潘建伟院士团队分别在 2019 年和 2020 年基于超导平台和光子平台宣布实现了量子霸权(Quantum Supremacy)。尽管通往实用化量子计算的道路道阻且长,但是在世界各国科学家和工程师的不懈努力下,人类之光终将照耀在这座巨大的宝库上,为地球文明的发展提供长远的助力。

1.1.1 量子比特

在经典信息理论中,基本构成元素是比特。比特只有 0 或者 1 两种状态,所有我们传输的信息都是一系列由 0 和 1 构成的字符串。但是由于一个比特只能

处于两种状态中的一个。而在量子信息中，对应于经典信息理论中比特概念的是量子比特 (qubit)。Qubit 也有两个基本态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 。与经典比特不同的是，qubit 可以处于两个态的叠加态上，一个任意的 qubit 态可以写成

$$|\psi\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (1.1)$$

一个 qubit 可以被看做球面上的一个点，这个球被称作布洛赫球。很容易可以发现 qubit 的态空间是 2 维的。从图 1.1 可以看出，在布洛赫球上，角度 θ 和 ϕ 分别对应着球坐标中的极角和方位角。球的北极代表 $|0\rangle$ 态，南极代表 $|1\rangle$ 态。当在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基矢上去测量这个量子态的时候，它有 $\cos^2\frac{\theta}{2}$ 的概率塌缩到 $|1\rangle$ 态上面，有 $\sin^2\frac{\theta}{2}$ 的概率塌缩到 $|0\rangle$ 态上面。至于方位角 ϕ ，作为 qubit 的相位，它控制着量子态在布洛赫球上面旋转时围绕的旋转轴。另外一个使得量子计算具有强大

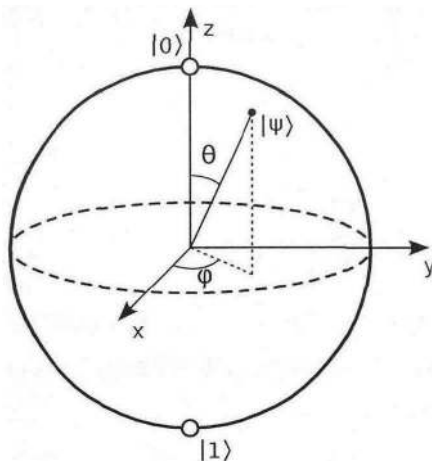


图 1.1 布洛赫球及量子比特 (维基百科: Qubit)。一个 qubit 可以由布洛赫球上面的一个点进行表示。布洛赫球上的极角 θ 决定了 qubit 被探测时塌缩到各个基态上面的概率，而方位角 ϕ 则决定了 qubit 围绕布洛赫球旋转时的旋转轴。

能力的原因是两个分离的 qubit 可以彼此纠缠。我们举一个关于纠缠的简单的例子，假定两个量子比特 a 和 b 互相纠缠，这样一个态可以表示为

$$|\psi\rangle_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_a|0\rangle_b + |1\rangle_a|1\rangle_b) \quad (1.2)$$

这样一个态不能被分成 a 和 b 相互分离然后直积的状态，并且也无法在经典世界中找到相似的类比。这样的态曾被 Einstein, Podolsky 和 Rosen 认为是非常矛盾的，是不现实的，这也被后人称为 EPR 佯谬^[9]。如果我们对 a 或者 b 单独进行测量，都会使得纠缠态瞬间塌缩，这样的塌缩与两个量子比特的距离无关。Einstein 描述这种行为是一种“幽灵般的超距作用”。假如我们想旋转纠缠态中第一个 qubit 的相位，我们会发现这个操作也完全等价于旋转第二个 qubit 的相位。尽管这个操作只是作用到了 qubit a 上面，但是造成的结果却是对两个 qubit 都有影响

的。

1.1.2 量子逻辑门和量子电路

在经典的数字电路图中，连线代表的是信息的流动方向或者对信息进行的某些特定的操作。而在量子电路图中，横线代表的是信息流动的方向，竖线代表的是作用于某个 qubit 的操作。作为对比，我们在图 1.2 中展示了经典和量子的异或 (XOR) 电路，并且列出了它们各自的真值表 (输入态和输出态的对应关系)。从中可以看出量子门和数字逻辑门的一些区别，这能帮助我们更好的理解量子计算。

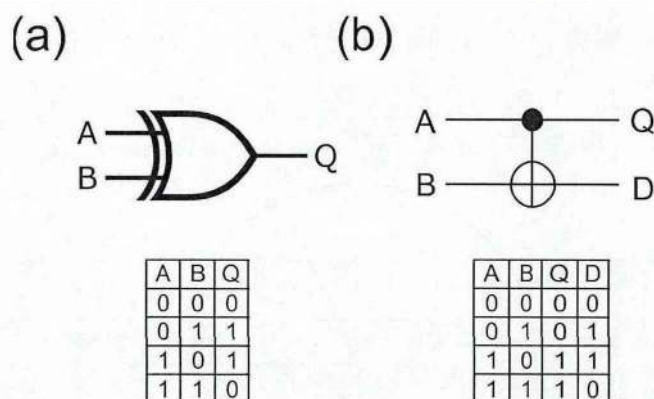


图 1.2 数字电路和量子电路中异或门的对比。(a) 经典电路中的异或门及其真值表 (维基百科: Logic gate)。(b) 量子异或门及其真值表 (维基百科: Quantum logic gate), 其中量子异或门也被称为 CNOT 门。

在数字逻辑门里，门符号前面的连线代表了经典信息的输入。在 A 和 B 端口输入的离散电压值 (通常是 3.3 V 或者 0 V) 代表了 0 态或者 1 态。当且仅当 A、B 两个输入端中的一个为 1 态时，XOR 门的输出为 1。反之，如果两个输入端的信号同时为 0 或者 1，XOR 门的输出为 0。整个异或门由多个晶体管组成。我们发现仅仅凭借经典的 XOR 门的输出，不能猜测出它的两个输入值是什么，这意味着输入态的信息在门的末尾作为热量耗散了。

在量子异或门里 (更普遍的称呼为控制非门，CNOT 门)，连线并不代表物理现实中存在的连线，而是代表了离散的 qubit 或者是 qubit 操作的时间序列 (按照从左到右的时间顺序)。不同于经典逻辑电路里由晶体管来构成的门电路，这里的 CNOT 一般是通过激光或者微波相干操控 qubit 来实现的。从这里我们看出来量子电路和经典电路中第一个主要的不同之处：量子电路是通过耦合震荡的电磁场和 qubit 来完成；而经典电路则是通过物理实在传输经典信息构成。

另外一个量子电路和经典电路的区别是信息存贮的位置。经典电路的信息

存储在逻辑器件的连线上,而量子电路中的信息存储在物理比特上面。尽管有些时候,多量子比特的操作也会涉及到通过纠缠作用使的多个 qubit 实现信息共享。但这种非局域性是非常微妙的,信息都存储在具有不可见联系的 qubit 中,并且只能通过解除纠缠或者对某个 qubit 进行投影测量才能提取出来。而在很多情况下,纠缠往往在整个电路的最后才会被解除,信息也会回归到单个的 qubit 的局域环境中。

尽管量子电路和经典电路有很多不同,但是它们却拥有完全一样的真值表。在量子异或门中,第二个 qubit 的输出代替了经典异或门的输出,与此同时,第一个 qubit 的状态并不会受到改变。于是我们可以根据量子 XOR 门的两个输出端口的内容来确定 A 和 B 两个输入端口的内容,这意味着在进行 XOR 门操作之后,量子态的输入信息依然被保留了。

1.1.3 量子态的测量

当我们完成一个量子电路后,我们需要对最后的量子态进行测量。由于量子态 $|\phi\rangle$ 一旦被测量,它就会塌缩至某一个经典态,这时候隐藏在叠加态里的其他信息就会丢失,所以单次测量无法使我们感知量子叠加态的具体情况。在这种情况下,我们可以通过多次测量的方式,以频率逼近概率,得到叠加态中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 态前面的系数 $\sin^2\frac{\theta}{2}$ 和 $\cos^2\frac{\theta}{2}$ 。如果有需要的话,我们也可以采用量子态层析的方式得到 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的相对相位信息。

更多的时候我们需要对量子态进行投影测量。投影测量可以使用一系列彼此正交且相加为 I 的投影算符 P_j 来描述。当投影算符 P_j 作用到总 Hilbert 空间 V 的子空间 V_j 上面时, V 中的每一个量子态 $|\phi\rangle$ 可以被分解为 $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^m |\phi_j\rangle$, 其中 $|\phi_j\rangle = P_j|\phi\rangle \in V_j$ 。由于投影算符是彼此正交的,因此各个子空间 V_j 和量子态 $|\phi_j\rangle$ 也是相互正交的。当我们把这个测量作用于纯态 $|\phi\rangle$,我们可以以 $\|\phi_j\|^2 = \text{Tr}(P_j|\phi\rangle\langle\phi|) = \langle\phi|P_j|\phi\rangle$ 的概率得到 j 输出,然后被测量的态也会随之塌缩到一个新的量子态 $|\phi_j\rangle/\|\phi_j\| = P_j|\phi\rangle/\|P_j|\phi\rangle\|$ 。

一组用投影算符 P_m 表示的投影测量及其相应的输出 $\lambda_m \in R$ 可以写成矩阵的形式,这个矩阵可以被称为可观测量。使用这种方式可以非常方便的计算测量输出的期望值。假设我们测量量子态 $|\phi\rangle$, 输出 λ_m 的概率为 $\|P_i|\phi\rangle\|^2 = \text{Tr}(P_i|\phi\rangle\langle\phi|)$, 输出的期望值为 $\sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Tr}(P_i|\phi\rangle\langle\phi|) = \text{Tr}(\sum_{i=1}^m \lambda_i P_i|\phi\rangle\langle\phi|) = \text{Tr}(M|\phi\rangle\langle\phi|)$ 。其中 M 是厄密的 $M = M^*$ 。由于每一个厄密矩阵 M 都可以通过谱分解为 $M = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$, 因此在观测量和厄密矩阵之间有着直接的联系。举个简单的例子,泡利矩阵 I, X, Y, Z 是 2 维观测量,其中 $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ 对应着计算基矢上面的测量(对于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 态分别输出 $+1$ 和 -1)。

如果我们仅仅关心最后 m 个出口的概率分布,而不是测量后的量子态,

这种情况下我们最常用的测量方式是 positive-operator-valued measure (POVM) 测量。这种测量由 m 个半正定的, 相加为 1 的矩阵 $E_1, \dots, E_m$ 构成。当对量子态 $|\phi\rangle$ 进行测量的时候, i 输出的概率为 $\text{Tr}(E_i|\phi\rangle\langle\phi|)$ 。投影测量是 POVM 测量的一种特殊情况, 其中测量元素 E_i 都是投影算符。

这里为了使读者更加明白投影测量和 POVM 测量的区别, 我们举一个可以用 POVM 进行测量而不能用投影测量的例子。假定我们有一个 2 维空间的量子态, 并且知道它处于 $|0\rangle$ 或者 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 中的一个上面。然而, 由于这两个态并不是正交的, 因此不能通过投影测量的方式来完美区分这两个态。但是 POVM 方法, 可以通过额外的手段来解决这个问题。当使用 POVM 对这个量子态进行测量的时候, 我们有可能得到 3 种结果: 0、1 和代表不确定的结果 2:

- (1). 如果态是 $|0\rangle$, 那我们将有 1/4 的概率得到正确的输出 0 和有 3/4 的概率得到输出 2, 但不会得到不正确的输出 1。
- (2). 如果态是 $|+\rangle$, 那我们将有 1/4 的概率得到正确的输出 1 和有 3/4 的概率得到输出 2, 但不会得到不正确的输出 0。

我们使用投影测量是无法完成这个任务的, 但是下面的 3 出口的 POVM 可以完成:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}|- \rangle\langle -| \text{ (其中 } |- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \text{ 垂直于 } |+\rangle \text{ 态);} \\ E_1 &= \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \text{ (其中 } |1\rangle \text{ 垂直于 } |0\rangle \text{ 态);} \\ E_2 &= I - E_0 - E_1. \end{aligned}$$

1.1.4 量子计算的物理实现

目前有多种平台正在被人们考虑来完成量子计算, 其中既有分子、离子等非常小的自然界存在的系统, 也有大的多的人为制造的系统如超导比特。2000 年 DiVincenzo^[10] 提出了对于一个量子系统而言想要实现量子计算的五个要求:

- 一个具备量子比特的可扩展系统;
- 可以对量子比特进行初始化;
- 相比门操作时间而言足够长的相干时间;
- 可以实现一组完备的量子门;
- 可以对特定的量子比特进行测量;

下面我们简要地对几个量子信息处理系统进行介绍, 这些系统可以在图 1.3 中找到。

(1) 光子系统

利用光子进行量子比特的编码有多种方式, 例如利用光子的偏振作为 qubit, 其中光子偏振的操作可以通过波片来进行。也可以利用光子的位置和时间分布, 或者多光子激光器的连续相位和幅度来对 qubit 进行编码。然而, 光子平台的一

个很大的问题是光子之间的相互作用很弱,因此很难实现通用的多比特控制。自从2001年基于线性光学的量子计算方案KLM^[11]提出以来,与之相关的理论方案和实验演示获得了很大的发展。目前大家在光量子计算方面主要努力的方向在高效单光子探测器^[12-13],高效单光子源^[14],能使光子之间发生确定性相互作用的设备^[15-16]和片上量子电路上面^[17-18]。

(2) 核磁共振 (NMR) 系统

液体溶液分子中的核自旋是一种出色的自旋系统,分子的快速运动能帮助原子核保持很长的相干时间。早在1996年,利用核磁共振技术来实现量子计算的方案就已经被提出^[19]。由于分子中电子的屏蔽作用,在同一个分子中,原子与原子的核自旋的拉莫尔频率是不同的,这给我们提供了一种可以利用特定频率的射频来操纵单个量子比特的可能。而分子中两比特的相互作用则可以通过分子中电子的相互耦合来实现。至于量子比特的观测,则可以通过 qubit 附近线圈里引起的电流来进行最后的测量。目前液体中的核磁共振技术已经实现了对12个 qubits 进行操作^[20]。尽管到目前为止,还没有出现核磁共振技术能够对大量的量子比特进行有效的态初始化和测量,但是在探索对分子核自旋的操控过程中,发展出了很多有效的多比特量子控制方案。目前核磁共振的相干时间已经比固态系统中亚毫秒的门操作时间长许多,但是还远远比不上其进行初始化和测量的时间尺度,因此,在核磁共振系统中发展的技术,大概率会促进其他量子计算系统的发展,而核磁共振本身则很难完成通用的量子计算。

(3) 超导电路系统

得益于现代半导体工艺的成熟,处于低温下的超导 qubit 也是一种非常优秀的量子计算平台。隐藏在超导量子比特后面的物理原理非常简单,我们可以用一个处于势场中的粒子来进行解释(和离子阱类似)。常温下的LC震荡电路,由于热效应太强会导致很快的退相干,这让我们几乎观察不到什么量子效应,但是在超低温下(目前的实验条件通常是20mK左右),一个LC震荡电路由于能量很低,与外界环境交互很弱,不会很快的退相干,则会表现出量子化的简谐震荡。在LC电路中,通过电感的磁通量 Φ 和电容上的电荷 Q 具有对易关系 $[\Phi, Q] = i\hbar$,这很容易让我们将 Φ 和 Q 类比为粒子的位置和动量。这样整个系统的哈密顿量就可以用势能 $\Phi^2/2L$ 和动能 $Q^2/2C$ 的和来描述,该哈密顿量最终形成的的是一个具有等间距能级量子化的简谐震荡子。然而,这样的能级结构在实际操作上存在一定问题,由于所有的能级间隔都是相同的,我们没法去对具体的两个能级进行寻址。因此,在超导量子比特中,一个非常重要的组成部分是约瑟夫森结。约瑟夫森结是一层非常薄的氧化绝缘体(大约只有几个nm),隧穿过约瑟夫森结的电子会给原来抛物线形式的势能叠加一个余弦项。这个余弦项的振幅取决于约瑟夫森结的能量 E_J ,并且正比于临界结电流。这样,简谐振动的能级就不是等间距

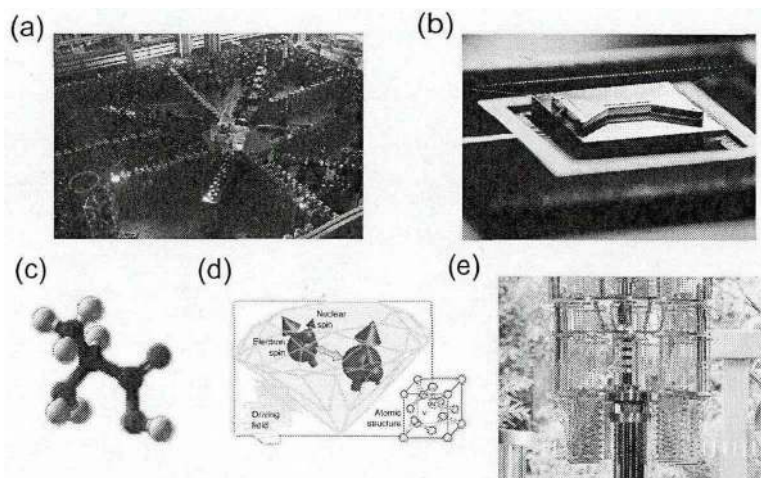


图 1.3 几种不同的量子计算实现平台。(a) 光量子计算平台 (Science, 2020, 370(6523))。2020 年潘建伟组在光子平台实现量子优越性的实验设备图。(b) 离子阱量子计算平台 (IonQ website, <https://ionq.com/>)。美国 IonQ 公司芯片阱。(c) NMR 平台 (维基百科: Nuclear magnetic resonance quantum computer), qubit 被编码在液体分子的核自旋中。(d) NV 色心平台 (ScienceDirect, Chapter 14 - Electronics and Communication)。金刚石里掺杂 N 原子造成的空穴-电子对形成 qubit 系统。(e) 超导量子计算平台 (IBM website, <https://www.ibm.com/quantum-computing/>)。IBM 50 qubits 超导量子计算机。

的了, 一个可以通过不同的微波频率进行寻址的 qubit 就构成了。根据约瑟夫森结能量 E_J 和单电子充电能量 E_C 比率 E_J/E_C 的不同, 我们可以将超导比特分为 charge、flux 和 phase 三种类型。一般而言, qubit 的激发频率一般都在 5-10 GHz 之间, 这样的频率既足够高, 可以最小化在低温腔中热效应的干扰, 又是一个商业微波元件可以达到的频段。在超导量子电路中, 相邻 qubit 之间的耦合可以通过电容或者电感来实现, 但是目前更为普遍的是使用传输线里的微波光子来进行耦合。目前在超导系统中, 单比特门的时间在 1-10 ns 内, 保真度 > 99% 的两比特门也可以在几十个 ns 内完成^[21]。而对应的系统相干时间 T_1 可以达到 100 μ s 左右, 已经可以在相干时间内进行比较多的量子门操作。在 10-20^[22-23], 甚至 50 个物理比特上演示简单的量子算法和模拟实验也已经发展的比较成熟^[24]。尽管超导量子计算相较而言更加容易扩展, 但是目前还是存在诸如布线困难, 线之间存在 crosstalk 等问题亟待解决。

(4) 固态色心系统

其本质是一块半导体纳米结构捕获一个电子或者空穴, 形成类似于电子围绕原子核的人造原子结构, 这样的结构可以构建基于固态系统的量子计算。目前基于固态色心系统的量子计算系统有砷化镓量子点、nitrogen-vacancy (NV) 色心

和 silicon-vacancy (SiV) 色心等。由于 NV 色心相比砷化镓量子点表现出了更好的相干性, 而 SiV 系统尚未发展成熟, 我们主要介绍一下基于 NV 色心的固态系统^[25]。一方面, NV 色心系统的电子自旋和核自旋体现出类似原子的能级结构, 它的初始化和态读出可以通过光学控制来完成, 另一方面, 由于固态系统具备半导体特性, 又特别适合集成在芯片上进行快速的电子控制和磁控制。一般的半导体自旋体系受到自旋-轨道耦合和磁核的影响较为严重, 而在 NV 色心体系中, 自旋的相干性主要受限于周围电子^[26] 和核自旋^[27] 的磁场扰动。这导致了室温下 NV 色心的相干时间与色心的纯度有很大的关系。从不纯系统几个微妙到超纯系统的毫秒量级^[28], 低温下的系统甚至可以达到更长的相干时间。NV 色心体系的操纵时间相比相干时间要短很多, 利用平板印刷技术实现的微波波导可以在 ns 量级下实现 NV 色心系统中电子的自旋翻转^[29-30], 核自旋也可以在微秒尺度下实现翻转^[31-32]。在 NV 色心中核自旋和电子自旋的耦合可以通过激发多自旋能级中的特定的跃迁来实现, 在这个过程中也可以结合动力学解耦和两比特门来保护操作的相干性^[33]。NV 色心一个非常优异的特性就是可以用 532 nm 激光进行态的初始化和利用发出的荧光 (一般在 637 nm) 进行态探测, 初始化保真度可以达到 99% 以上, 而通过一些特殊的结构 (比如色心表面的微透镜增加收集荧光的数值孔径), 态探测的保真度也可以达到 95% 以上^[34]。当然想实现量子计算的话少不了量子比特之间可扩展的连接。在 NV 系统中其中的一种实现方式是通过不同 NV 色心里电子自旋的耦合来进行连接。在这种连接中, 色心之间的距离可以控制在 10 nm 的量级, 实验室达到的耦合强度可以到几十 kHz^[35]。另外一种实现方式是通过飞行光子, 分别与两个 NV 色心纠缠, 然后再通过光子与光子之间的纠缠来实现可扩展的量子信息处理^[36-37]。相较超导系统和离子阱系统而言, NV 色心更依赖于样品的质量, 而想要得到可重复的且质量可靠的 NV 色心样品目前也是一个不小的挑战。由于其固态的属性和可集成化操作的特点, 目前大家更多的用 NV 色心来做量子传感, 我们也相信, 在不久的将来, NV 色心系统会在量子传感领域发挥更大的作用。

(5) 离子阱平台

离子阱系统通过射频电场在真空中束缚单个或者相互间隔的离子, 每个离子内部的两个能级 (以镱离子为代表的微波波段能级和以钙离子为代表的光波段能级) 构成一个 qubit。与其他系统不同的是, 由于在离子阱中每个离子 qubit 都是完全相同的, qubit 的性能只与外部环境和束缚系统的性能有关而与离子本身无关。由于离子的这些优良的特性, 目前正在实验室系统中实现了保真度超过 99.9999% 的单比特门^[38] 和保真度超过 99.9% 的两比特门^[39]。与此同时, 超过 1 小时的离子相干时间^[40] 远远大于了 10 μ s 的单比特门时间和 100 μ s 左右的两比特门时间, 从而允许我们执行足够多的量子门操作。在离子阱系统中, 两个离子

的纠缠是通过离子与离子之间共有的声子模式耦合产生的。但是随着阱里面离子数目的增多,声子的模式数目会以指数进行增长。并且目前阱的结构只能稳定束缚上百个离子^[41],当离子数目增多时,离子相互之间的库伦相互作用使得部分离子很容易处于不稳定状态,从而脱离势场的束缚。另一方面,由于离子的操作大多通过激光进行,而激光相对于电子元件而言没有那么稳定,可能经常会有功率、波长、相位和指向的抖动问题,并且激光器对使用环境要求比较严苛,导致建造一台离子阱量子计算机较为困难且难以维护。但是目前世界上已经出现了一些解决方案,例如美国马里兰大学的 Monroe 组,致力于分布式量子计算的构建^[42],这些分布式的离子阱,首先通过光子与束缚的离子进行纠缠,纠缠后的光子通过光纤传输到一起,进行光子与光子之间的纠缠,从而实现多个离子阱之间量子信息的交换。美国国家标准技术局 (NIST) 的诺贝尔物理学奖获得者 Wineland 等人提出可以在一个阱中设置多个区域,每个区域执行不同的功能(例如 load、memory、interact 等),并且通过 DC 电极控制离子的穿梭^[43]。而针对光学操纵不稳定的问题,近期,美国 MIT 林肯实验室^[44]和瑞士 ETH^[45]分别演示了利用集成光波导结合芯片阱,直接把操作光通过波导打到离子上。这样避免了因为激光器的不稳定造成的离子退相干。尽管作为量子计算平台,离子阱系统目前还有很多技术难题需要克服,但这依然不能否认离子阱的光明前景,我们将在后文更加详细的介绍离子阱平台的原理及操控方法等内容。

1.1.5 量子计算的现状及挑战

目前量子计算的发展就像春秋战国时代的百家争鸣一样,各个流派不断迸发的新思想理念和技术既彼此争锋,又相互促进。最近一段时间,各大公司逐渐公布了他们的 roadmap,从中我们也可以管中窥豹,一探他们对量子计算未来发展的信心。2020 年 9 月 15 日,作为较早开始投入量子计算研发的 IBM 公布了他们对未来发展的规划,他们使用超导芯片作为自己的实现平台。事实上,IBM 一直致力于将自身研发的量子计算服务部署到云端,从而使得世界各地的人可以以较低的成本使用量子计算。2020 年 IBM 已经将具有 65 个量子比特的处理器供给部分客户使用。他们预计自己的量子处理芯片将会以每年翻一番的速度增长,到 2023 年将会达到 1121 个量子比特,到 2030 年达到百万量级的量子比特数目^[46]。同样使用超导量子芯片平台的谷歌 2019 年利用 53 个量子比特演示了特定的算法,展现了量子优越性,并计划在 10 年内建造一台百万量级量子比特的计算机。而在离子阱量子平台上,霍尼韦尔在 2020 年 6 月利用 6 个量子比特实现了量子体积 (quantum volume) 64 的量子计算机,随后在 9 月份宣布实现了量子体积为 128 的量子计算机^[47],并计划在未来十年内从 10 个量子比特发展到 40 个量子比特,并向下一代容错、可大规模部署的设备迈进。另外一个新创

公司 IonQ 在 2020 年 10 月发布了一款内部测试版的 32 量子比特原型机, 并且规划到 2025 年实现 64 个量子比特, 到 2028 年达到 1024 个量子比特^[48] (参见图 1.4)。由于离子比特更容易达到比较高的门保真度, 虽然在比特数目这一指标上超导平台走在了前面, 但是离子阱平台凭借其更高的门保真度和容易实现任意两比特纠缠的特性, 无疑更具有潜力。

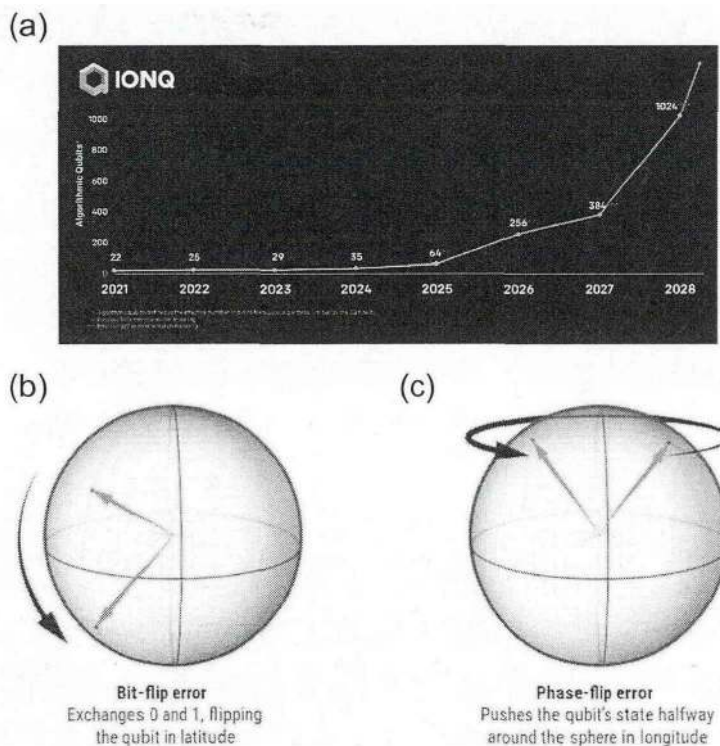


图 1.4 量子计算 Roadmap 和比特操作中的 errors。(a) IonQ 公司 2020 年发布的量子计算 Roadmap (IonQ website, <https://ionq.com/>)。 (b) 和 (c) 单比特操作中, 由于 Rabi 频率扰动等原因导致的 Bit-flip error 和由于失谐扰动等原因导致的 Phase-flip error (Science. <https://www.sciencemag.org/news/2020/07/biggest-flipping-challenge-quantumcomputing> (retrieved Aug. 3, 2020))。

尽管量子计算目前的发展极为迅速, 但量子比特通常是不稳定的, 很容易受到外界噪声环境的干扰。为了维持量子比特的准确性, 我们需要对量子比特进行量子纠错从而形成可以用于计算的逻辑比特。和传统的纠错方法不一样的是, 由于量子不可克隆原理和量子叠加态塌缩的限制, 对量子比特进行纠错必须加入辅助量子比特。相对于经典比特, 量子比特还存在相位上的错误, 这也为量子纠错带来了更大的挑战。通常需要上千个物理量子比特来实现一个高保真的逻辑量子比特, 但是这也会为系统带来大量的噪声。目前不少科研人员认为, 在未来的发展中, 量子计算机面临的主要挑战还是量子纠错。也就是说, 在我们还

远未实现可扩展的量子计算的现在，应该把精力集中在单个量子比特的纠错上，关注 0 和 1 之间，而不是 0 和 1 之外。Science 特约撰稿人 Adrian Cho 2020 年在 Science 上发表了一篇评论文章^[49]，阐述了在量子计算方面纠错的重要性，如果我们不能在每个比特的操作上获得很高的保真度，那我们就需要用大量的比特用来纠错。想要实现高保真度的量子门操作，一方面要努力降低在量子态初始化和探测过程中的错误 (SPAM error)，另一方面，也要尝试寻找对噪声更加具有鲁棒性的量子门操作。而在过去的十多年中，用于具有鲁棒性量子门的量子控制方法也取得了长足的进步，我们将会在下方的章节中详细的介绍一些具有代表性的量子控制方法。

1.2 量子控制简介

自从上世纪 80 年代以来，量子控制理论获得了快速的发展，其主要目标之一是建立牢固的理论基础，并开发出一系列系统的方法来主动操纵和控制量子系统^[50]。目前量子控制理论已经在包括物理化学^[51]、原子与分子物理^[52]、量子光学^[53] 等许多领域获得了令人惊叹的进展，并且在很大程度上促进了人们对于量子力学基本概念的理解^[54]。近年来，量子控制理论一般原理的发展已经被认为是量子技术未来应用的基本要求^[55]，也在诸如物理、化学、控制理论、应用数学和量子信息等领域吸引了很大的关注。在许多量子控制理论中，量子系统的可控性是一个基本问题。这个问题关系到人们是否可以将量子系统驱动到理想的量子态。而这个问题又具有非常现实的意义，因为它与通用量子计算机的实现有着非常紧密的联系。

对于一个可控的量子系统，我们希望能够研究出一套行之有效的控制策略来完成要求的控制任务。其中，相干控制策略是一个得到广泛应用的方法，在这种方法中，我们在保护量子相干性的前提下，施加驱动电磁波，以此来操作量子系统中的量子态。开环相干控制^[56] 是一种早期的量子控制范式，目前已经被成功的应用到了化学相互作用的量子控制上^[57]。严格的最佳控制理论已成功地应用于开环相干控制策略的设计中，以便找到实现物理化学中给定量子控制目标的最佳方法^[58]。最近，人们通过开环控制策略解决了自旋系统的时间最优控制问题，在最短时间内实现了指定的控制目标^[59]。在相干控制中，控制操作由么正演化构成。但是，某些量子系统可能无法仅使用相干控制进行控制。对于这种不可控的量子系统，有可能通过引入新的控制策略，（例如可变结构控制和非相干控制）来增强量子控制的能力。非相干控制策略也被认为是辅助量子控制中相干控制策略的一种重要技术。

尽管基于相干控制和非相干控制方式的开环策略已经获得了非常重要的成

功,但是他们的应用依然有很多局限性。在经典控制理论中,闭环方法比开环控制方法更加具有鲁棒并且更加可靠。由于对开放的量子体系来说,与不可控环境的耦合会引入噪声和不可避免的不确定性,因此大家已经达成了共识,在噪声和不确定的环境下,鲁棒性是发展实用量子技术非常关键的要求。而解决这个问题一个非常自然的途径就是发展闭环量子控制技术。闭环量子控制技术中两个比较重要的方法就是闭环学习控制和量子反馈控制^[51]。闭环学习控制涉及一个闭环操作,闭环中的每次循环都需要用一个新样本去执行,目前这种方法在控制化学反应中的量子现象方面已经取得了巨大的成功^[60]。反馈是经典控制理论中的基本概念,在闭环控制系统中,探测器对系统的状态进行直接测量或使用状态估计获得有关状态变量的信息,然后通过控制器反馈给系统,再由系统进行处理以实现所需的性能。量子反馈控制方法已经在包括控制压缩态和纠缠态、量子容错^[53]等不同的任务中显著提升了系统的性能。反馈控制成功的关键在于获取合适的反馈信息。然而由于量子测量不可避免地会影响被测系统的状态,因此该问题在量子控制中变得更加复杂和微妙。因此,大家在为量子反馈建立一个通用框架上面的努力也加速了诸如量子过滤理论^[61]、量子参数估计^[62]、量子系统识别^[63]和量子鲁棒控制^[64]等相关领域的发展。

接下来我们会简单介绍几种常见的量子开环控制和闭环控制方法以供大家了解。

1.2.1 开环量子控制

目前大多数关于量子系统可控性的研究都没有给出将量子系统从初始状态驱动到预定目标状态的通用的控制方法。因此,对于控制方法设计的研究是非常有必要的。其中李群分解是一种构建合适的控制方法的直接策略,在这种分解中,系统的演化算符 U_f 被分解为许多可以通过简单的控制来实现的基本么正操作的乘积。这种方式非常有建设性并且是很精确的。然而,对于大多数实际的量子系统演化算符而言,完成这样的分解是非常困难的。另外一种方法是优化控制方法,优化控制方法对于许多实际的量子控制问题而言是一套非常有效的工具。

1. 优化控制

在最优控制方法中,可以将量子控制问题表述为寻找一组满足系统动力学方程的控制,而同时该控制又能最小化成本函数。成本函数对于不同的量子控制问题的实际要求也是不同的,例如最小化控制时间、控制能量、最终态的保真度或者这些要求的组合。许多在传统控制理论中行之有效的工具,像变分法、蓬特里亚金最低原则和收敛迭代算法,同样也适用于解决量子系统中的最优控制问题。最优控制技术已经被广泛的应用在了物理化学领域来进行量子控制和 NMR 实验操控。

2. 非相干控制

上面对于开环量子控制的问题的讨论都集中在相干控制上面，在相干控制方法里，我们可以在操控态的同时，保持量子系统的相干性。控制的输入通常作为可调的参数出现在系统的哈密顿量中，并且还可以直接影响动力学的相干部分。但是，在某些物理情况下，不可能或很难用相干资源直接控制量子系统的状态。例如，已经证明具有马尔可夫动力学的有限维开放量子系统是不能仅使用相干控制来控制的。这些量子控制方法的自然扩展是引入非相干资源来增强我们对于量子系统的控制能力。将非相干资源引入开环量子控制的主要方法包括使用非相干控制场，例如辅助系统(如环境)和量子测量。对这方面问题有兴趣的读者可以详细阅读“Quantum control theory”^[65]。

1.2.2 闭环量子控制

尽管开环量子控制已经在很多简单的量子系统上面获得了成功。但是在解决一些其它的量子控制任务，如抑制退相干和抗干扰时遇到了很多困难。而闭环量子控制策略是解决此种问题的一个有效方案。闭环学习控制和量子反馈控制都是很经典的量子闭环控制方法。在闭环学习控制中，闭环中进行的每次循环都使用一个新的样本来执行。而在量子反馈控制中，同样的样本将参与到整个的控制循环过程中。

1. 闭环学习控制

闭环学习控制已经在控制实验室化学反应等方面取得了很大的成功^[51]。我们以使用激光对离子量子比特进行操控为例，说明闭环学习控制过程通常包括的3个步骤：(i) 设计一个试验性质的激光控制输入，(ii) 在实验上将这种控制作用到离子上并观测其结果，(iii) 使用合适的学习算法根据前边的实验结果给出下一次控制输入的形式。最初的控制输入可以是事先设计好波形的激光，也可以是随机产生的控制激光。一个好的闭环学习控制策略应该对其初始试验值不敏感。在整个闭环学习控制中，最重要的任务是建立一个好的学习算法，保证闭环学习过程能及时收敛并实现既定的控制目标。遗传算法等一些可以快速收敛算法已经被应用到这项任务中^[60]。最近几年，基于机器学习算法的闭环控制策略获得了极大的发展。特别是深度学习和强化学习，因其具有非常强的泛化能力，为有效的量子控制提供了很有潜力的方案。在这些方案中，控制目标往往被形式化为一个优化控制问题，通过迭代的求解量子态、控制输入、控制时间等的方程，得到最优的控制方案。与常见的闭环控制方法类似，基于机器学习的控制方法也包含三个过程：首先，将初始输入作用于要控制的样品并观察结果；其次，学习算法基于先前实验的结果得出更好的控制输入；第三，将“更好”的控制输入应用于新样本。持续这三个步骤以最终得到一个最优的控制方案。例如在实

实验室化学反应中通常很容易产生许多状态相同的样品。如果控制目标定义明确,则可以将指定的控制输入应用于样本。然后,如果应用了足够智能的学习算法来调整控制输入,则该过程将收敛以优化所需的目标并找到最佳控制^[51]。

2. 量子反馈控制

正如我们了解的,反馈是一种经典控制理论中行之有效的策略,它的目的是补偿系统不确定的干扰,或者是当系统的初始状态不清楚的时候实现自动化控制。在经典控制理论中,反馈控制要比开环控制有效的多。反馈控制经常需要获取系统的状态,然而,测量一个量子系统将会不可避免的使系统量子态塌缩,这往往会使得反馈控制变的很复杂。尽管存在很大的困难,但是量子反馈控制已经在诸如压缩态制备^[66]、量子纠缠^[67]、量子态纯化^[68]等方面取得了很大的进步,同时也在量子光学^[53]、超导量子电路^[69]、玻色-爱因斯坦凝聚^[70]和纳米力学^[71]等实验系统上得到了广泛的应用。量子反馈控制经常被拿来与开环控制进行比较。对于一些特殊的量子系统,量子反馈控制在解决初态问题不确定和退相干问题上都要比开环控制优异的多。

在量子反馈控制中,两个主要的信息获取方式是投影测量和连续的弱测量。被控制的是一个量子系统,而控制者可能是量子的、经典的或者量子/经典混合的。目前已经提出了一些量子反馈控制的方法,例如马尔可夫量子反馈^[53]、贝叶斯量子反馈^[62]和相干量子反馈^[54]等。在马尔可夫量子反馈中,任何的时间延迟都将被忽略,并采用无记忆控制器。这意味着,测量记录会立即反馈到系统上以更改系统动态,然后该记录会被忘记。因此整个反馈过程可以用马尔可夫主方程来描述结果的演化。在贝叶斯量子反馈中,整个过程被分为态估计和反馈控制两个部分。通过连续的测量记录我们可以实现对动态变量最好的估计,然后将结果反馈回去进行系统动力学的控制。与马尔可夫量子反馈不同,这个演化的动力学方程是非马尔可夫的。在相干量子反馈中,反馈控制器本身就是一个量子系统,它自身可以处理量子信息。这与马尔可夫和贝叶斯量子反馈有很大的不同,后者来自测量结果的反馈信息是经典信息,并且反馈控制器也是经典控制器。

尽管量子控制理论已经发展了几十年的时间,但是到目前为止,还在不断涌现出更多更有效的量子控制方法。我们期望在不远的将来,在广大量子科研工作者的共同努力下,既能在硬件系统上实现更多更容易操控的量子比特,也能在理论层面发展出更具有鲁棒性和实用价值的量子控制方法。两者一起构建出通用的量子计算机!

1.3 本文结构

本论文第一章，即本章，介绍了量子计算和量子控制的一些基本概念。着重讲述了量子计算领域近期的进展和量子控制理论的一些基本方法。后面我们将会介绍我们近些年来在量子控制领域做的一些工作。第二章主要介绍我们实验平台——离子阱系统，包括离子阱系统的搭建和基本的操控手段。第三章将介绍我们使用改善的动力学解耦方案抑制几何退相干方面的研究。第四章将介绍我们实现的非绝热和受控量子门方面研究。第五章将介绍我们通过可控噪音对反 KZ 机制的定量化探索。第六章将介绍我们利用强化学习方法实现具有鲁棒性的数字脉冲量子任务。最后一章给出论文的总结和展望。

第2章 离子阱系统

离子阱作为一种有效的工具,在原子光钟与光频标^[72]、精密光谱学^[73]、质谱仪^[74]和量子信息研究^[75]中都发挥了十分重要的作用。目前世界上主要有两种类型的离子阱,分别是 Penning trap^[76]和 RF Paul trap^[77]。Penning trap 使用轴向均匀的强磁场来对带电粒子提供径向的束缚,同时使用四极电场提供轴向的束缚。囚禁在 Penning trap 中的带电粒子由于在磁场中洛伦兹力的作用下不停的做圆周运动,这样的特点使其中的带电粒子不适合作为量子信息处理单元,但是由于其易于束缚大量的带电粒子,因此适合做一些离子系综或者多体行为的量子模拟。Paul trap (以四极杆阱为例)使用交变电场为离子提供径向的束缚,同时利用静电场提供轴向的束缚。Paul trap 由于其可以通过一系列的冷却将离子冷却到近乎运动的基态,并且高真空环境隔绝了外界的干扰导致相干时间长,每个离子拥有完全一致的能级结构等优点,所以束缚其中的离子可以作为一种非常优良的量子信息处理平台,这也是本篇论文研究的基础。

目前世界上对于囚禁离子的研究主要集中在碱土金属中的 Be, Mg, Ca, Ba, Ra 及镧系中的 Yb 离子等,通过激光电离或者双光子激发过程将最外层的一个电子打掉,这些相应的原子就成了携带一个正电荷的离子。每种元素由于其质量和内部能级的不同,也被用于各种不同的用途。最近几年,也出现了将离子携带的电子激发到高数目能级的里德堡离子的研究^[78]。在实验室中,我们选取 Yb 离子作为实验元素,自然界中的 Yb 具有 7 种同位素,其中丰度最高的 ¹⁷⁴Yb 比例为 31.8%,实验中最常用的 ¹⁷¹Yb 自然丰度为 14.28%。Yb 离子具有易于操控的微波波段能级结构,同时光比特能级的线宽不是太窄,对于激光器的要求并不高,操控相对比较简单,因此是一种非常适合进行量子信息实验研究的元素。

2.1 囚禁原理及系统搭建

2.1.1 离子囚禁原理

如果想要囚禁住一个带电离子,一种直观的办法是构造一个电势场,其中离子位于势能最小点,任何对离子位置造成的扰动都会被偏离最小势场产生的电场力给推回原处。然而,根据 Earnshaw 理论,这样一个电势场是无法构造出来的,对于任意的静电势场,离子的平衡位置在某个方向上一定是不稳定的。

Paul trap 通过动态的电场来解决这个问题,在任意一个时刻,离子在某个方向是稳定的,但是在另外一个方向是不稳定的。当电场以非常快的速度变化时(通常在几十 MHz),在时间平均上,作用在离子上的力是所有方向都有的,这也

被叫做赝势，这样，离子就被束缚在了赝势的最低点上面。有许多的结构都可以实现上面提到的动态势场，由于原理相同，为了数学方面可以描述的更加清晰明白，我们选择经典的四极杆型离子阱作为例子。如图 2.1 所示，四个杆状电极提供了震荡电势以对离子进行径向的束缚，其中两个相对的电极接交变 RF 电压，另外两个相对的电极接固定的直流 DC 电压。沿着轴向有两个端帽电极，可以提供轴向的束缚。

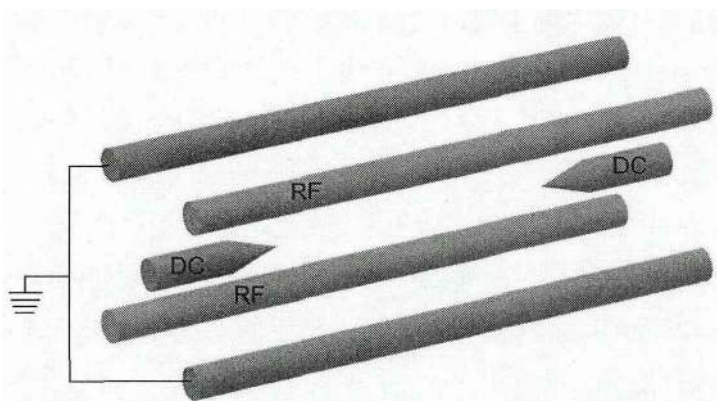


图 2.1 四极杆阱结构示意图。四极杆阱的电极一般使用钨材料制作，其中一组相对的两个电极施加射频电势，另外一组相对的电极接地(或者施加很小的直流电压以补偿由于阱的不对称造成的离子偏移)。两个端帽电极施加直流电压以提供轴向的束缚。

假定施加在 RF 电极上面的电压为 $V(t) = V_0 \cos(\Omega t)$ ，其中 V_0 为 RF 电压的幅度， Ω 为 RF 电压的频率。施加在两个端帽上面的电压都是 U_0 ，相对的两个电极的距离为 $2R$ ，则在 x-y 平面上的电势近似为：

$$V = \frac{1}{2} V_0 \cos(\Omega t) \left(1 + \frac{x^2 - y^2}{R^2} \right) \quad (2.1)$$

与此同时，在轴向的电势可以被近似为：

$$U = \frac{\kappa U_0}{Z^2} \left(z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right) \quad (2.2)$$

其中参数 k 是阱的几何结构因子， Z 是阱的中心到一个端帽的距离。由此我们可以得到在阱中心总的电势为：

$$V_{\text{tot}} = V + U = \frac{1}{2} V_0 \cos(\Omega t) \left(1 + \frac{x^2 - y^2}{R^2} \right) + \frac{\kappa U_0}{Z^2} \left(z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right) \quad (2.3)$$

根据公式 2.3，对电势求梯度可以得出相应的电场强度为：

$$\begin{aligned} E(x, y, z, t) &= -\nabla V_{\text{tot}} \\ &= -V_0 \left(\frac{x\hat{x} - y\hat{y}}{R^2} \right) \cos(\Omega t) - \frac{\kappa U_0}{Z^2} (-x\hat{x} - y\hat{y} + 2z\hat{z}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

然后根据牛顿第二定律，我们可以得出任意一个质量为 m ，带电荷量为 e 的物体的运动方程：

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(x, y, z, t) \quad (2.5)$$

将公式 2.4 带入运动方程，可以得到离子运动的马修斯方程：

$$\ddot{r}_i + \frac{\Omega^2}{4} (a_i + 2q_i \cos[\Omega t]) r_i = 0 \quad (2.6)$$

其中 $i = x, y, z$ 。参数 a_i 和 q_i 表征了在各个方向阱的特性

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{4e\kappa U_0}{mZ^2\Omega^2} & a_y &= -\frac{4e\kappa U_0}{mZ^2\Omega^2} & a_z &= \frac{8e\kappa U_0}{mZ^2\Omega^2} \\ q_x &= \frac{2eV_0}{mR^2\Omega^2} & q_y &= -\frac{2eV_0}{mR^2\Omega^2} & q_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

将这些参数带入马修斯方程，可以得到离子在轴向的运动简化为简谐运动，相应的频率为：

$$\omega_z = \sqrt{\frac{\Omega^2}{4} \frac{8e\kappa U_0}{mZ^2\Omega^2}} = \left(\sqrt{\frac{2e\kappa}{m}} \right) \frac{\sqrt{U_0}}{Z} \quad (2.8)$$

从这个表达式可以看出，离子在阱中的频率一方面与离子的种类和阱的结构有关，另外一方面也与端帽处的电压有关。当参数满足条件 $a_i \ll 1$ ， $q_i \ll 1$ 的时候，马修斯方程 2.6 可以被近似解为：

$$r_i(t) = r_{0i} \cos(\omega_i t + \phi_{S_i}) \left(1 + \frac{q_i}{2} \cos(\Omega t + \phi_M) \right) \quad (2.9)$$

其中 r_{0i} 是离子运动的幅度， ω_i 和 ϕ_{S_i} 是久期运动的频率和相位， ϕ_M 是微运动的相位，久期运动的频率为：

$$\omega_i = \frac{\Omega}{2} \sqrt{a_i + q_i^2/2} \quad (2.10)$$

从离子的运动方程可以看出，离子在电势场中主要进行以 ω_i 为频率的久期运动，同时这个运动被射频电场以频率 Ω 轻微的调制，这个调制也叫做离子的微运动，是离子操作过程中很重要的误差来源，往往需要利用各种技术手段尽可能减小微运动。

由于我们在实验中搭建和使用的是 needle 形离子阱，与传统的四极杆阱有所不同，因此需要进行势场的模拟。目前进行势场模拟常见的有 Comsol multiphysics 等，我们实验室中也有利用 Comsol 进行刀片阱势场模拟的案例（详情参见我组贺冉的博士论文）。在这里我们利用了另外的方案。

我们首先使用 gmash 软件构建出阱的三维结构，并且对其进行有限元分割，分割之后会形成.msh的文件。然后我们把含有阱网格信息的.msh文件利用 python 中的 Bempp 包^[79] 进行处理。Bempp 是一个开源的计算边界问题的包，专门用于解决静电、声学 and 电磁问题。

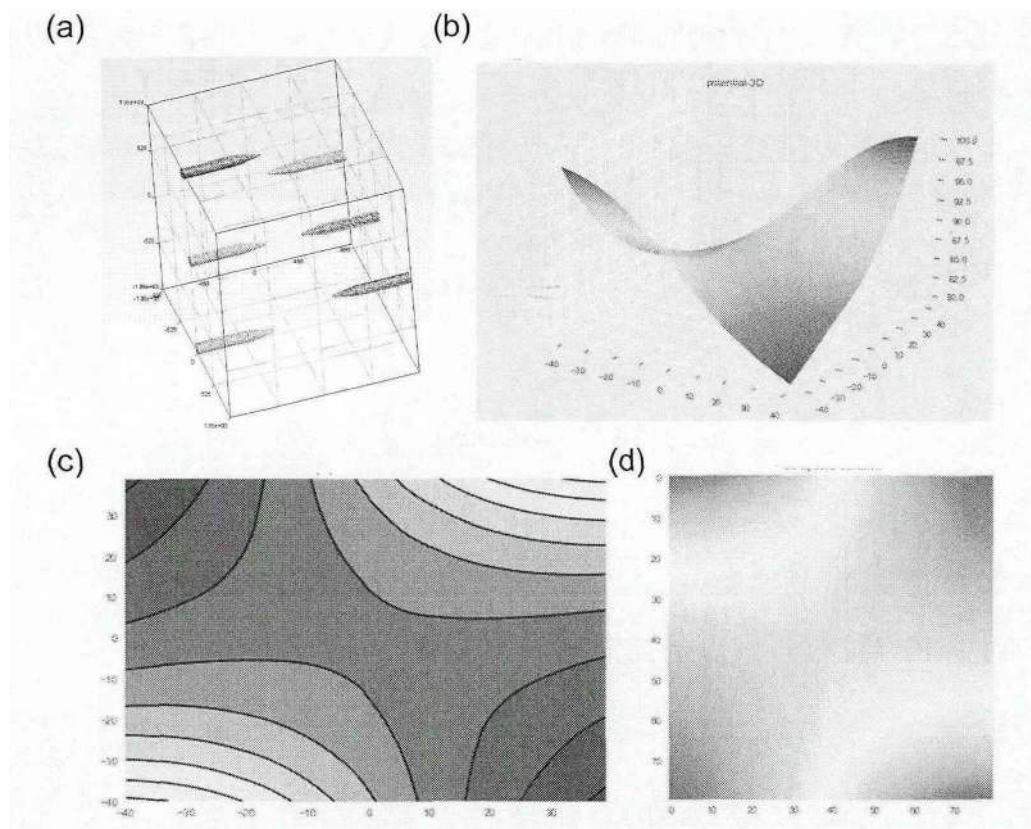


图 2.2 **needle** 形离子阱势场模拟结果。(a) 在 Gmash 软件中绘制并且网格化的 **needle** 结构离子阱。(b) 在给定电压下电势的三维图。(c) 在给定电压下某平面的电势等高线图。(d) 在给定电压下某平面的电势分布图。

通过给定电压求解具有边界条件的电磁场方程可以得到在固定电压下的电势情况，如图 2.2 所示，在给定电压下，离子阱的电势呈现出马鞍面的形状，只能在一个方向对离子进行束缚。当施加的电压以很快的频率进行交变时，整个势阱就呈现出碗状的结构，最终把离子束缚到势阱最小的地方。我们利用阱的结构、 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的参数，假设 RF 电压为 700 V，得到的 z 方向的久期运动频率为 1.07 MHz， x 方向的久期运动频率为 0.9 MHz，与我们最终实验测得的阱频率 $\omega_z = 2.1 \text{ MHz}$ ， $\omega_x = 1.2 \text{ MHz}$ 具有相同的量级，至于具体数目的不同因素有很多，但是最大的原因应该在于求解电势时带入的电压与实际束缚离子时的电压有所区别导致。根据多普勒冷却定律，在每个轴上可以实现的最低能量为：

$$E_{\min} = \frac{\hbar\Gamma}{4} = \hbar\omega(\bar{n} + 1/2) \quad (2.11)$$

其中 Γ 是冷却光的自发辐射率，对于 Yb 元素来说， $\Gamma = 1.23\text{e}8 \text{ /s}$ ，得到的多普勒冷却极限大约在 5 个声子。具体的模拟程序可以参考 Github^[80]。

尽管和离子阱有关的研究曾经获得过两次诺贝尔物理学奖，并且目前被应

用于前沿科技量子信息的探索，但对于 Paul Trap 而言，其束缚原理是比较简单的，因此曾经有很多人做过 homemade 简化离子阱来束缚带电大颗粒^[81]。我和贺冉、钱忠华也曾经基于兴趣自己制作了一个比较简易的离子阱。

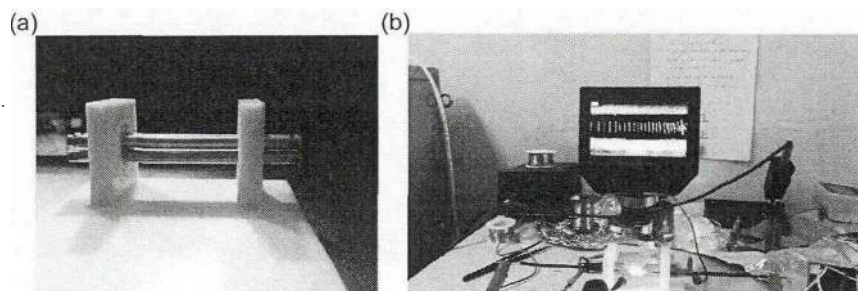


图 2.3 实验室简易离子阱。(a) 自制四极杆离子阱外形图。(b) 离子阱束缚的带电大颗粒。

如图 2.3 所示，整个离子阱电极由铜杆做成，通过 3D 打印的支架进行固定。我们在这里尝试束缚的花粉孢子，通过摩擦后送入束缚区域。由于孢子体积大，质量重，不需要进行真空隔离。利用升压变压器，我们将市电升压至 1000-2000 V，然后连接到阱的电极上。此处要注意的是，由于高压十分危险，最好在电路中串联一个高压绝缘电阻。

2.1.2 实验系统搭建

虽然 homemade 离子阱看上去比较简单，但是搭建一台能够正常工作，并且各项参数正常的离子阱可不是一件容易的事情。一台可以正常做实验的离子阱主要包括阱、光路和电学部分，需要所有的部分都没有问题并且协同一致，才能进行一些基本物理问题探索或者实用技术演示。接下来我会对这三个部分分别进行一些介绍。

1. 阱及真空

由于囚禁势阱深度有限并且单个离子的质量很轻，如果在空气中会很容易被快速运动的空气分子碰撞从而脱离束缚，因此我们需要在超高真空中对离子进行囚禁。如图 2.4 所示，只有当系统的真空度达到 10^{-11} Torr 量级时，离子的束缚时间才能达到小时量级，才能满足我们进行实验的要求。

如图 2.5 所示，离子阱的真空系统主要有固定阱的携带真空窗口的腔室部分，真空连接部分和真空抽取维护泵体部分组成。其中分子泵及未被画出的前级机械泵用来抽取真空，离子泵及钛升华泵主要用于在阀门关闭后继续抽取真空设备内壁及阱装置中由于放气产生的气体。整个真空装置的操作流程如下：

- 1). 首先进行真空部件的清洗，新买的部分真空部件如五通等无玻璃器件可以预先烘烤一下，以除去部件内壁中的氢气等。

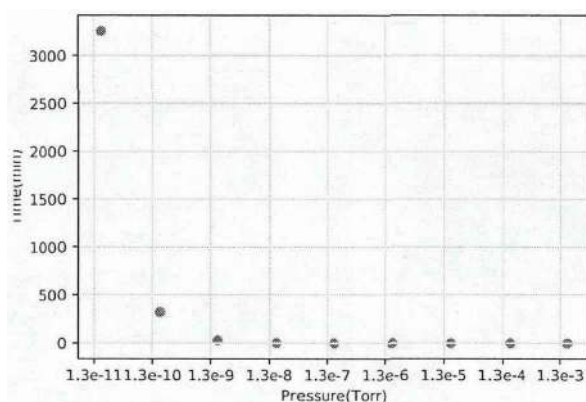


图 2.4 典型离子阱装置中压强与离子束缚时间的关系。如果想要离子束缚时间在小时量级，则系统的真空度需要达到 $1e-11$ Torr。

- 2). 将阱组装完成后，在腔室内部进行固定。然后用真空导线将阱的所有电极连接并且引出，此处可以在导线上套一些绝缘陶瓷管，以防止导线距离真空部件太近导致高压 RF 放电击穿导线。
- 3). 将所有的真空部件利用真空螺丝拧紧固定，注意部件的连接之处不要留下孔隙防止漏气。将上一步引出的导线连接到真空 feedthrough 上。
- 4). 当所有真空部件连接完毕后，在阀门部分连接涡轮分子泵，然后再连接机械泵。启动时，先启动机械泵，机械泵可以将真空系统抽取到 $1e-5$ Torr 左右。此时可以启动分子泵，分子泵的启动需要前面形成负压，因此一定注意不要在机械泵没有启动时开启。分子泵可以将系统真空度抽取到 $1e-9$ Torr 左右。
- 5). 开启真空规，当真空度达到 $1e-9$ Torr 左右时，可以开始烘烤。烘烤是利用加热带将整个系统缠绕包裹，然后通过温控程序以每小时 5 度的速度升至 220 度左右。烘烤需要维持两个星期左右，并且注意升温降温过程不可过于迅速，以防止腔室的窗口破裂。在这个过程中会观察到真空度先上升再下降，有可能达到 $1e-6$ Torr，然后逐渐下降。这是因为高温下系统中的气体被激发出来，然后被真空泵抽走而导致的。
- 6). 当烘烤接近尾声时，需要给离子泵及钛升华泵进行放气，放气的本质其实是在高温下开启设备，使得埋附在吸附剂上面的气体跑出被真空泵吸走。每当放气时会观察到真空度有急速的升高，然后急速下降。放气要进行多次，每次需要等真空度完成下降后才能进行下

一次放气。当放气完成后，关紧阀门，就可以开始降温了。以每小时10度的速度降至室温。此时没有问题的话系统真空度可以达到 $1\text{e-}11$ Torr 的量级。

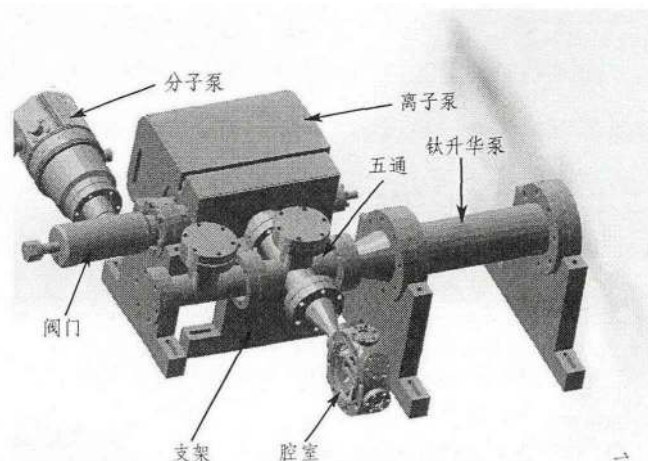


图 2.5 离子阱系统的真空设备。真空系统主要由腔室、真空连接件及泵体组成。

当然在实际的真空抽取过程中往往会遇到各种各样的问题，我曾经遇到过的问题就包括：(1). 升温过程不均匀导致真空窗口破裂。(2). 加热带捆绑不均匀紧密导致腔室升温不够，最终的真空度达不到 $1\text{e-}11$ Torr 量级。(3). 真空导线放置过于靠近真空壁导致放电击穿，最终需要重新再来一次。系统最终的真空度我们可以通过真空规来查看，也可以通过囚禁离子的时间进行大体估算。如果真空度没达到要求，可能需要利用检漏仪进行检漏，小的漏洞可以使用真空胶水进行修补。

在图 2.5 中没有画出来的还有一个重要的部分是螺旋谐振器 (helical)。它的主要作用是进行阻抗匹配以使得外部的 RF 射频可以传输到阱的电极上面，同时由于 Q 值较高 (通常在 200 左右)，helical 也有电压放大和射频滤波的功效。

2. 操控及收集光路

当系统搭建完成后，就要开始准备离子的抓取、操控及荧光收集光路了。 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子具有 $1/2$ 的核自旋，因此需要施加适当的静态磁场，一方面定义量子化轴，另外一方面使内部 S 基态的超精细能级形成劈裂。为了产生均匀而又合适的静磁场，我们利用类似亥姆霍兹线圈的方法，但是通过两个由小磁铁围成的环状结构代替线圈产生磁场，最终在离子位置产生的磁场大约为 9 高斯。这样可以避免由于市电的扰动对磁场施加额外的外界干扰，从而增加系统的相干时间。我们使用 369 nm 和 399 nm 的激光进行双光子激发，剥离掉 Yb 原子的一个电子从而形成离子。当然也有直接使用激光电离的方式进行离子化的实验室^[82]。当

完成离子化并且通过射频电场束缚住离子之后，需要马上对离子进行激光冷却降低其能量，防止离子跑出势阱。如图 2.6， $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的冷却需要两束 369 nm 激光、一束带有边带的 935 nm 激光和一束 638 nm 激光。为了在 x, y, z 三个方向对离子同时进行激光冷却，369 nm 的入射激光需要与阱的三个轴都不平行，从而保证其在三个方向都有分量。尽管我们没有刻意去进行测试，但是我们系统囚禁的离子，在实现多普勒冷却的情形下，离子的囚禁时间可以超过 24 小时，在没有多普勒冷却的情况下，离子也可以囚禁超过 30 分钟以上。

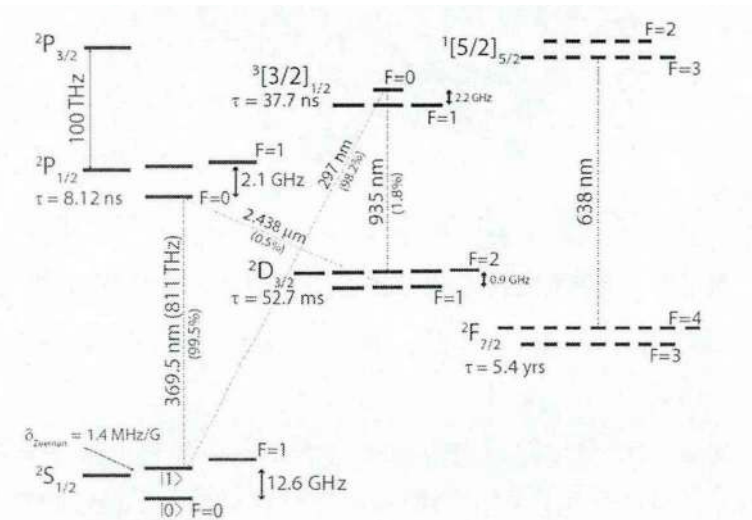


图 2.6 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的能级图 (PhD thesis of Jonathan Albert Mizrahi, Christopher Monroe's group). $^2\text{S}_{1/2}$ 和 $^2\text{P}_{1/2}$ 能级跃迁在 369 nm 附近，形成一个循环跃迁，可以用来进行有效的多普勒冷却。其中处于 $^2\text{P}_{1/2}$ 的电子会有 0.5% 的概率落到 $^2\text{D}_{3/2}$ 态上面，因此此处需要有一束 935 nm 的激光将其回泵。为了将 D 能级的所有超精细结构都进行回泵，还需要在 935 nm 中加入一个 3.07 GHz 的边带。为了防止电子陷入 $^2\text{S}_{1/2}$ 能级劈裂后的基态，在 369 nm 的冷却激光中也需要加入一个 14.7 GHz 的边带。真空中的背景气体会会有较小的概率将电子碰撞到 F 能级，因此还需要一个 638 nm 的激光进行回泵。

完成离子的束缚和冷却之后，需要利用成像系统将离子发出的荧光收集并且成像到 CCD 上观察，或者成像到光电倍增管 (PMT) 上面进行观察。我们参考了美国马里兰大学的 Monroe 研究组的设计，根据我们组实际阱的结构设计并组装了数值孔径为 0.4 的成像物镜。如图 2.8 所示，整个物镜利用 Zemax 软件在给定初始条件下进行优化和表征。我们使用 6 片熔融石英透镜组合成物镜成像系统，其中中间的四片镜片是一组对称结构，可以从 Thorlabs 直接买到，两边的两片镜片是委托逐日光电代为加工，然后寄回来后自行组装测试的。整个物镜的直径在 25 mm，工作距离 18 mm，平行光出射，镀 @369 nm 增透膜。在衍射能量

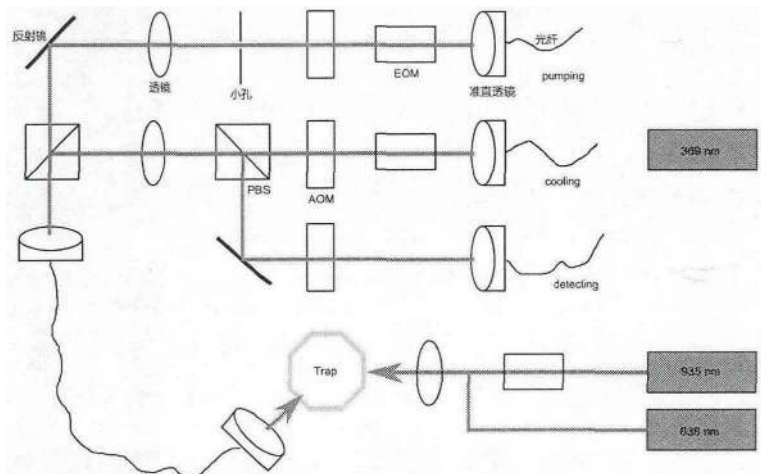


图 2.7 离子冷却和探测光路简图。对于离子的光路需要加入 AOM 作为开关控制每束激光的开关时间。

图上面我们可以比较清晰的看到，90% 的能量都集中在了半径 $1\ \mu\text{m}$ 以内，符合我们的使用要求。

对于物镜的外部机械结构我们参考了文献^[83]，所有的镜片放置在不锈钢的镜筒中并用 POM 材质的压圈隔开设定的距离。最后利用不锈钢压圈将整组镜片进行固定。在物镜的组装过程中要注意每一片透镜的正反，否则对于成像会有非常大的影响。尽管我们在设计时进行了公差分析，提供了一定的组装冗余度（如镜片偏心、倾斜、距离等），但是由于自行组装，还是可能出现物镜成像效果达不到预期的现象。

我们在物镜后面放置了一个焦距为 500 mm 的透镜对离子进行成像，离子发出的荧光经过物镜和透镜聚焦后，可以由一个电动翻转架控制其入射到 CCD 还是 PMT 上面。整个成像系统的放大倍数为 30。

3. 微波及时序

在完成了离子的有效囚禁、荧光收集后，我们需要构建系统的微波操作系统和时序系统。 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子 $^2\text{S}_{1/2}$ 能级上的超精细能级 $F = 1, m_F = 0$ 和 $F = 0$ 的能级差为 12.64 GHz 左右，为了方便对离子的有效操控，我们通过混频的方式，将一个任意波形发生器产生的 200 MHz 信号与射频源产生的 12.42 GHz 的微波信号进行混频，然后通过高通滤波滤掉混频后的低频部分，随后将信号中的高频部分通过微波放大器进行放大，再利用微波喇叭将其传播到离子上面。

由于微波放大器有一个工作线性区间，只有当输入的微波功率在其线性区间内的时候，输入与输出才呈现出线性的关系。并且常规的微波放大器的放大能力会有一定的抖动。我们曾经测试过，使用 Mini-Circuits 的微波放大器，放大器产生的功率抖动峰谷值可以达到 1%。这对于一些需要对微波进行精细调控的实

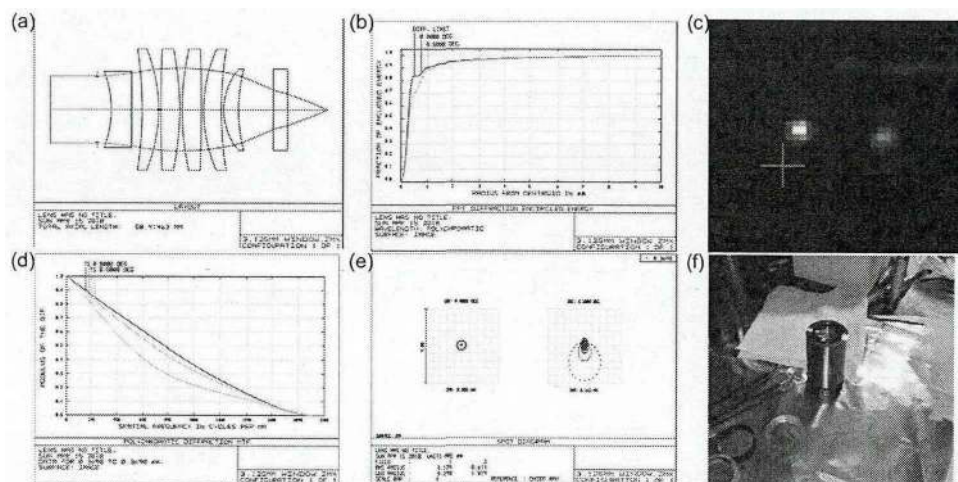


图 2.8 离子荧光收集物镜。(a). 物镜 Zemax 设计图纸, 根据 4 mm 的熔融石英玻璃窗口进行优化, 平行光输出。(b). 物镜成像的衍射圈内能量图, 在 0.5 度的视场角下靠近衍射极限性能。(c). 物镜成像的 MTF 性能。(d). 物镜成像点阵图。(e). 使用该物镜对两离子进行成像, 可以看到明显的衍射光环。(f) 自己组装完成的物镜外观图。

验来说是非常不利的。当然我们也探索出了一些能够在一定程度上解决这些问题的办法。对于放大器工作不线性的问题, 我们可以对输入的微波的电压值与功率的关系进行重新标定, 换言之, 在线性工作区间内, 我们控制射频源输出的电压绝对值与最终作用到离子上面的微波功率是线性关系, 这就需要我们重新拟合射频源的输出电压与最终微波功率的关系, 从而给出一条横轴是微波功率, 纵轴是电压的曲线, 根据这条曲线去按照想要的微波功率反推需要设定的电压值。而微波功率抖动的问题其实也困扰了我们很久, 最终我们利用时间平均的方法来减小这个问题造成的误差。也就是说, 我们在一段较长的时间内重复进行某次实验, 然后取这段时间的平均值作为结果。

由于对于离子的实验往往需要光学和微波的快速切换, 我们使用 Spin-Core 的 PulseBlasterESR-PRO 作为脉冲发生器对离子的实验时序进行控制。PulseBlasterESR-PRO 使用 500 MHz 的时钟, 其时钟分辨率和最短脉冲时间都可以达到 2 ns, 最大关键字内存 4 k, 足以满足一般的离子、NV-center 和 NMR 等系统的时序操控 (超导系统由于其超快的门时间, 往往在 ns 量级, 需要更快的设备)。在我们的实验系统中, 所有光路的开关都是通过声光调制器 (AOM) 实现的, 微波的开关则通过一个微波 switch 实现。在实验过程中, 首先通过电脑将时序传输到 PulseBlaster, 然后其开始通过 TTL 有序的控制各个器件的执行。整个实验中各个设备的连接情况参考图 2.9。

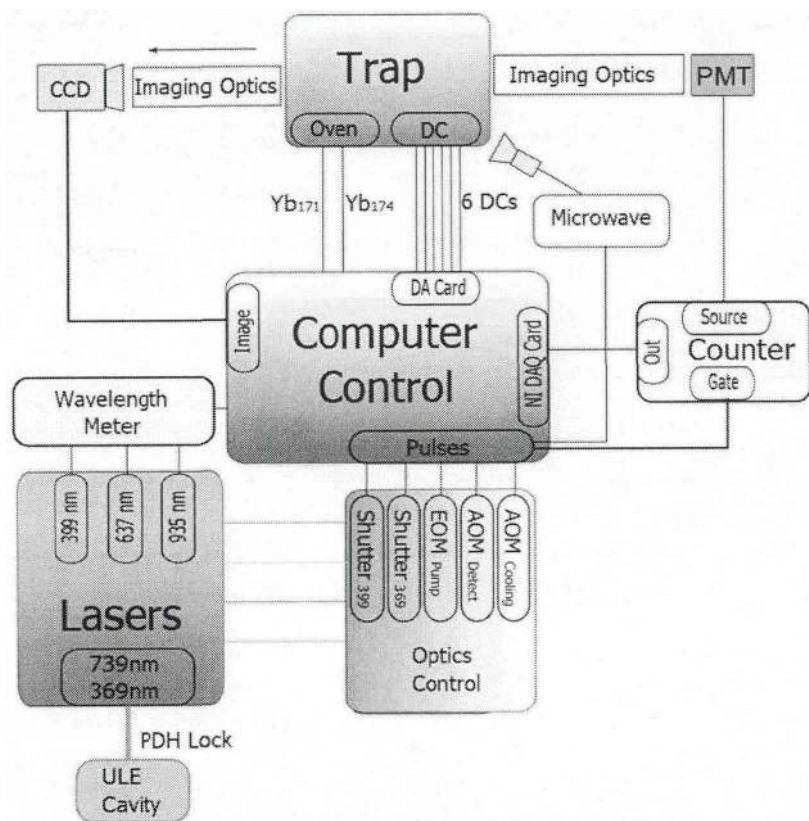


图 2.9 离子阱操控实验系统 (图片来自于我组崔金明博士博后出站报告)。通过电脑产生实验脉冲时序进行实验，在这个过程中离子发出的荧光通过 PMT 收集并进入数据采集卡收集，得到的粗数据传入电脑进行进一步的处理。

2.2 初态制备、操作及测量

离子进行冷却后，可以实现更好的相干性，并且可以进行对编码在离子超精细能级上面的量子比特进行操作。

首先需要对量子比特进行初始化，我们使用光泵浦的方法将电子泵浦到 $^2S_{1/2}, F = 0$ 的态上面。经过 2.1 GHz EOM 调制的 369 nm 激光共振耦合 $^2S_{1/2}, F = 1$ 和 $^2P_{1/2}, F = 1$ ，而从 $^2P_{1/2}, F = 1$ 态掉落的电子有 1/3 的概率落到 $^2S_{1/2}, F = 0$ ，也有一定的概率落到 $^2D_{3/2}, F = 2$ 态，因此在初始化过程中 935 nm 的激光也需要一直开启。根据泵浦光强弱的不同，电子可以在 20 μs 内以 99.5% 的概率完成初始化。

接下来我们可以通过微波对量子比特进行相干操控。令 $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle = |0\rangle$ ， $|^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle = |1\rangle$ ，离子本身的哈密顿量为 $H_a = -\frac{\hbar}{2}\omega_a\sigma_z$ ，其中 ω_a 为两能级的能级差频率。超精细能级跃迁为磁偶极跃迁，磁偶极距为 $\vec{\mu} = \sum_{ij} |i\rangle\langle j| \langle i|\vec{\mu}|j\rangle = \vec{e}\mu_{01}|0\rangle\langle 1| + \vec{e}\mu_{10}|1\rangle\langle 0|$ ，其中 $\mu_{01} = \mu_{10}^*$ 。当电磁波

$\vec{B} = \vec{n}B_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ 与离子中的二能级结构相互作用时, 其相互作用哈密顿 $H_I = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, 展开后成为:

$$\begin{aligned} H_I &= -\vec{\epsilon}(\mu_{01}|0\rangle\langle 1| + \mu_{10}|1\rangle\langle 0|) \cdot \vec{n} \cdot B_0 \cos(\omega t + \phi_0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\hbar\Omega \cos(\omega t + \phi_0) \\ -\hbar\Omega^* \cos(\omega t + \phi_0) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中我们定义了 $\Omega = \frac{\vec{\epsilon}\vec{n}\mu_{01}B_0}{\hbar}$, 总的哈密顿量为:

$$H = H_0 + H_I = -\hbar \begin{bmatrix} \frac{\omega_a}{2} & \Omega \cos(\omega t + \phi_0) \\ \Omega^* \cos(\omega t + \phi_0) & -\frac{\omega_a}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

在自然坐标系下的量子态:

$$|\psi\rangle = C_0(t)|0\rangle + C_1(t)|1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (2.14)$$

将其带入薛定谔方程:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.15)$$

可以得到:

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{C}_0(t) \\ \dot{C}_1(t) \end{bmatrix} = H(t) \begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

由于上述方程不容易进行求解, 需要变化到旋转坐标系上面。即:

$$|\psi(t)\rangle = |\tilde{\psi}\rangle(t) = U|\psi(t)\rangle = \tilde{C}_0(t)|0\rangle + \tilde{C}_1(t)|1\rangle \quad (2.17)$$

此时薛定谔方程变为:

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{\tilde{C}}_0(t) \\ \dot{\tilde{C}}_1(t) \end{bmatrix} = \tilde{H}(t) \begin{bmatrix} \tilde{C}_0(t) \\ \tilde{C}_1(t) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

。

将 $|\psi(t)\rangle = U^\dagger |\tilde{\psi}\rangle(t)$ 带入上面的方程, 可以得到:

$$i\hbar \dot{U}^\dagger |\tilde{\psi}\rangle(t) + i\hbar U^\dagger |\dot{\tilde{\psi}}\rangle(t) = H U^\dagger |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (2.19)$$

联合方程 $i\hbar |\dot{\tilde{\psi}}\rangle(t) = \tilde{H}(t) |\tilde{\psi}\rangle(t)$, 可以得到变换后的哈密顿量:

$$\tilde{H}(t) = U H U^\dagger - i\hbar U \dot{U}^\dagger \quad (2.20)$$

选择不同的变换 U 就意味着进入了不同的参考系, 一般可以选择原子能级坐标系:

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{i\omega_0 t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_1 t} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

和微波的坐标系:

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i}{2}\omega t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\omega t} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

我们选择进入微波的坐标系, 并且将公式 2.13 扩展成更加广泛的形式:

$$H = -\hbar \begin{bmatrix} \frac{\omega_a}{2} & \Omega \cos(\Phi(t) + \phi(t)) \\ \Omega^* \cos(\Phi(t) + \phi(t)) & -\frac{\omega_a}{2} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

其中 $\Phi(t) = \omega t + F(t)$, $\phi(t) = \phi_1(t) + \phi_0$ 。则变换矩阵:

$$U = e^{\frac{iH_M t}{\hbar}} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i}{2}\Phi(t)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\Phi(t)} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

变换矩阵共轭的导数:

$$U^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{i}{2}\dot{\Phi}(t)e^{\frac{i}{2}\Phi(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2}\dot{\Phi}(t)e^{-\frac{i}{2}\Phi(t)} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

变换后的哈密顿量 $\tilde{H} = U H U^\dagger - i\hbar U \dot{U}^\dagger$, 带入上面的方程后可以得到:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x) &= -\hbar \begin{bmatrix} \frac{\omega_a}{2} - \frac{1}{2}\dot{\Phi}(t) & \frac{\Omega}{2}e^{i\phi(t)} \\ \frac{\Omega^*}{2}e^{-i\phi(t)} & -\frac{\omega_a}{2} + \frac{1}{2}\dot{\Phi}(t) \end{bmatrix} \\ &= \hbar \begin{bmatrix} \frac{1}{2}f(t) & -\frac{\Omega}{2}e^{i\phi(t)} \\ -\frac{\Omega^*}{2}e^{-i\phi(t)} & -\frac{1}{2}f(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

其中 $\dot{\Phi}(t) = \omega_0 + F(t) = \omega_0 + f(t)$ 。将上面的方程写为泡利矩阵表达的形式, 就可以得到我们日常在论文中看到的两能级哈密顿量:

$$\tilde{H}(t) = \frac{1}{2}f(t) \cdot \sigma_z + \left(-\frac{\Omega}{2} \cos \phi(t) \cdot \sigma_x\right) + \left(\frac{\Omega}{2} \sin \phi(t) \sigma_y\right) \quad (2.27)$$

在共振情形下, $\Phi(t) = \omega_a t$, $F(t) = 0$, $\tilde{H} = \frac{\hbar}{2}(-\Omega \cos \phi \sigma_x + \Omega \sin \phi \sigma_y)$ 。由于在当时学习这部分的时候, 总是被旋波近似 (RWA), 坐标变换绕的比较迷糊, 因此这里较为详细的记录了一下推导过程。

量子态被探测读出是通过一束与 $^2S_{1/2}, F=1$ 和 $^2P_{1/2}, F=0$ 共振的 369 nm 激光来实现的。当电子处于 $|0\rangle$ 态的时候, 由于激光的线宽远小于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的能级宽度, 因此电子不会被激发, 我们也观察不到光子。而当光子位于 $|1\rangle$ 态的时候, 由于 $^2P_{1/2}, F=0$ 的能级寿命是 $\tau = 8.12$ ns, 离子会以 20 MHz 的速度往外辐射光子。由于离子辐射光子的方向是四面八方的, 并且整个物镜收集系统会有一些损耗和反射, 最终有效的光子收集效率实际上只有 2% 左右。所以在实际的实验中, 离子的探测时间往往在几百个微秒左右, 通过打到 PMT 上面的光子数目来判断目前电子位于 $|0\rangle$ 还是 $|1\rangle$ 态。我们通过阈值判断的方法, 设定

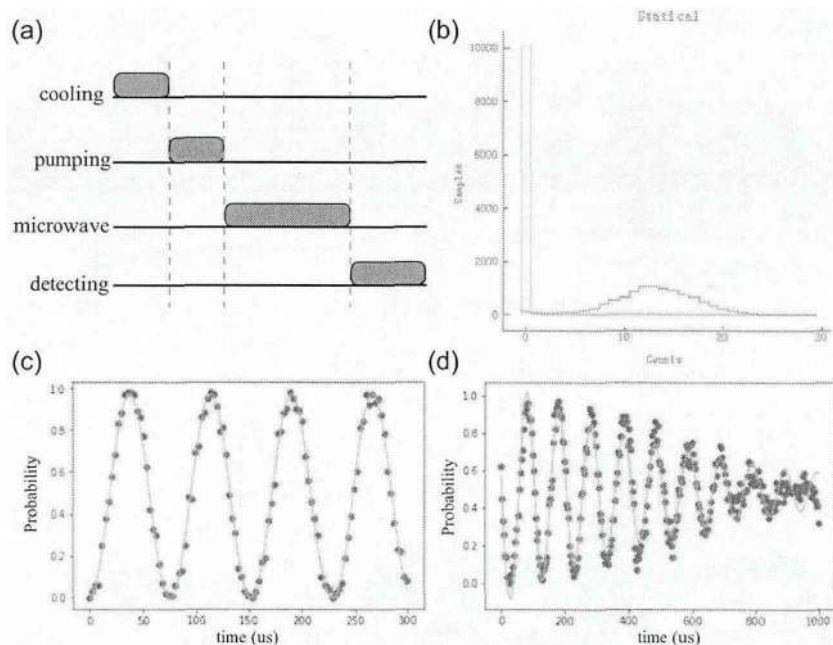


图 2.10 微波相干操控量子比特。(a) 微波相干操控量子比特的时序图。整个过程需要离子多普勒冷却、光泵浦进行初始化、微波相互作用、光探测四个步骤。当最后一步完成后，离子可能会被微波加热，因此在新一轮的实验过程中也需要首先进行冷却。(b) 离子荧光统计。黄色是制备 $|0\rangle$ 态时的光子数统计分布图。绿色是制备 $|1\rangle$ 态时的光子数统计分布图。(c) 量子比特拉比震荡激发态概率随时间的变化。(d) 量子比特 Ramsey 实验，通过 Ramsey 实验可以得系统的相干时间。

一个阈值 (阈值的设定需要通过泊松分布分别去拟合 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态的光子分布, 然后让两个分布交叉最小的点作为阈值), 当收集到的光子数大于阈值时, 我们判断离子处于 $|1\rangle$ 态, 而当收集到的光子数小于等于阈值时, 我们判断离子处于 $|0\rangle$ 态。当然也有其他的方法可以进行态的判断。例如我组在 2019 年实现的利用机器学习的方法来判断离子的亮暗^[84], 也取得了很好的效果。但是通过阈值判断量子比特的态会有一定的误差。如图 2.10(b) 所示, 当离子处于亮态时, 由于荧光收集系统效率有限, 因此会有一定的概率收集不到光子从而判断成为暗态; 同样, 当离子处于暗态时, 由于系统杂散光和 PMT 杂散光的影响, 可能会显示出收集到了光子, 从而误判成亮态。

$^{171}\text{Yb}^+$ 离子的超精细能级中, 由 $^{1/2}\text{S}_2, F=0$ 和 $^{1/2}\text{S}_2, F=1, m_F=0$ 构成的量子比特对于磁场是一阶不敏感的, 因此其相干时间特别长, 在动力学解耦和磁屏蔽等技术下, 可以达到小时量级的相干时间^[85]。但是对于由塞曼能级构成的量子比特 $^{1/2}\text{S}_2, F=0$ 和 $^{1/2}\text{S}_2, F=1, m_F=1$, 是与磁场一阶相关的 $\delta_{\text{zeeman}} = 1.4 \text{ MHz/G}$, 因此受到外界磁场噪音的影响非常大。我们曾经利用自行缠绕线圈作为磁传感器来测试实验室环境的磁场噪音, 如图 2.11 所示, 离子阱系统附近的噪

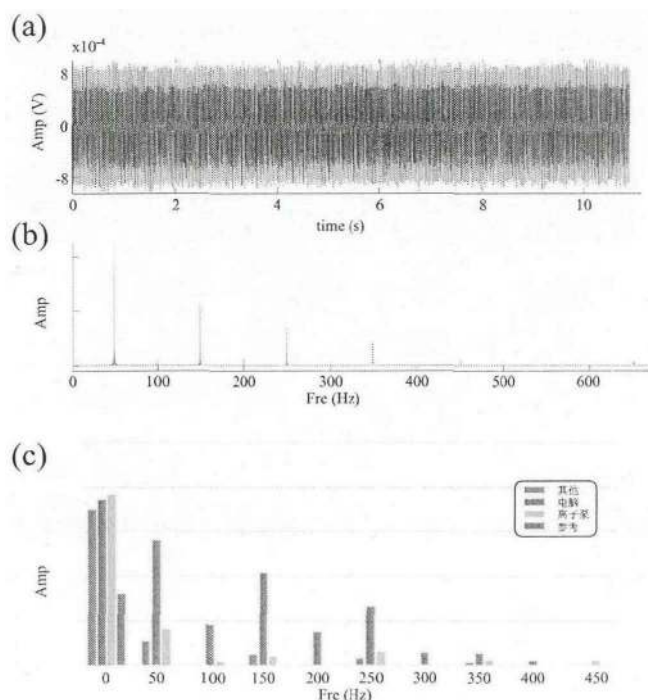


图 2.11 实验室噪声环境。(a) 实验室磁场噪声在时域上的表现。(b) 实验室噪声在频域上的表现。(c) 实验室内部主要噪声源对离子阱系统附近的影响情况。

声主要分布在 50 Hz 及其倍数上面, 应该主要来源于市电工频噪音。同时我们分别测试了实验室各个仪器对于噪音的贡献, 发现实验室内的电脑主机是对于噪音贡献最大的仪器, 第二大的是离子泵, 其他的仪器产生的影响相对较小。坡莫合金具有很高的磁导率, 可以对磁场进行有效的屏蔽^[86]。为了进一步摒除掉外界磁场对实验系统的干扰, 进一步提高系统的相干时间, 如图 2.12, 我们利用 1.5 mm 厚的 1J85 坡莫合金拼装了一个屏蔽罩子将整个试验系统进行了密封。由于实验设备早已搭建完成, 因此屏蔽罩子并没有很好的将系统完好的密封, 其中系统底部和一些连接的边角部分都没能进行有效的遮挡, 同时为了部分光路和电线能穿进罩子里, 罩子上面还挖有一些小孔。尽管整个屏蔽装置非常的简陋, 但是依然起到了不错的作用。在屏蔽之前, 通过 Ramsey 实验测得的塞曼能级的相干时间只有 160 μs 左右, 添加屏蔽装置后, 塞曼能级的相干时间达到了 600 μs 以上, 比以前提升了四倍有余。

2.3 双光子拉曼操作声子

尽管我们可以使用共振微波对离子里面定义为量子比特的两个能级进行相干操控, 但是由于发射微波的喇叭位于真空外面, 作用到离子上面的能量有限, 并且由于微波场覆盖了所有的离子, 不是很方便对离子进行单独寻址 (我们当然

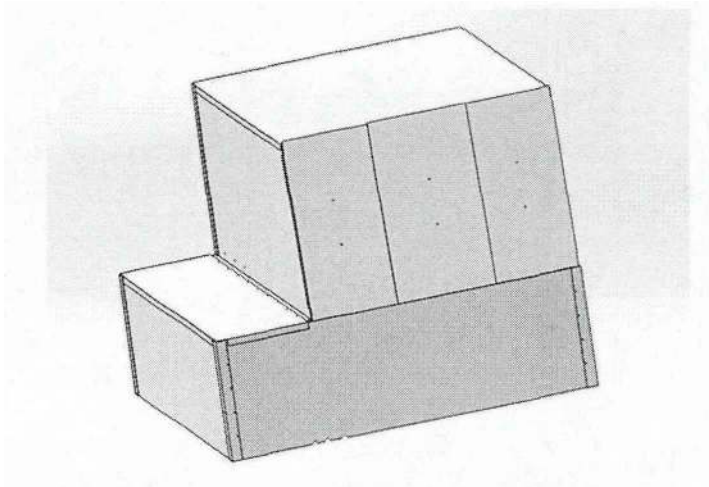


图 2.12 离子阱系统磁屏蔽装置。使用拼装的坡莫合金覆盖住实验设备以提高系统的相干时间。

可以通过梯度磁场进行寻址，但也相应的增加了实验难度)。出于这些原因，目前国际上普遍使用两束激光，通过受激拉曼跃迁 (STIRAT) 的方法完成离子与运动模式的纠缠。

STIRAT 是一个两能级与第三个辅助能级形成的 Λ 系统的两光子过程。假定两束激光产生的电场为：

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= \vec{\epsilon}_0 \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{x} - \omega_0^L t + \phi_0), \\ \vec{E}_1 &= \vec{\epsilon}_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega_1^L t + \phi_1),\end{aligned}\quad (2.28)$$

其中 $\vec{\epsilon}_0$ 和 $\vec{\epsilon}_1$, $\vec{k}_0$ 和 $\vec{k}_1$ 为波矢，相位 ϕ_0 和 ϕ_1 可以通过 AOM 进行调节。当两束激光与离子进行相互作用时，其相互作用哈密顿量为：

$$\begin{aligned}H_I &= -\vec{d} \cdot \vec{E}(t) \\ &= -[\bar{d}_{0e}|0\rangle\langle e| + \bar{d}_{1e}|1\rangle\langle e| + \bar{d}_{e0}|e\rangle\langle 0| + \bar{d}_{e1}|e\rangle\langle 1|] \cdot [\vec{E}_0 + \vec{E}_1]\end{aligned}\quad (2.29)$$

其中 $\vec{d}$ 为原子的电偶极矢量 $\bar{d}_{ij} = \langle i|\vec{d}|j\rangle$ ($i, j = \{0, 1, e\}$)。离子本身的哈密顿量为 $H_0 = \omega_0|0\rangle\langle 0| + \omega_1|1\rangle\langle 1| + \omega_e|e\rangle\langle e|$ ，并且波函数 $\psi(t) = c_0(t)|0\rangle + c_1(t)|1\rangle + c_e(t)|e\rangle$ 。将总的哈密顿量 $H = H_0 + H_I$ 带入薛定谔方程，可以得到波函数系数

与系统参数之间的关系:

$$\begin{aligned}
 i\dot{c}_0(t) &= \omega_0 c_0(t) - \\
 &\quad \bar{d}_{0e} c_e(t) \cdot \left[\bar{\epsilon}_0 \cos(\bar{k}_0 \cdot \bar{x} - \omega_0^L t + \phi_0) + \bar{\epsilon}_1 \cos(\bar{k}_1 \cdot \bar{x} - \omega_1^L t + \phi_1) \right] \\
 i\dot{c}_1(t) &= \omega_1 c_1(t) - \\
 &\quad \bar{d}_{1e} c_e(t) \cdot \left[\bar{\epsilon}_0 \cos(\bar{k}_0 \cdot \bar{x} - \omega_0^L t + \phi_0) + \bar{\epsilon}_1 \cos(\bar{k}_1 \cdot \bar{x} - \omega_1^L t + \phi_1) \right] \\
 i\dot{c}_e(t) &= \omega_e c_e(t) - \\
 &\quad [\bar{d}_{e0} c_0(t) + \bar{d}_{e1} c_1(t)] \cdot \left[\bar{\epsilon}_0 \cos(\bar{k}_0 \cdot \bar{x} - \omega_0^L t + \phi_0) + \bar{\epsilon}_1 \cos(\bar{k}_1 \cdot \bar{x} - \omega_1^L t + \phi_1) \right]
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

在原子能级坐标系中, 我们定义:

$$\begin{aligned}
 C_0(t) &= c_0(t) e^{i\omega_0 t} \\
 C_1(t) &= c_1(t) e^{i\omega_1 t} \\
 C_e(t) &= c_e(t) e^{i\omega_e t}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

并将其带入 2.30, 并将公式中的余弦项展开成指数形式, 可以得到:

$$\begin{aligned}
 i\dot{C}_0(t) &= -\frac{1}{2} \bar{d}_{0e} C_e(t) e^{-i\omega_0 t} \cdot \left[\bar{\epsilon}_0 \left(e^{i(\bar{k}_0 \cdot \bar{x} - \omega_0^L t + \phi_0)} + e^{-i(\bar{k}_0 \cdot \bar{x} - \omega_0^L t + \phi_0)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\epsilon}_1 \left(e^{i(\bar{k}_1 \cdot \bar{x} - \omega_1^L t + \phi_1)} + e^{-i(\bar{k}_1 \cdot \bar{x} - \omega_1^L t + \phi_1)} \right) \right] \\
 i\dot{C}_1(t) &= -\frac{1}{2} \bar{d}_{1e} C_e(t) e^{-i\omega_1 t} \cdot \left[\bar{\epsilon}_0 \left(e^{i(\bar{k}_0 \cdot \bar{x} - \omega_0^L t + \phi_0)} + e^{-i(\bar{k}_0 \cdot \bar{x} - \omega_0^L t + \phi_0)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\epsilon}_1 \left(e^{i(\bar{k}_1 \cdot \bar{x} - \omega_1^L t + \phi_1)} + e^{-i(\bar{k}_1 \cdot \bar{x} - \omega_1^L t + \phi_1)} \right) \right] \\
 i\dot{C}_e(t) &= -\frac{1}{2} [\bar{d}_{e0} C_0(t) e^{i\omega_0 t} + \bar{d}_{e1} C_1(t) e^{i\omega_1 t}] \cdot \left[\bar{\epsilon}_0 \left(e^{i(\bar{k}_0 \cdot \bar{x} - \omega_0^L t + \phi_0)} + e^{-i(\bar{k}_0 \cdot \bar{x} - \omega_0^L t + \phi_0)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\epsilon}_1 \left(e^{i(\bar{k}_1 \cdot \bar{x} - \omega_1^L t + \phi_1)} + e^{-i(\bar{k}_1 \cdot \bar{x} - \omega_1^L t + \phi_1)} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

应用旋转波近似忽略高频震荡项, 上式可以简化为:

$$\begin{aligned}
 i\dot{C}_0(t) &= \frac{1}{2} C_e(t) \left(g_{00} e^{-i\Delta t} + g_{01} e^{-(\Delta + \mu + \omega_0)t} \right) \\
 i\dot{C}_1(t) &= \frac{1}{2} C_e(t) \left(g_{10} e^{-i(\Delta - \omega_0)t} + g_{11} e^{-(\Delta + \mu)t} \right) \\
 i\dot{C}_e(t) &= \frac{1}{2} C_0(t) \left(g_{00}^* e^{i\Delta t} + g_{01}^* e^{(\Delta + \mu + \omega_0)t} \right) + \frac{1}{2} C_1(t) \left(g_{10}^* e^{i(\Delta - \omega_0)t} + g_{11}^* e^{(\Delta + \mu)t} \right)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

其中 $g_{\alpha\beta}$ 代表的是单光子耦合系数:

$$\begin{aligned} g_{00} &= \bar{d}_{0e} \cdot \vec{\varepsilon}_0 e^{-i(\vec{k}_0 \cdot \vec{x} + \phi_0)} \\ g_{01} &= \bar{d}_{0e} \cdot \vec{\varepsilon}_1 e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} + \phi_1)} \\ g_{10} &= \bar{d}_{1e} \cdot \vec{\varepsilon}_0 e^{-i(\vec{k}_0 \cdot \vec{x} + \phi_0)} \\ g_{11} &= \bar{d}_{1e} \cdot \vec{\varepsilon}_1 e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} + \phi_1)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

我们可以通过绝热消除的方法来求解方程 2.33 (关于绝热消除方法的推导可以参考 Monreo 组 Mizrahi 的博士论文), 可以得到在相互作用绘景下的哈密顿量:

$$H_{int} = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} (|g_{00}|^2 + |g_{01}|^2) & g_{00}g_{11}^* e^{i\mu t} \\ g_{00}^*g_{11} e^{-i\mu t} & (|g_{10}|^2 + |g_{11}|^2) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

该哈密顿量中的对角项造成了量子比特在布洛赫球上围绕 z 轴的旋转, 更为人所熟知的叫法为 AC-Stark shift, 在实际的实验中往往需要使其达到最小。非对角项则对应着量子比特围绕布洛赫球赤道上某一个轴的旋转, 能够有效的进行量子态的相干转移, 这是我们想要的部分。两光子拉曼过程图示参加图 2.13。

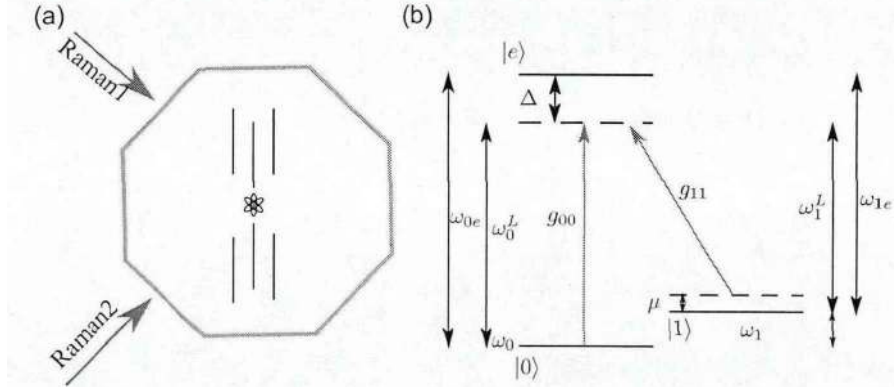


图 2.13 受激拉曼跃迁过程。(a) STIRAT 设备图。(b) 受激拉曼跃迁过程是一个两光子过程。两束频率分别为 ω_0^L 和 ω_1^L 的激光用于耦合 $|0\rangle$ ($|1\rangle$) 和辅助能级 $|e\rangle$ 。在与激发态失谐 Δ 的情况下, 两个耦合的单光子拉比频率分别为 g_{00} 和 g_{11} 。当两束激光的频率差与量子比特的能级差 ω_{01} 近似时, 在 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的拉比频率为 $\Omega = g_{00}g_{11}^*/2\Delta$ 。

为了实施两光子拉曼过程, 我们可以选择两束锁相的、频率相差 12.6 GHz 的连续激光来完成。理论上这可以通过 AOM 或者 EOM 对一束激光进行调制来完成, 但是在 369 nm 这个紫外波段, 这样的设备是非常难以制造的。因此大家更多的是用脉冲激光来进行拉曼过程。我们使用的是相干公司生产的 Paladin Advanced 355-24000 锁模皮秒脉冲激光器。其输出 24 W 的 355 nm 激光重复频率在 80 MHz。如图 2.14, 连续的脉冲激光在频域上是一系列间隔等于重复频率

的频率梳齿。由于量子比特的能级差并不是激光重复频率的整倍数，所以依靠一组频率梳齿是不能在梳齿之间拍频出我们想要的频率来的。

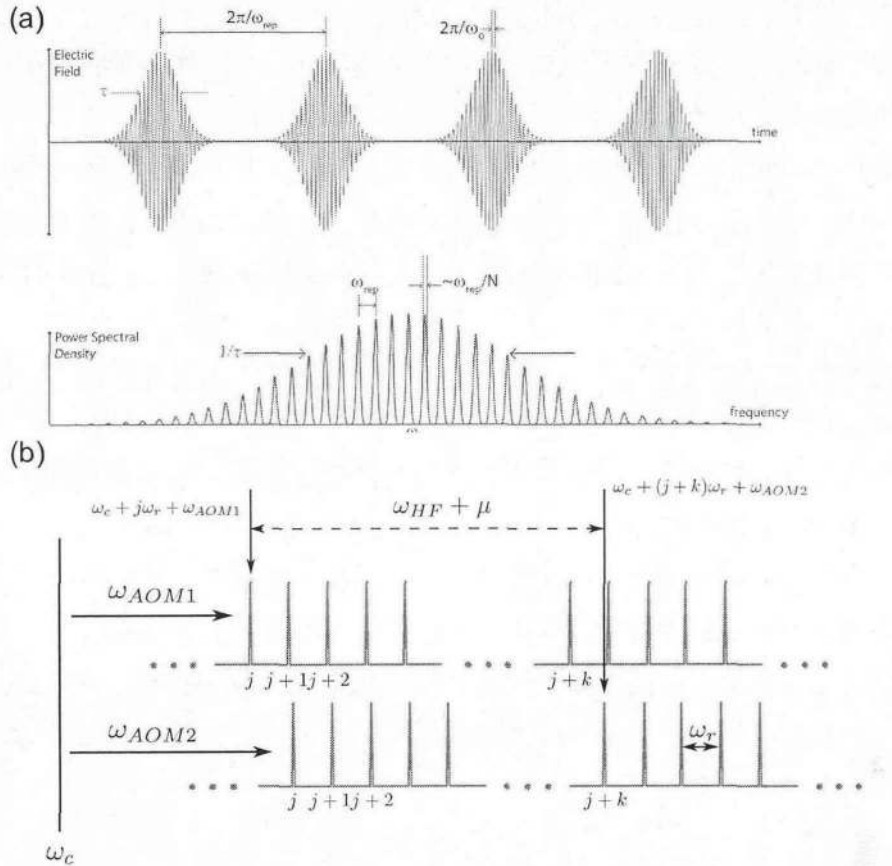


图 2.14 脉冲激光的频梳特性及其拉曼过程 (PhD thesis of Jonathan Albert Mizrahi, Christopher Monroe's group)。(a) 锁模脉冲激光器发出的脉冲序列在频域是一个一个的梳齿。频梳的中心频率即为脉冲激光的频率，梳齿之间的间隔为脉冲的重复频率 ω_{rep} ，整个频梳的宽度由脉冲长度 τ 决定。(b) 每个频梳的频率偏置分别由两个 AOM 进行调整，频梳 1 的第 j 个梳齿和频梳 2 的第 $j+k$ 个梳齿形成的拍频被调整到与量子比特能级共振，失谐 μ 可以调整为声子的频率从而进行声子模式的控制。

为了能够灵活的构建任意连续频率的拍频结果，两束拉曼激光分别利用两个 AOM 进行频率调制，通过合适的调节施加在 AOM 上面的频率，我们就可以在两组频率梳之间拍频出量子比特能级差附近的任意频率。从而对量子比特进行有效的操控。前面我们知道，离子在阱中的运动类似于简谐振动，因此其能量构成也是离散的，每个能量单位为 $\omega_{phono}\hbar$ ， ω_{phono} 为离子的运动模式频率，也被称作声子频率，相应的声子态是类似 Fock 态的量子数态 $|n\rangle$ ，其中 n 代表了目前的声子个数。调节 AOM 的频率，使其与量子比特的共振频率 ω_c 失谐一个声子频率，此

时的两光子拉曼过程操控的就是运动态与自旋能级的结合. 如果 $\omega = \omega_c - \omega_{phono}$, 此时驱动的是 $|\uparrow, n\rangle \leftrightarrow |\downarrow, n+1\rangle$ 能级, 由于此时的频率相对共振是红失谐, 也被称为红边带; 而当 $\omega = \omega_c + \omega_{phono}$, 此时驱动的是 $|\uparrow, n+1\rangle \leftrightarrow |\downarrow, n\rangle$ 能级, 此时的频率相对共振是蓝失谐, 因此也被称为蓝边带. 利用红边带我们可以完成有效的边带冷却, 将离子的运动状态进行进一步的冷却。

如图 2.15 所示, 在进行两光子拉曼实验过程中, 我们需用先对其中一束拉曼光的 AOM 频率进行扫描, 此时会扫描到几个共振峰, 这些峰代表的频率就是相应的共振或者声子频率. 然后我们将 AOM 的频率固定到其中一个共振峰的频率上面, 进行接下来的实验. 一般在进行与声子相关的实验时, 在多普勒冷却之后, 需要紧接着进行边带冷却将离子声子数降到 0 (当然不可能完全是 0, 但已经是非常接近运动基态了)。

事实上我们在两光子拉曼实验过程中, 遇到了非常多的困难: 由于买的激光器功率很大, 需要进行水冷, 而水冷设备在后期经常出现问题; 激光功率抖动; 激光方向抖动. 我们通过 AOM 反馈法解决了激光器功率抖动的问题, 购买了激光光束稳定装置解决了激光指向的抖动问题. 但是在进行声子操作时, 发现其相干时间依然非常差. 猜测是由于气流扰动造成激光相位的抖动, 对实验产生了影响. 尽管我们也尝试采取了一系列的措施, 但是截止到本博士论文完成, 该问题依然没有被有效的解决。

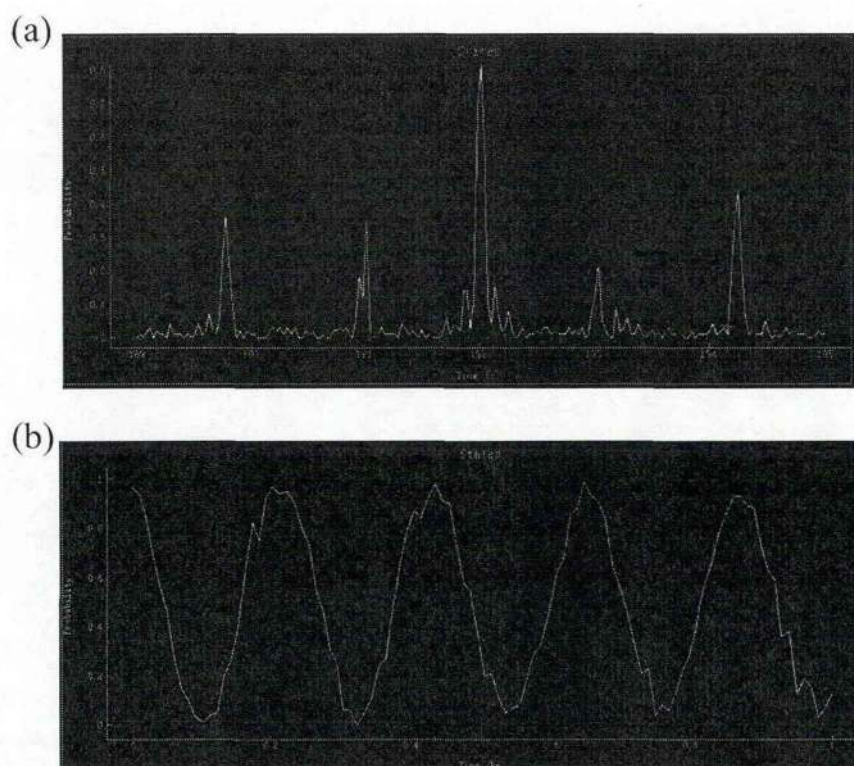


图 2.15 脉冲激光进行两光子拉曼过程。(a) 在两光子拉曼过程中, 调整一路光的 AOM 调制频率扫描边带。(b) 两光子拉曼过程的 Carry 拉比震荡。

第3章 剩余几何退相干的有效抑制

3.1 背景介绍

几何相位, 也被称作 Berry 相位^[87], 往往需要通过哈密顿量在参数空间的环路演化实现, 目前在包括精密测量^[88-89]、Aharonov-Anandan 相位^[90]、混态制备^[91]和非幺正演化^[92]等一系列广大的物理应用中发挥了很重要的作用。特别是在量子信息领域, 几何相位由于其天然对于噪声的抗干扰特性, 被认为是一种可以实现精确量子控制的有效方式。在过去几十年中, 已经有核磁共振 (NMR)^[93], 超导电路^[94-95], 石墨烯^[96], NV 色心^[97], 超冷原子^[98-99] 等系统平台对 Berry 相位进行了许多有意义的探索。在这些研究中, 基于离子阱系统实现的高保真度几何相位门取得了很大的进展: 在文献^[100] 中实现了保真度达到 97% 的纠缠贝尔态; 在报道^[38-39] 中, 保真度超过容错量子计算阈值的单比特几何相位门也被实现, 其中退相干成为了其门误差的主要来源。

目前实现通用量子计算主要有两个方向的编码方案可供选择, 一种是对操控的每个量子比特的门保真度要求可以低一点, 但是需要更多的量子比特来编码一个逻辑比特; 另外一种是不断提高对于每个量子比特的操控精度, 这样只需要更少的量子比特就可以实现相同的功能。由于在超导和离子阱系统中, 量子比特的扩展问题一直没有得到有效的解决, 因此大家不得不将努力的方向朝向提高量子比特操控保真度上面。而想要提高量子比特的操控保真度, 进一步的抑制系统演化过程中的退相干无疑成为了一件十分重要的事情。

我们可以从双缝实验中来简单的理解退相干。双缝实验是干涉实验的一个范例, 在这个实验中, 一个电子发射源重复不断的将电子射向带有两个狭缝的屏幕, 穿过狭缝的电子撞击到第二个屏幕上面, 要求我们计算第二块屏幕上面探测到电子的概率分布。有些人可能会通过简单的计算在狭缝中探测到电子的概率乘以在狭缝中探测到电子时在屏幕上探测到电子的条件概率的和来得到答案。然而这样计算的结果对于探测器在狭缝处时是正确的, 但对于我们这里描述的双缝实验来说, 在正确的表达式之外还应该存在一个干涉项, 这一项取决于通过狭缝的波的成分。当电子在通过狭缝但是未到达屏幕之前, 如果与其他系统有了相互作用, 那我们在屏幕上面探测到的电子的概率分布就是没有干涉效应存在时的情况, 这种情形我们称其为退相干。退相干往往发生在量子系统与环境的关联下, 并且会扰乱量子比特的相位, 损失存储在量子比特中的信息^[101]。

退相干一部分来源于动力学退相干, 一部分来源于几何学退相干^[102]。几何退相干在绝热极限甚至没有几何相位积累的情况下也会产生^[103]。尽管动力学退相干可以通过自旋回波这样的动力学解耦方案进行抑制, 但是几何学退相干目

前还没有比较好的方法来消除。然而,如果想要实现高保真度的量子操控,进一步抑制几何学退相干是必须要做的一件事情。幸运的是,现在已经有越来越多的研究人员开始探索几何学退相干和它的影响^[102-104],也提出了一些新的方案来抑制剩余的几何退相干^[105]。

在本章中,我们利用囚禁离子内部的两能级结构,探究了经典 Ornstein-Uhlenbeck (OU) 噪声场下几何退相干的情况。利用改善的动力学解耦方案,例如 Spin-Echo (SE) 和 Carr-Purcell-Meiboom-Gill (CPMG),我们有效的抑制了剩余的几何学退相干。通过改变噪声的强度和关联时间,我们演示了这些方案在真实场景下的应用潜力。

3.2 几何相位门中的退相干

考虑一个在缓慢变化磁场中的两能级系统,对于这样一个系统,其哈密顿量为 $H_I = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2$, 其中 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 是泡利算符, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3) = B_0(t)\mathbf{n}(t)$ 是磁场矢量, $\mathbf{n}(t) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ 。通过么正演化 $U(t) = \exp(i\theta\sigma_y/2) \exp(i\phi\sigma_z/2) \exp(i\phi I/2)$, 我们可以得到在旋转坐标系中的哈密顿量:

$$\bar{H} = U(t)H_I U^\dagger(t) + i\dot{U}(t)U^\dagger(t) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{\omega}}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2}\dot{\phi}I \quad (3.1)$$

其中 $\bar{\mathbf{B}} = (0, 0, B_0)$, $\bar{\boldsymbol{\omega}} = (-\dot{\phi} \sin \theta, \dot{\theta}, \dot{\phi} \cos \theta)$ 。我们假定磁场 $\mathbf{B}(t)$ 在时间 T 内逆(顺)时针旋转 m 圈, 即 $\dot{\phi} = 2m\pi/T = \omega_{\text{rf}}$, $\Omega = |\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{\omega}}|$ 可以展开成:

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{(B_0 - \omega_{\text{rf}} \cos \theta)^2 + \omega_{\text{rf}}^2 \sin^2 \theta} \\ &\approx B_0 - \omega_{\text{rf}} \cos \theta + \frac{\omega_{\text{rf}}^2 \sin^2 \theta}{2B_0} + o(\omega_{\text{rf}}^2/B_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

在延续了 T 时间之后, 哈密顿量 3.1 本征态的相位可以被计算为:

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm}^0 &= \mp \frac{1}{2} \int_0^T \Omega dt + \frac{1}{2} \int_0^T \omega_{\text{rf}} dt \\ &\approx \mp \frac{1}{2} B_0 T + m\pi(1 \pm \cos \theta) \mp \frac{m\pi\omega_{\text{rf}}}{2B_0} \sin^2 \theta + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

公式的第一项与时间成正比, 属于动力学相位部分, 第二项与时间无关, 是系统的几何相位部分, 第三项属于非绝热修正。

为了观察到 Berry 相位, 必须引入两个相对相位的干涉。假定系统初始的叠加态 $|\psi(0)\rangle = 1/\sqrt{2} \sum_{s=\pm 1} |\psi_s(B(0))\rangle$ 绝热的演化到末态 $|\psi(T)\rangle = 1/\sqrt{2} \sum_{s=\pm 1} e^{i\gamma_s} |\psi_s(B(0))\rangle$ 。其中相位差 $\gamma = \gamma_{-1} - \gamma_{+1}$ 包含动力学相位和几何学相位, 是物理可观测的。而为了仅观察 Berry 相位, 我们一般使用 SE 技术来消除

掉动力学相位的部分。举一个简单的例子，为了观测到哈密顿量逆时针旋转两圈后产生的 Berry 相位，我们首先绝热的驱动哈密顿量 H 逆时针旋转一圈，然后用一个 π 脉冲来交换哈密顿量的本征态，接下来顺时针驱动哈密顿量旋转一圈，最后再利用一个 π 脉冲将哈密顿量的本征态交换回来。在这个过程中，通过交换本征态，动力学相位被很好的消除了。最终的相位 $\gamma_{\pm 1} = \gamma_{\pm}^0(m=1) + \gamma_{\mp}^0(m=-1) = \pm 2\pi \cos \theta$ 。观测到的相位差 $\gamma = \gamma_{-1} - \gamma_{+1} = \gamma_{-}^0 - \gamma_{+}^0 = -4\pi \cos \theta$ 就是纯的几何相位。

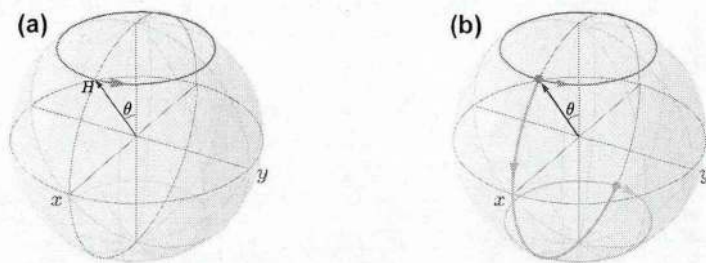


图 3.1 布洛赫球及自旋回波过程 (JM Cui et al, Science Bulletin, 2019, 64(23): 1757-1763.)。自旋回波过程通常可以用来消除动力学退相干。一个完整的 SE 包含 4 个过程，首先是哈密顿量绕 z 轴旋转一圈，然后一个 π 脉冲用来交换哈密顿量的两个本征态，接着是哈密顿量反方向绕 z 轴旋转一圈，最后再用一个 π 脉冲将哈密顿量的本征态交换回来。

为了可控的在实验系统中引入退相干，我们考虑一个经典扰动场 $K(t) = (K_1, K_2, K_3)$ 叠加到系统哈密顿量的磁场上面 $H_T = B_T(t) \cdot \sigma/2 = (B(t) + K(t)) \cdot \sigma/2$ 。为了简单起见，我们假定噪声只有 z 组分量 K_3 并且是一个服从洛伦兹谱宽为 Γ_3 ，噪声功率为 α_3 的 OU 过程^[104]：

$$L_3(\tau) = \langle K_3(t+\tau)K_3(t) \rangle = \alpha_3 e^{-\Gamma_3|\tau|} \quad (3.4)$$

产生的功率谱：

$$S_3(\omega) = 2\alpha_3\Gamma_3 / (\Gamma_3^2 + \omega^2) \quad (3.5)$$

由于经典扰动场的存在，我们可以重写公式 3.2 为：

$$\begin{aligned} \Omega_T &= \left[(B_0 - \omega_{rf} \cos \theta + K_3 \cos \theta)^2 + (\omega_{rf} - K_3)^2 \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \Omega + \cos \theta K_3 - \frac{\omega_{rf} \sin^2 \theta}{B_0} K_3 + o(K_3^2/B_0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $\cos \theta$ 和 $-\omega_{rf} \sin^2 \theta / B_0$ 分别来源于动力学相位和几何相位的扰动。在上式中，如果我们只考虑 K_3 的线性项，最终密度矩阵的非对角项可以表示为：

$$\rho_{-1,1}(T) = W e^{i\langle \gamma \rangle} \rho_{-1,1}(0) \quad (3.7)$$

相干方程:

$$W = \langle e^{i\varphi} \rangle = e^{-\langle \varphi^2 \rangle / 2} \quad (3.8)$$

并且:

$$\varphi = - \sum_{k=1}^n \int_{T_{k-1}}^{T_k} s_k (\cos \theta - \omega_{rf}^k \sin^2 \theta / B_0) K_3(t) dt \quad (3.9)$$

在上面的公式中, $s_k \cos \theta$ 引起了动力学的退相干, $-s_k \omega_{rf}^k \sin^2 \theta / B_0$ 引起了几何退相干。为了定量的描述系统的退相干, 我们定义 $\chi = -\ln W = \langle \varphi^2 \rangle / 2$ 来对退相干速率进行表征。

对于自由演化过程而言, 假定演化时间为 $T = 4\pi / \omega_B$, 并且满足低频噪声条件 $\Gamma_3 T \ll 1$, 通过公式 3.4, 我们可以计算得到退相干速率:

$$\chi \approx \left(\cos^2 \theta - \frac{2\omega_B \cos \theta \sin^2 \theta}{B_0} + \frac{\omega_B^2 \sin^4 \theta}{B_0^2} \right) \frac{\alpha_3 T^2}{2} \quad (3.10)$$

经过绝热近似, 上式可以简化为:

$$\chi = \cos^2 \theta \frac{\alpha_3 T^2}{2} \quad (3.11)$$

动力学解耦方式通常被用来抑制低频噪声, 其中的自旋回波可以用于消除动力学相位并且抑制动力学退相干。接下来让我们探究一下动力学解耦过程对于退相干速率的影响。考虑经典扰动场, 使用方程 3.8 和关联方程 3.4, 我们可以得到 SE 过程中的退相干速率:

$$\chi = \cos^2 \theta \frac{\alpha_3 \Gamma_3 T^3}{12} + \frac{\omega_B^2 \sin^4 \theta}{B_0^2} \frac{\alpha_3 T^2}{2} \quad (3.12)$$

相比公式 3.11, 第一项的动力学退相干已经减少了很多, 但是新增了第二项的几何退相干。从中可以看到 SE 过程只能够有效的抑制动力学退相干, 而对几何退相干没有什么作用。尤其是当 $\frac{\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \frac{\beta \kappa^2}{6} \ll 1$ 的条件下 ($\beta = \Gamma_3 T, \kappa = B_0 / \omega_B$), 几何退相干成为退相干的主导因素。对于更高阶的动力学解耦方法如 Carr-Purcell-Meiboom-Gill (CPMG) 序列, 我们也可以计算得到其退相干速率:

$$\chi = \cos^2 \theta \frac{\alpha_3 \Gamma_3 T^3}{48} + \frac{\omega_B^2 \sin^4 \theta}{B_0^2} \frac{\alpha_3 T^2}{2} \quad (3.13)$$

和 SE 方法一样, 虽然动力学退相干被有效的减少了, 但是几何退相干依然存在。

3.3 有效抑制退相干

为了有效的减少由于低频噪声引起的几何退相干, 我们从抵消掉公式 3.9 中的相位出发, 发展出了两种改善的动力学解耦方案:

(1). 在传统的动力学解耦方案如 SE 和 CPMG 中, 被 π 脉冲隔开的相邻的两个演化部分有同样的角度 θ , 因此 ϕ 不可能变为 0。如图 3.2(a)(SE 序列) 和 (b)(CPMG 序列), 我们改变了相邻两个绝热路径的角度。为了方便理解, 我们用改善的 SE 方案来说明这个方法。哈密顿量与 z 轴成角度 θ_α , 并逆时针绕 z 轴旋转 2π 角度, 然后一个 π 脉冲用来交换哈密顿量的本征态, 其中这个 π 脉冲的相位等于第一阶段哈密顿量的相位加 $\pi/2$ 。最后哈密顿量与 z 轴呈 θ_β 顺时针旋转 2π 角度。通过仔细的设计这两个角度, 我们可以使得:

$$\left(\cos \theta_\alpha - \frac{\dot{\varphi}_+ \sin^2 \theta_\alpha}{B} \right) + \left(-\cos \theta_\beta + \frac{\dot{\varphi}_- \sin^2 \theta_\beta}{B} \right) = 0 \quad (3.14)$$

其中 $\dot{\varphi}_{+(-)}$ 分别代表了顺(逆)时针旋转的角速度, 在绝热条件下, 我们可以得到两个角度的关系:

$$\cos \theta^\beta = \frac{\cos \theta^\alpha - \frac{2\omega_B}{B_0} + \frac{\omega_B^2 \cos \theta^\alpha}{B_0^2 + \omega_B^2}}{1 + \frac{\omega_B^2 - 2\omega_B B_0 \cos \theta^\alpha}{B_0^2 + \omega_B^2}} \quad (3.15)$$

需要注意的是, 由于两段绝热路径有不同的倾斜角度, 因此最终的 Berry 相位取决于两个角度 $\langle \gamma \rangle = -2\pi (\cos \theta^\alpha + \cos \theta^\beta)$, 利用这个改善的方案, 我们可以实现退相干速率:

$$\chi = \left(\cos \theta^\alpha - \frac{\omega_B \sin^2 \theta^\alpha}{B_0} \right)^2 \frac{\alpha_3 \Gamma_3 T^3}{12} \begin{cases} 1 & \text{SE} \\ 1/4 & \text{CPMG} \end{cases} \quad (3.16)$$

在低频噪声 $\Gamma_3 T \ll 1$ 下, 所有的退相干都会被迅速的抑制。

(2). 为了保证 Berry 相位不取决于两个角度 θ_α 和 θ_β , 在第二个方案中我们将 SE 序列中的两个绝热路径分成了被 π 脉冲间隔开的四个部分。如图 3.2(c) 所示, 哈密顿量围绕 z 轴逆时针旋转角度 π , 然后利用一个 π 脉冲交换哈密顿量的本征态, 哈密顿量顺时针旋转 π 角度, 接下来哈密顿量顺时针旋转 $\pi - \theta$ 角度, 然后利用一个 π 脉冲交换哈密顿量的本征态, 最后哈密顿量再逆时针旋转角度 π 。这样的四个部分可以保证

$$\begin{aligned} & \left(\cos \theta - \frac{\dot{\varphi}_+ \sin^2 \theta}{B} \right) + \left(-\cos \theta + \frac{\dot{\varphi}_- \sin^2 \theta}{B} \right) + \\ & \left(-\cos \theta + \frac{\dot{\varphi}_+ \sin^2 \theta}{B} \right) + \left(\cos \theta - \frac{\dot{\varphi}_- \sin^2 \theta}{B} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中 $\dot{\varphi}_+ = -\dot{\varphi}_-$, 退相干速率变为:

$$\chi = \cos^2 \theta^\alpha \frac{\alpha_3 \Gamma_3 T^3}{48} + \frac{\omega_B^2 \sin^4 \theta^\alpha}{B_0^2} \frac{\alpha_3 \Gamma_3 T^3}{12} \quad (3.18)$$

这两个方案都保证了公式 3.9 中的相位为 0, 所有的动力学和几何退相干都能得到有效的抑制。

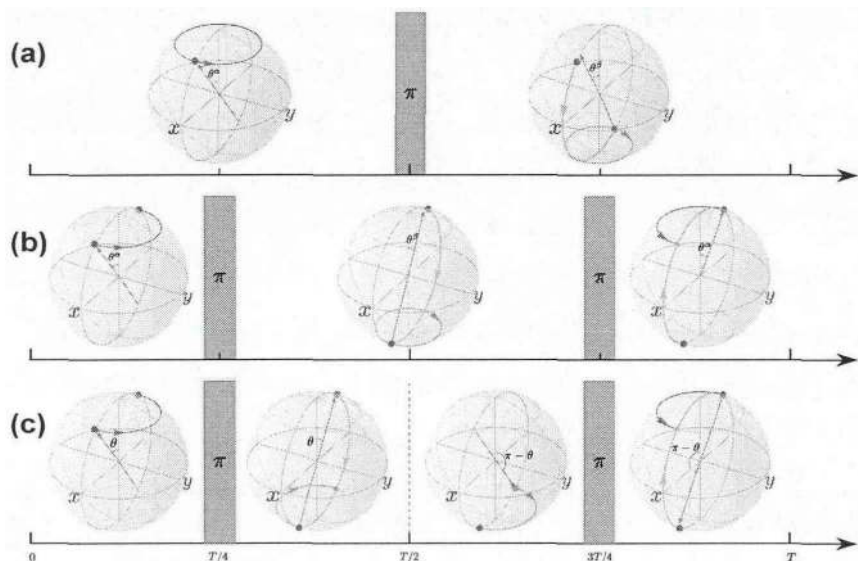


图 3.2 改进的动力学解耦方案 (JM Cui et al, Science Bulletin, 2019, 64(23): 1757-1763.)。改善的动力学解耦方案中哈密顿量的路径在布洛赫球上面的轨迹。绿色的点代表了轨迹的出发点和结束点, π 脉冲由橙色的柱子代表。蓝色箭头和实线分别代表了哈密顿量演化的方向和轨迹。(a) 和 (b) 分别代表了方案 1 的 SE 和 CPMG; (c) 代表了方案 2 的轨迹。

3.4 实验结果

哈密顿量 H_1 可以利用微波驱动的囚禁离子的量子比特来进行模拟。在以微波频率 ω_{mw} 为参考的旋转坐标系中, 哈密顿量可以表示为:

$$H_2 = \frac{1}{2} (\Delta\sigma_z + \Omega \sin \phi \sigma_x + \Omega \cos \phi \sigma_y) \quad (3.19)$$

其中 $\Delta = \omega_0 - \omega_{mw}$ 为微波驱动频率 ω_{mw} 与量子比特跃迁频率 ω_0 之间的频率差, Ω 是与驱动强度相关的拉比频率, ϕ 是驱动的相位。通过改变驱动的幅度和相位, 我们可以有效的控制哈密顿量的行为。

在实验中, 我们测量了 Berry 相位和量子比特的相干性随哈密顿量与 z 轴张成角度变化的情况。利用 SE 方案, 我们可以测量出纯的几何相位: 在 1 ms 的多普勒冷却之后, 20 μ s 的光泵浦将离子制备到 $|0\rangle$ 上。然后一系列微波 ω_{mw} 通过微波喇叭作用到离子上面, 对离子进行相干操作。为了观察到不同的角度 θ 对应的 Berry 相位, 我们以量子比特的跃迁频率 $\omega_0 = 12.6$ GHz 为基础变化驱动微波的频率, 产生不同的角度 $\theta = \arctan \frac{\Omega}{\Delta}$ 。在实验过程中的拉比频率被调整到 $\Omega = 10.5$ kHz。首先我们利用一个共振 $\pi/2$ 脉冲制备到 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态。然后通过改变驱动微波的相位 ϕ , 令哈密顿量绕 z 轴以角度 θ_α 进行绝热的演化, 从而令哈密顿量 3.19 的本征态 $|+\rangle$ 获得一个相位 $\gamma_+ = -\gamma_d + \gamma_{g+}$, 本征态 $|-\rangle$ 获得

相位 $\gamma_- = \gamma_d + \gamma_{g-}$, 其中 γ_d 和 γ_g 分别是动力学和几何学相位, $\gamma_{g+} = \pi(1 + \cos \theta)$, $\gamma_{g-} = \pi(1 - \cos \theta)$ 。我们令 $\dot{\varphi}/B = 0.1$, 从而保证绝热条件 $A = 0.05 \sin \theta \ll 1$ 。然后通过一个 π 脉冲交换哈密顿量的本征态, 接下来哈密顿量以角度 θ_β 绕相反的方向旋转一圈, 使得哈密顿量 H_2 的本征态 $|+\rangle$ 获得相位 $\gamma_+ = \gamma_d - \gamma_{g-}$, 本征态 $|-\rangle$ 获得相位 $\gamma_- = -\gamma_d - \gamma_{g+}$ 。最后在两个本征态之间形成的纯几何相位差为 $\delta = 2\gamma_{g-} - 2\gamma_{g+} = -2\pi \cos \theta_\alpha - 2\pi \cos \theta_\beta$ 。

在实验中, K_3 噪音是通过在微波驱动的失谐项中添加随机噪音产生的。施加的噪音服从关联时间 $\tau = 10$ s, 强度为 $\alpha/\Omega^2 \approx 1$ 的 OU 过程。OU 过程有很长的历史并且在物理学中有很多的应用, 如其曾经被用来描述布朗运动和 Johnson 噪声^[106]。许多研究者使用 OU 过程作为 “colored noise” 的一种模型^[107]。在许多关于稳态的马尔可夫过程中, 如果扰动足够小, 也可以被近似的描述成 OU 过程。我们可以理解为马尔可夫过程 K 按照方程随时间演化:

$$\frac{dK(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}K(t) + c^{1/2}G(t) \quad (3.20)$$

其中 τ 和 c 分别是关联时间和扩散常数, $G(t)$ 为高斯白噪声。 K 的自更新方程为:

$$K(t + \Delta t) = K(t)e^{-(1/\tau)\Delta t} + \left[\frac{c\tau}{2} (1 - e^{-(2/\tau)\Delta t}) \right]^{1/2} n \quad (3.21)$$

其中 n 服从正态分布 $N(t) = \mathcal{N}(0, 1)$ 。

为了模拟噪声的统计随机效果, 我们每个实验都使用 100 个不同随机数种子产生的不同的 OU 噪声去进行一遍实验, 最后将这 100 个不同的结果进行平均得到最后的结果。我们通过态层析的方法得到最终态的密度矩阵, 然后根据 $\delta = \arg \langle \rho_{0,1}(T) \rangle$ 和 $W = |\langle \rho_{0,1}(T) \rangle| / |\rho_{0,1}(0)|$ 分别计算相干方程和 Berry 相位, 其中 $\langle \dots \rangle$ 代表了所有噪音的平均效果。如图 3.3(a), 我们测量了在低频噪声 $\Gamma T \ll 1$ 下 SE 和 CPMG 序列的退相干情况, 其中 $\Gamma = 1/\tau$, T 是总的绝热演化时间。参数 θ 从 0 到 $\pi/2$, 因为在改善的动力学解耦方案中 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 的结果是一样的, 并且我们关注的是失谐噪声的比率而不是失谐符号本身。从图中可以看到, SE 和 CPMG 方法只能在角度 θ 比较小的时候抑制退相干, 当角度 $\theta > \pi/4$ 的时候这两种方法就会失效。这可以被理解为当角度变大时, K_3/Δ 也会变的更大, K_3 噪音也就会产生更大的影响。在大角度下, 这两种动力学解耦方案的退相干主要来源于几何退相干。从公式 3.9 也可以看出, 随着角度的增加几何退相干也随之增加。为了抑制剩余的几何退相干, 我们根据前面提到的方法改善了 SE 和 CPMG 方案。如图 3.3(b) 所示, 改善的动力学方案甚至在大角度的情况下也成功抑制了几何学退相干。如果我们定义退相干速率 $\chi = -\frac{\log_{10} W}{T}$, 与传统的动力学方案相比, 改善的动力学解耦方案在大角度下退相干速率可以小一个量级。与此同时, 所有方案中得到的 Berry 相位都与理论值相吻合。理论计算是通过蒙特卡洛方法

进行模拟而来的。

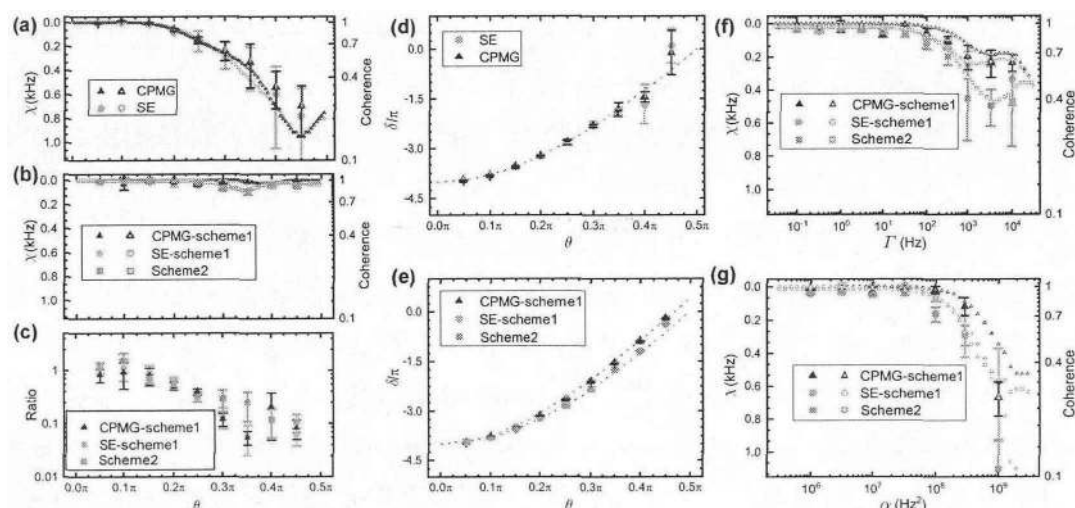


图 3.3 实验方案效果对比 (JM Cui et al, Science Bulletin, 2019, 64(23): 1757-1763.)。高斯噪声下经典和改进的动力学解耦方案的效果对比。两个经典的方案 (SE(橘色圆圈) 和 CPMG(蓝色三角)) 和三个改善改善的方案 (SE-scheme1(橘色圆圈), CPMG-scheme1(蓝色三角) 和 scheme2(绿色方块)) 被进行了探究。中空的标记代表了数值模拟的结果, 实心的标记代表了实验数据。(a) 和 (b) 分别是传统和改进的动力学解耦方案中退相干速率和相干性随角度的变化。所有的传统方案在角度 θ 比较大时都变得失效, 而改善的方案在大角度情况下依然可以很好的抑制退相干。(c). 传统动力学解耦方案和改进方案的退相干速率比。(d) 和 (e) 分别是在经典和改进的动力学方案中测得的 Berry 相位。(f). 在固定噪声 $\alpha \cong \Omega^2$ 下测得的改善动力学解耦方案下量子比特的相干性, 当噪声带宽 $\Gamma < 100$ Hz 的情况下, 改善的方案依旧奏效。(g). 在固定关联时间 $\tau = 0.01$ s 的情况下测得的改善动力学解耦方案下量子比特的相干性。

为了证明其在量子信息处理中的实际应用, 我们进一步探索了在 $\theta = 9\pi/20$ 的情况下, 这些改善的方案在不同的 τ 和 α 参数下的高斯噪声中的表现。首先我们将噪声的带宽 Γ 从 10^{-1} Hz 变化到 10^4 Hz, 并且保持噪声强度保持不变 $\alpha/\Omega^2 \approx 1$ 。结果如图 3.3(f) 所示, 当噪声的关联时间 $1/\Gamma$ 增加时, 这样方法开始变的失效, 特别是当 $\Gamma > 100$ Hz 的时候, 退相干开始变的明显, 这些方案都变的无效。其次, 我们固定关联时间 $\tau = 0.01$ s, 改变参数 α 使得 α/Ω^2 从 0.01 变化到 10, 如图 3.3(g) 所示, 比例 α/Ω 越大, 这些方案的表现会越差。不过幸运的是, 磁场噪声的关联时间通常都大于 0.01, 噪声强度也往往小于 Ω^2 [108-109], 因此这些改善的方案将会在很多场景下发挥作用。

3.5 本章小结

在本章中，我们利用囚禁离子中的二能级结构探索了高斯噪音下的退相干情况。在这种情况下，OU型噪声被认为是经典的涨落场，这大致相当于量子开放系统框架下对二阶时间卷积的处理^[110]。然而，由于在主方程的框架内，系统的纯态特征是无法保持的。所以我们的处理方法不能直接应用于主方程上。如何推广基于微观模型的一般开放量子系统的几何相位运算仍然是一个非常有吸引力的问题，在非马尔可夫开放系统中的几何相位问题上也已经取得了一些进展^[111-112]。

总的来说，我们在实验上利用改善的动力学解耦方案有效的同时抑制了动力学和几何学退相干。与传统的动力学解耦方式相比，这些改善的方案可以减小退相干速率一个数量级以上。所有的测量结果都能与理论计算很好的吻合。除此之外，我们也讨论了在不同强度和关联时间噪声下，这些方案的效果，以此来保证在大多数实验室条件下，这些方案都能起到很好的作用。

第4章 非绝热和乐量子计算

构建实用的量子计算平台，必然要考虑外界环境噪声对比特及操控的影响。一方面，我们可以尽可能的隔绝外部诸如磁场扰动、温度变化等带来的影响，另一方面，我们也可以设计更加具有鲁棒性的量子门来抵御外界噪声造成的退相干。在接下来的一章里，我们将会详细的介绍一种基于几何相位的对噪声具有鲁棒性的量子计算方案——和乐量子计算，并且展示其在离子阱平台上的演示效果。

4.1 背景介绍

随着现代芯片制造工艺达到摩尔定律的极限以及人们普遍的对计算能力不断增长的需求，构建实用的量子计算机越来越引起了人们广泛的兴趣。然而，任何大规模的量子系统都会不可避免的受到周围环境噪声扰动和非完美控制场的影响，从而导致了量子信息的破坏。因此，具有对噪声鲁棒性并且快速的量子信息处理方式是非常缺乏的。1984年，Berry提出了一种仅与演化路径的总体特征相关的相位^[87]，理论上这种相位可以在一定程度上平均掉演化过程中的高频噪声，表现出在一定程度上对抗噪声的特点^[113-115]。但是几何相位的积累需要绝热演化，这就对系统的相干时间提出了一定的要求。目前不管在什么样的量子计算平台上，相干时间的延长都不是一件容易的事情。所以用非绝热方式^[90]实现的高保真度量量子门近年来逐渐吸引了大家的关注^[116-117]，越来越多的科研人员开始探究非绝热几何量子计算^[118]。

阿贝尔^[87]和非阿贝尔^[119]的几何相位都可以实现单量子比特门，但只有非阿贝尔几何相位具有非对易的特性，能够实现通用的量子门，也就是所谓的和乐量子计算。和乐量子计算最开始在1999年由Paolo等人提出^[120-121]，并且在 Ca^+ 离子平台和超冷量子气体中利用绝热演化的方式被实验验证^[122-123]。然而，由于系统有限的相干时间限制，环境扰动产生的噪声将会对量子门的表现产生一定的限制。为了克服这个限制，全殿民等人在2012年提出了非绝热和乐量子计算的方案(NHQC)^[124-125]，由于其优越的特性和巨大的应用潜力，很快便引起了大家的广泛关注。后来这一方案在理论上又得到了进一步的发展^[126-134]，并且在诸如超导电路^[135-137]、NMR^[138-140]、金刚石中的NV色心^[141-146]等实验平台上得到了验证。然而，这些方案受到哈密顿量中的参数的限制，导致发展出来的非绝热和乐量子计算都会遭受系统噪声的影响，抹掉了几何量子计算原本的优势^[147-148]。

最近一段时间, 华南师大薛正远等人在理论上提出了一种解决方案^[149-150], 这种方案解决了以往的 NHQC 中的参数限制问题, 任意的和乐量子门都可以以 single-loop 的方式实现。按照 2019 年刘宝杰等人的设计方案^[149], 快速的非阿贝尔几何量子门已经在超导量子电路以非共振驱动的方式得以演示^[151]。但是非共振的驱动形式, 意味着驱动波形的幅度和失谐都要被精确的调控, 这无疑增大了在实验上实现的难度, 很容易积累一些操作误差而使得达不到设计的鲁棒性效果。因此, 设计一种具有相同鲁棒能力但是更加简单驱动波形的方案在实验上是更被希望的。

我们与华南师大的薛正远合作, 利用以前章节中谈论过的 needle 形离子阱束缚的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子中的三能级结构, 演示了共振驱动波形下的非绝热和乐量子门。我们通过 randomized benchmark 的方案标定演示的量子门, 得到的平均门保真度在 99% 以上。这个结果主要受限于我们系统有限的相干时间。同时我们也演示了共振驱动的非绝热和乐量子门和以往的 NHQC 及动力学门在拉比频率误差下的优越性。

4.2 通用单比特量子门

我们首先展示如何在一个 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的 $S_{1/2}$ 基态上实现任意单量子比特门。我们选取三个超精细能级作为三个基态, 分别是 $|0\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F=1, m_F=0\rangle$ 和 $|1\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F=1, m_F=1\rangle$, $|a\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F=0, m_F=0\rangle$ 作为辅助比特。和乐量子门通过两束微波驱动场来实现。这两束微波具有随时间变化的振幅和相位, 但是分别与两个跃迁 $|0\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 和 $|1\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 共振耦合。在离子自由哈密顿量的相互作用绘景下, 相互作用哈密顿量可以写为

$$\begin{aligned} H_1(t) &= \frac{\Omega_0(t)}{2} e^{-i\phi_0(t)} |0\rangle \langle a| + \frac{\Omega_1(t)}{2} e^{-i\phi_1(t)} |1\rangle \langle a| + \text{H.c.} \\ &= \frac{\Omega(t)}{2} e^{-i\phi(t)} |b\rangle \langle a| + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中, Ω_j 和 ϕ_j ($j=0,1$) 对应着两个驱动场随时间变化的幅度和相位。 $\Omega(t) = \sqrt{\Omega_0^2(t) + \Omega_1^2(t)}$, $|b\rangle = \sin(\theta/2)|0\rangle - \cos(\theta/2)e^{i\phi}|1\rangle$, $\tan(\theta/2) = \Omega_0(t)/\Omega_1(t)$, 其中 θ 是与时间无关的, $\phi = \phi_0(t) - \phi_1(t) + \pi$ 是一个常数角度。从哈密顿量 $H_1(t)$ 可以得出, 三能级的量子动力学可以用另外的基矢来表示: 亮态 $|b\rangle = \sin(\theta/2)|0\rangle - \cos(\theta/2)e^{i\phi}|1\rangle$, 暗态 $|d\rangle = -\cos(\theta/2)e^{-i\phi}|0\rangle - \sin(\theta/2)|1\rangle$ 和辅助态 $|a\rangle$ 。在两个共振波形驱动下, 系统的量子动力学由 $|b\rangle$ 和 $|a\rangle$ 共振耦合形成, 暗态 $|d\rangle$ 从 $|b\rangle, |a\rangle$ 的子空间解耦。这意味着, 在哈密顿量 $H_1(t)$ 的驱动下, 如果 θ 和 ϕ 保持不变, 则暗态将保持不变。如此一来, 所有的动力学过程都发生在 $|b\rangle, |a\rangle$ 的子空间上

面, 满足含时薛定谔方程 $i(\partial/\partial t)|\psi(t)\rangle = H_1(t)|\psi(t)\rangle$ [152]。在这个子空间中, 演化态 $|\psi(t)\rangle$ 可以被参数化为两个含时的角度参数 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 还有一个全局的含时相位 $f(t)$:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-if(t)/2} \begin{pmatrix} \cos[\alpha(t)/2]e^{i\beta(t)/2} \\ \sin[\alpha(t)/2]e^{-i\beta(t)/2} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

根据含时薛定谔方程, 演化态中的这些参数和哈密顿量的关系可以求解为

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \dot{\beta}(t)/\cos\alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) &= \Omega(t)\sin[\beta(t) + \phi_0(t)] \\ \dot{\beta}(t) &= \Omega(t)\cot\alpha(t)\cos[\beta(t) + \phi_0(t)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中点代表的是微分运算。在公式 4.3 的情况下, 我们可以选择一组合适的变量 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 和 $f(t)$ 来反向推算出驱动哈密顿量 $H_1(t)$, 并且决定目标演化路径。因此我们可以设计演化路径, 使得亮态完成周期的演化后可以积累一个纯的非阿贝尔几何相位。任意的非绝热和乐单量子比特门就可以在 $|0\rangle, |1\rangle$ 子空间上实现了。

对于公式 4.1 中的哈密顿量 $H_1(t)$, 存在两个可以调节的含时参数。运用这两个参数, 我们可以结合优化控制技术 [152-153] 进一步增强实施的和乐量子门对抗幅度噪声的鲁棒性。首先我们考虑静态幅度误差的情景 $\Omega(t) \rightarrow (1 + \epsilon)\Omega(t)$, 相应的哈密顿量为:

$$H_\epsilon(t) = (1 + \epsilon)\frac{\Omega(t)}{2}e^{-i\phi_0(t)}|b\rangle\langle a| + \text{H.c.} \quad (4.4)$$

在这种类型的误差下, 一种优化控制技术可以被用于 single-loop 演化的两个段落中。也就是说, 误差的影响可以在第一段演化的末尾处 ($T/2$) 估计出来, 相应的概率幅为 $P_\epsilon = |\langle\psi(\tau/2)|\psi_\epsilon(\tau/2)\rangle|^2 = 1 + \tilde{O}_1 + \tilde{O}_2 + \dots$, 其中 $|\psi_\epsilon(\tau/2)\rangle$ 是静态幅度误差下的输出态, $\tilde{O}_m$ 是 m 阶微扰项。对于实际的实验实现, 我们考虑到 2 阶微扰, 这个概率幅可以被写成:

$$P_\epsilon \simeq 1 - \epsilon^2 \left| \int_0^{T/2} e^{-if} \dot{\alpha} \sin^2 \alpha dt \right|^2 \quad (4.5)$$

为了使得 $|\langle\psi(\tau/2)|\psi_\epsilon(\tau/2)\rangle|^2 \simeq 1$, 我们设定 $\alpha(t) = \pi \sin^2(\pi t/T)$, $f(t) = \eta[2\alpha - \sin(2\alpha)]$, $\beta_1(0) = 0$, $\beta_1(T/2) = \gamma$ 。然后上式变为:

$$P_\epsilon \simeq 1 - \epsilon^2 \sin^2 \eta \pi / (2\eta)^2 \quad (4.6)$$

其中对于非0的整数 η , $P_c \simeq 1$ 。当 $\eta \rightarrow 0$ 的时候, 演化方案就会退回到以往的 NHQC 方案。

在一个演化时间为 T 的周期内, 我们可以设置 $\alpha(t) = \pi \sin^2(\pi t/T)$ 和 $f(t) = \eta[2\alpha - \sin(2\alpha)]$ 。其中 η 是一个用来选择演化路径的常数。与此同时, 演化路径可以分为两个等时间间隔的部分 $[0, T/2]$ 和 $[T/2, T]$ 。在第一个时间段 $t \in [0, T/2]$ 中, $\beta(t)$ 的初态设置为 $\beta_1(0) = 0$ 并且 $\beta_1(T/2) = \int_0^{T/2} \dot{f}(t) \cos \alpha(t) dt = 0$ 。相应的演化算符为 $U_1(T/2, 0) = |d\rangle\langle d| + e^{i\gamma_1}|a\rangle\langle b|$, 其中 $\gamma_1 = -f(T/2)/2$ 。在第二个时间间隔中, 我们设置 $\beta_2(T/2) = \gamma$, 并且 $\beta_2(T) = \int_{T/2}^T \dot{f}(t) \cos \alpha(t) dt = \gamma$, 其中 γ 为一个任意常数角度。相应的演化算符为 $U_2(T, T/2) = |d\rangle\langle d| + e^{i\gamma_2}|b\rangle\langle a|$, 其中 $\gamma_2 = f(T/2)/2 + \gamma$ 。量子态演化的可视化效果可以在图 4.1 中看到, 两条演化路径在布洛赫球上有旋转对称性, 并且得到的几何相位就等于旋转角度 γ 区域对应立体角的一半。除此之外, 暗态在这个过程中是一直解耦的。整个过程最终在 $|d\rangle, |b\rangle$ 子空间上的演化矩阵为 $U(T, 0) = |d\rangle\langle d| + e^{i\gamma}|b\rangle\langle b|$, 这对应着 qubit 基矢空间 $|0\rangle, |1\rangle$ 上面的任意和乐单量子比特门:

$$U(\theta, \phi, \gamma) = e^{i\gamma/2} e^{-i(\gamma/2)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.7)$$

其中 $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, $\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵。这个旋转矩阵 U 表示了围绕轴 $\mathbf{n}$ 旋转角度 γ , 然后乘上一个全局相位 $\exp(i\gamma/2)$ 。RNHQC 和 NHQC 的 X , H 单比特门的实验参数波形参照图 4.6 (a) 和 (c)。

4.3 两比特门方案

为了实现通用的量子计算, 不光需要一组通用的单比特门, 同时也需要两比特的纠缠门。在这里我们提出了一个可行的方案在内态 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 和离子的运动态之间实施具备鲁棒性的和乐控制相位门。

Paul 形离子阱中带电粒子的运动可以被一组基态 $|n\rangle$ 来描述, 其中 $n = 1, 2, \dots, \infty$ ^[154]。这些所谓的声子态是简谐振荡 Fock 态的动力学对应部分。如图描述的那样, 具有 ω_{0a} 的能级差的自旋和具有 ω_j 能级差的声子可以通过一对适当选择的受激拉曼激光束来进行耦合。这对激光应当具有频率差 $\omega_{r1} - \omega_{r2} = \omega_{0a} \pm \omega_i$, 其中 $+$ ($-$) 分别代表了蓝(红)边带^[100]。蓝边带相互作用可以通过旋波近似(RWA)下有效的两能级 anti-Jaynes-Cummings 哈密顿量来描述:

$$H_{\text{anti-JC}} = i\hbar\Omega_r\eta_{\text{LD}} (\sigma_+ a^\dagger e^{i\phi} + \text{H.c.}) \quad (4.8)$$

其中 $\Omega_r = \sqrt{\Omega_1\Omega_2}$ 是总的拉比频率, η_{LD} 是兰姆-迪克系数, $a^\dagger(a)$ 是产生(湮灭)算符。为了得到可调谐的耦合, 我们可以增加一个任意波形发生器通过声光调制

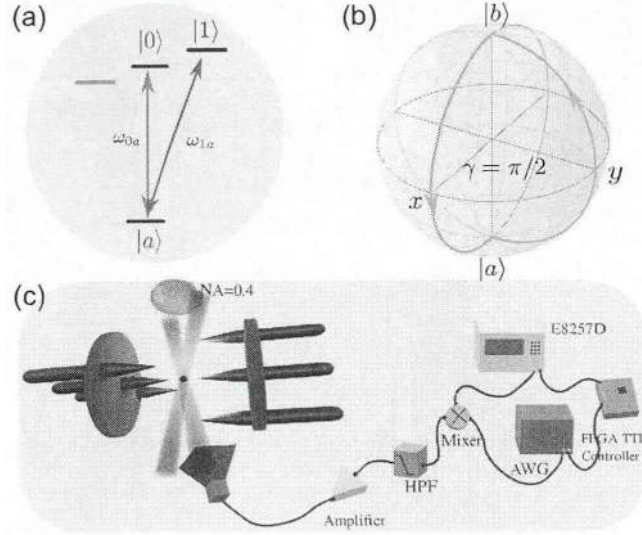


图 4.1 实现任意单量子比特门 (MZ Ai et al, Physical Review Applied, 2020, 14(5): 054062.)。 (a) $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的超精细结构能级图。量子态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 被编码在 $|^2S_{1/2}, F=1, m_F=0\rangle$ 和 $|^2S_{1/2}, F=1, m_F=1\rangle$ 的能级上。两个微波场 ω_{0a} 和 ω_{1a} 与两个跃迁 $|1\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 和 $|0\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 共振耦合产生和乐量子门。 (b) 在 $\{|b\rangle, |a\rangle\}$ 子空间构成的布洛赫球上和乐量子门的演化图示。 (c) 简化的实验设备图。

器 (AOM) 来调制其中一束激光的相位 ϕ 和幅度 Ω_r 。带声子能级的离子能级图参见图 4.2。

尽管离子的运动态空间维度是无穷的，但是这里我们只考虑 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 子空间。为了防止在运动子空间中产生泄露，一束共振蓝边带用来耦合跃迁 $|a0\rangle \leftrightarrow |11\rangle$ 。相互作用绘景下的有效哈密顿量为：

$$H_2(t) = \frac{\tilde{\Omega}(t)}{2} e^{-i\tilde{\phi}(t)} |11\rangle \left\langle a0 \right| + \frac{\tilde{\Omega}(t)}{2} e^{i\tilde{\phi}(t)} |a0\rangle \langle 11| \quad (4.9)$$

其中 $\tilde{\Omega}(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$ 分别是有效的耦合强度和驱动参数的相位。这个有效哈密顿量具有和公式 4.1 同样的形式，只不过相应的亮态变为 $|b\rangle = |11\rangle$ 。同单比特门下的情况相似，在子空间 $\{|a0\rangle, |11\rangle\}$ 中的几何门 $\text{diag}(e^{i\gamma}, e^{-i\gamma})$ 可以通过调制有效的耦合强度中 $\tilde{\Omega}(t)$ 和相位 $\tilde{\phi}(t)$ 来实现。在两比特计算子空间 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 中，这样的几何相位操作对应着一个控制相位门：

$$U(\gamma) = \text{diag}(1, 1, 1, e^{i\gamma}) \quad (4.10)$$

然后一组具有鲁棒性的通用量子门就可以在囚禁离子系统中实现了！

在我们的实验平台中， $\eta_{\text{LD}} = 0.1$ ， $\omega_x = 2.4 \text{ MHz}$ 。假如每束激光的平均功率为 20 mW ，蓝边带的有效拉比频率 $\eta_{\text{LD}}\Omega_r$ 大约为 10 kHz 。在参数 $\eta = 1/5$ 的情况

下相应的两比特门时间大约是 $224 \mu\text{s}$ 。尽管激光拉曼操作会比微波操作引入更多的误差，例如激光强度和相位的扰动，但是如果激光功率足够的话，受激拉曼操作可以进行的非常快。除此之外，采取适当的激光频率 $\omega_{r1} - \omega_{r2} = \omega_{0a}$ ，单比特量子门也可以通过受激拉曼过程来完成。

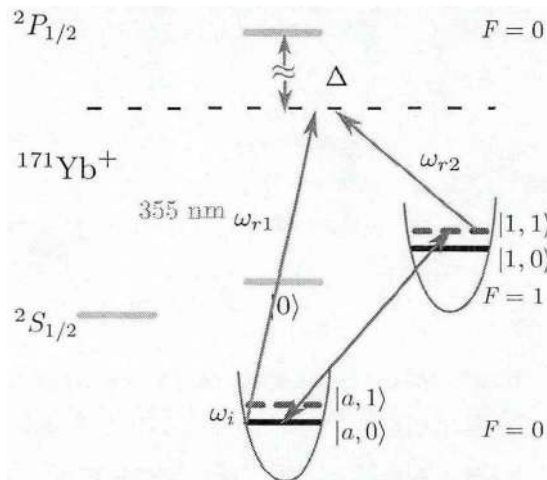


图 4.2 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子能级图 (MZ Ai et al, Physical Review Applied, 2020, 14(5): 054062.)。两束相互垂直的 355 nm 脉冲激光用于激发离子的运动模式。其中两束激光的频率差为 $\omega_{r1} - \omega_{r2} = \omega_{0a} + \omega_x$, 对应着蓝边带激发。通过优化蓝边带的波形, 就可以实现一个两笔特相位门。

4.4 实验验证

我们 在一个囚禁的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子中进行了这次演示实验。整个实验的简易装备图可以参加图 4.1(c)。在离子超精细能级结构的三能级中, $|0\rangle$, $|a\rangle$ 的能级差为 $\omega_{0a} = 12.64$ GHz。在大约 8.93 高斯的磁场大小下, $|0\rangle$, $|1\rangle$ 能级差为 $\omega_{01} = 12.5$ MHz。磁场有 30 个固定在环形铝架的永磁铁产生, 避免了以往由电流产生磁场的 不稳定^[109]。驱动三能级的微波通过混频的方式产生: 一个 12.44 GHz 的微波源产生的微波信号与从任意波形发生器中产生的 200 MHz 的微波进行混频, 混频信号通过一个高通滤波器后, 被放大到 10 瓦左右, 然后用一个微波喇叭将信号传送到离子的位置^[155]。整个的实验设备被一层 1.5 mm 厚的坡莫合金笼罩用于屏蔽外界的干扰磁场^[86]。最终通过 Ramsey 实验测定的 $|1\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 和 $|0\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 跃迁的相干时间分别是 20 ms 和 200 ms。

在每一次实验中,实验采用如下的步骤:经过 1 mm 的多普勒冷却,离子被 20 μ s 的 **pumpling** 光冷却到基态^[156]。然后一个共振微波驱动跃迁 $|0\rangle \leftrightarrow |a\rangle$, 以 99.5% 的保真度把离子制备到 $|0\rangle$ 态。和乐量子门由两束频率分别为 ω_{0a} 和 ω_{1a}

的微波场共振耦合跃迁 $|0\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 和 $|1\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 来实现。其中这两束微波的幅度和相位按照公式 2.3 进行调制。最后一个频率为 $\omega_{0a}(\omega_{1a})$ 的微波将最终的态 $|0\rangle(|1\rangle)$ 转移到 $|a\rangle$ 上面, 用一个数值孔径为 0.4 的物镜收集探测到的荧光。

4.4.1 量子过程层析 (QPT)

量子过程层析是为了识别未知的量子动力学过程。最早于 1996 年提出的标准量子过程层析 (SQPT) 包含三个步骤, 分别是制备一组量子态, 将这组量子态通过未知的量子过程, 最后用量子态层析对结果进行识别。当然后边也发展出了例如辅助过程层析 (AAPT) 和纠缠辅助过程层析 (EAPT) 等需要额外的辅助系统的层析方法。上面提到的技术都被称作表征量子动力学的非直接方法, 因为它们都需要额外的量子态层析来重构整个过程。与之相对的是像量子动力学的直接表征 (DCQD) 这样直接的方法, 这种方法不需要进行量子态层析。全量子过程层析所需的实验配置 (状态准备和测量) 的数量随着系统组成粒子的数量呈指数增长。因此通常来说, QPT 对于大规模的量子系统是不可能完成的任务。然而, 在弱的退相干假定下, 量子动力学映射可以找到稀疏的表示。压缩量子过程层析 (CQPT) 采用压缩感知的技术, 应用稀疏假设由不完备的测量结果来重建量子动力学映射。除了线性方程组求解之外, 在重构过程矩阵中也涌现出了一些其他的方法, 例如极大似然估计^[157]、贝叶斯估计^[158] 和机器学习^[159] 等。在我们的实验中, 我们利用了标准量子态层析的方法, 并利用极大似然估计去重构过程矩阵。接下来简单介绍一下原理和实验的方法。

量子过程, 也被称作量子动力学映射 $\epsilon(\rho)$, 可以通过一个完全正定映射来描述 $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger$, 其中 $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为希尔伯特空间中的有界算符。同时存在操作元素 A_i , 满足 $\sum_i A_i^\dagger A_i \leq I$, 从而 $\text{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] \leq 1$ 。

令 $\{E_i\}$ 为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中相互正交的一组基。利用这组基重写算符 A_i : $A_i = \sum_m a_{im} E_m$ 。这会导致 $\mathcal{E}(\rho) = \sum_{m,n} \chi_{mn} E_m \rho E_n^\dagger$, 其中 $\chi_{mn} = \sum_i a_{mi} a_{ni}^*$ 。整个量子过程层析的目标就是求解 χ , 其中 χ 是一个正定的超算符并且可以基于 $\{E_i\}$ 完全表征 ϵ 。

SQPT 方法采用 d^2 个线性无关的输入 ρ_j 实现, 其中 d 是希尔伯特空间的维度。对于每一个输入 ρ_j , 经过这个未知过程后都会得到一个输出态 $\epsilon(\rho)$, $\epsilon(\rho)$ 可以被写为 ρ_k 的线性组合 $\mathcal{E}(\rho_j) = \sum_k c_{jk} \rho_k$ 。通过将每一个输入 ρ_j 传送很多次, 可以用量子态层析实验来确定系数 c_{jk} :

$$E_m \rho_j E_n^\dagger = \sum_k B_{m,n,j,k} \rho_k \quad (4.11)$$

其中 B 是矩阵的系数。然后可以得到:

$$\sum_k c_{jk} \rho_k = \mathcal{E}(\rho_j) = \sum_{m,n} \chi_{m,n} E_m \rho_j E_n^\dagger = \sum_{m,n} \sum_k \chi_{m,n} B_{m,n,j,k} \rho_k \quad (4.12)$$

因为 ρ_k 构成一组线性无关的基矢 $c_{jk} = \sum_{m,n} \chi_{m,n} B_{m,n,j,k}$, 对 B 取逆可以得到 χ :
 $\chi_{m,n} = \sum_{j,k} B_{m,n,j,k}^{-1} c_{jk}$ 。

线性求解过程矩阵虽然简单易行, 但是由于实验实际测得的数据可能会有扰动误差, 导致求解出的结果不满足完全正定或者迹保持。而所有这些确定性量子变换的必要性质, 都可以作为适当的约束条件, 纳入极大似然方法的范畴内。因此采用迭代方法的极大似然估计方法是求解过程矩阵的一种很好的办法。

假定由 N 个独立且相同的未知物理系统 ρ 。对这个系统进行 POVM Π_l 测量可以得到每一个输出的概率:

$$p_l = \text{Tr}[\rho \Pi_l], \quad p_l \geq 0, \quad \sum_l p_l = 1 \quad (4.13)$$

由于我们在实际的实验中只能对有限份数的物理系统做测量, 因此并不能得出确切的概率 p_l 。如果在出口 Π_l 处有 N_l 次事件发生, 探测频率 $f_l = N_l/N$ 可以代替概率用来重构真实的量子态 ρ 。极大似然估计方法在这个重构问题上的作用就在于找到一个密度算符 ρ_{est} , 通过公式 4.13 产生一个尽可能接近观测到的频率 f_l 的概率 p_l :

$$\rho_{\text{est}} = \arg \max_{\rho} \mathcal{L}[f_l, p_l(\rho)] \quad (4.14)$$

$$\mathcal{L}[f_l, p_l(\rho)] = \sum_l f_l \ln p_l \quad (4.15)$$

在概率分布 p_l 和探测的相对频率 f_l 之间距离的似然性貌似是任意的。然而, 如果运用公式 4.15, 重构过程可以被解释为一个广义的 POVM 测量。

在半正定算符 ρ 空间的似然函数 4.15 最大化已经得到了有效的解决。对这个问题一个更具分析性的方法涉及到一个非线性的对数似然最大化密度矩阵的极值算子方程:

$$\rho = \mu^{-1} R \rho, \quad R = \sum_l \frac{f_l}{p_l} \Pi_l \quad (4.16)$$

其中拉格朗日乘数为:

$$\mu = \text{Tr}[R \rho] = \sum_l f_l = 1 \quad (4.17)$$

公式 4.16 的主要优点在于它非常合适迭代求解。结合公式 4.16 和其厄密共轭方程可以得出半正定的系统方程:

$$\rho = \mu^{-2} R \rho R, \quad \mu = (\text{Tr}[R \rho R])^{1/2} \quad (4.18)$$

迭代方程:

$$\rho^{(n+1)} = \mu^{(n)-2} R^{(n)} \rho^{(n)} R^{(n)} \quad (4.19)$$

保证了半正定性和保迹性。

密度算符物理系统的状态，线性完全正定映射 (CP) 描述了物理系统从一个量子态 ρ_{in} 到另外一个量子态 ρ_{out} 转变。CP 映射的数学形式取决于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的线性 CP 映射 $\mathcal{M}_S$ ，希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 中的算符和联合空间 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 中半正定算符的同构

$$\rho_{\text{out}} = \mathcal{M}_S [\rho_{\text{in}}] = \text{Tr}_{\mathcal{H}} [S \rho_{\text{in}}^T \otimes 1_{\mathcal{K}}] \quad (4.20)$$

其中 $1_{\mathcal{K}}$ 是 $\mathcal{K}$ 空间上的单位算符。确定性的量子转换保证了转换算符的迹: $\text{Tr}_{\mathcal{K}} [\rho_{\text{out}}] = \text{Tr}_{\mathcal{H}} [\rho_{\text{in}}]$ 。由于对于任意的输入 ρ_{in} 这都必须成立，因此算符 S 必须满足:

$$\text{Tr}_{\mathcal{K}} [S] = 1_{\mathcal{H}} \quad (4.21)$$

利用公式 4.20 我们可以用极大似然估计原理来估计 CP 映射 S 。

令 ρ_m 代表空间 $\mathcal{H}$ 中不同的输入态，对每一个相应的输出态进行 POVM 测量 Π_{ml} 。令 f_{ml} 代表 POVM 探测的相对频率，估计的算符 S 需要最大化约束条件下的似然方程:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c [f_{ml}, p_{ml}(S)] &= \sum_{m,l} f_{ml} \ln p_{ml} - \text{Tr}[\Lambda S] \\ p_{ml} &= \text{Tr} [S \rho_m^T \otimes \Pi_{ml}] \end{aligned} \quad (4.22)$$

其中 $\Lambda = \lambda \otimes I_{\mathcal{K}}$ ， λ 是拉格朗日乘数的矩阵。对于所有的 δS ，都可以得到:

$$S = \Lambda^{-1} K S, \quad K = \sum_{m,l} \frac{f_{ml}}{p_{ml}} \rho_m^T \otimes \Pi_{ml} \quad (4.23)$$

从公式 4.23 可以得到 $S = S K \Lambda^{-1}$ 。当我们把这个表达式插入上边第一个公式的右边，可以得到一个适合迭代的对称表达式:

$$S = \Lambda^{-1} K S K \Lambda^{-1} \quad (4.24)$$

拉格朗日乘数 λ 必须服从约束 4.21，在空间 $\mathcal{K}$ 上追踪公式 4.24 可以得到 λ 的二次方程:

$$\lambda = (\text{Tr}_{\mathcal{K}}[KSK])^{1/2} \quad (4.25)$$

这两个方程可以通过迭代的方式进行求解。

4.4.2 Randomized Benchmarking

使用量子过程层析可以建立起一个量子门的完整行为。这要求在层析过程中使用的单比特分析门的误差比需要解析的门更低。如果这个要求可以满足，过程层析可以提供门的足够多的信息，但是如果不满足这个条件，过程层析就不可能提供关于这么门的准确信息。此外，因为过程层析还要求制备一定的初态和单比特分析门，导致没有合适的方法来决定在计算序列中第 k 个门的表现好坏。如果想要知道，就必须要求对前边所有的门都进行无关的表征。过程层析也是非常消耗时间的，它的计算复杂度随比特数目指数增加。

另外一种可以对计算过程的门保真度进行表征的方法就是 Randomized Benchmarking，它不依赖于初始态的制备和单比特分析门的保真度，是一种被谷歌和 IBM 等公司作为标准的门表征方式。这里我们以单比特为例说一下 RB 的原理和流程。对于一个单比特而言，RB 过程包含大量的实验，每个实验由初态制备 ρ ，应用一些可选择的脉冲序列（如 π 脉冲、么正操作 I （泡利随机化）和 $\pi/2$ 脉冲（计算门））和最后的测量 M 三部分组成。在态制备和最后的测量中间的脉冲序列由 π 脉冲开始和结束。对于单比特，初始态为 $|0\rangle$ 。由于主要的操作是 Clifford 群里的 π 和 $\pi/2$ 旋转，因此在脉冲序列中的态总是泡利算符的本征态。泡利随机化使用的么正算符的形式为 $e^{\pm i\sigma_b\pi/2}$ ，其中符号 $\pm$ 和 $b = 0, x, y, z$ 都是随机选择的， σ_0 为单位算符。对于理想的脉冲，符号的选择只决定了全局相位。然而，在实际的实验中，符号的选择可以决定影响误差行为的物理设定。 $\pi/2$ 的计算门的形式是 $e^{\pm i\sigma_u\pi/4}$ ，其中 $u = x, y$ 。除了最后一个 $\pi/2$ 脉冲，符号 $\pm$ 和 u 同样是随机选择的，最后一个脉冲的选择要保证最终态是 σ_z 的本征态。计算门为一个单比特产生 Clifford 群操作。他们的选择是基于这样一个事实，即他们可以作为简单的脉冲在实验上实现。最后的测量是 σ_z 上的冯诺依曼测量。最后的 $\pi/2$ 脉冲保证了在没有误差出现的情况下，对于一组给定的脉冲序列，测量可以有一个已知的确定输出。然而，脉冲序列的随机化保证了输出是没有关联的。对于一个固定的子序列，其他序列的随机化保证输出是平均分布的。

随机脉冲序列的长度 l 代表了 $\pi/2$ 脉冲的数目。 $\pi/2$ 脉冲被认为是可以增强计算的，而 π 脉冲仅仅起到随机化误差的作用。我们把 $\pi/2$ 和泡利脉冲组合为随机化的计算门。原则上，我们可以通过对每个长度 $l = 1, \dots, L$ 实施 N 个实验确定脉冲的误差率来估计不正确测量输出的平均概率 p_l 。 l 和 p_l 之间的关系可以被用来得到每个脉冲的平均错误率。假定所有的误差是无关并且退极化的。操作 A

的退极化概率为 d_A ，考虑一组脉冲序列组合 $A_0, A_1 A_2, \dots, A_{2l+1} A_{2l+2}, A_{2l+3}$ ，其中 A_0 是态制备， $A_1 A_2$ 和接下来的操作对是随机计算门序列， A_{2l+3} 是测量。对于测量，我们可以假设误差发生在完美测量之前。操作 A_k 之后的态是泡利算符的本征态或者被完全退极化。态的退极化等价于以 $1/4$ 的概率作用一个随机泡利算符或者以 $1/4$ 的概率作用一个单位算符。而态没有退极化的概率为 $\prod_{j=0}^k (1 - d_k)$ 。我们可以将态的误差概率表达为 $p_l = E \left\{ \left[1 - \prod_{j=0}^{2l+3} (1 - d_{A_j}) \right] \right\}$ ，其中 $E(\dots)$ 代表了随机操作 A_j 的平均值。除了最后一个 $\pi/2$ 脉冲外操作 A_j 的选择都应当是相互无关的。假定最后一个脉冲退极化的概率不取决于前边的脉冲。我们可以将平均误差概率写为 $p_l = [1 - (1 - d_{if})(1 - d)^l]/2$ ，其中 d 是一个 $\pi/2$ 脉冲、一个泡利脉冲和 d_{if} 组合起来的态制备、初始泡利脉冲和测量的平均退极化概率。 p_l 将会以指数形式衰退到 $1/2$ ，衰退常数为 d 。

一种用来衡量实施的门和预期门之间偏差的度量标准是平均保真度 F_a ，它被定义为输出状态相对于预期输出状态的保真度在纯输入状态上的均匀平均值。我们感兴趣的是由随机计算门组成的每一步的平均计算误差。这可以由 $1 - F_a$ 的门平均值得到，也与前面提到的退极化参数 d 相关： $1 - F_a = d/2$ 。在我们做随机计算门的时候，围绕 z 轴的 π 脉冲通过改变旋转坐标系来实现而不涉及实际的脉冲。因此，平均来看，随机门作用的角距离为 π 。 $(1 - d/2)$ 代表了脉冲的平均保真度。

尽管 p_l 的估计足以获得随机计算门的平均误差，但是考虑特定随机计算的误差行为和随机序列的固定例子也是非常有帮助的。为此，我们首先生成 N_G 个包含 L 个随机计算门的随机序列。这些序列被认为是典型计算的一个样本，每个序列被截断成不同的长度。对于每一个长度，都要施加一个 $\pi/2$ 脉冲来保证最后的末态是 σ_z 的本征态。末态的符号是随机的。最终的实验序列通过在生成的序列中插入随机泡利脉冲来做到随机化。然后，我们可以用这些随机序列进行实验，以确定每个这样的序列的不正确测量结果的概率，以及在泡利脉冲随机化后每个截断计算的不正确测量结果的概率。

接下来我们理一下进行单比特 Randomized Benchmarking 的具体流程^[160]。总共需要进行 $N_G N_l N_p N_e$ 此实验测量，其中 N_G 是不同的计算门序列的数目， N_l 是序列被截断的序列数目， N_p 是每一组门序列的泡利随机化的数目， N_e 是每一个特殊序列进行实验的数目。

- (1) 选取一系列的长度 $l_1 < l_2 < \dots < l_{N_l}$ 。目标是得到每一个长度随机序列的误差率
- (2) 对每一个 $j = 1, \dots, N_G$ 做下面的事情：
 - (2a) 选择一个长度为 l_{N_l} 的随机计算门序列 $\mathcal{G} = \{G_1, \dots\}$
 - (2b) 对于每个 $k = 1, \dots, N_l$ 做下面的事情：

(2b1) 假定在没有误差的情况下，通过在初态 $|0\rangle$ 上作用 $G_{l_k} \cdots G_1$ 确定最终的末态 ρ_f

(2b2) 随机在两个 $\pm x, \pm y, \pm z$ 轴的 $\pi/2$ 脉冲里选择最后的计算门 R ，使其作用于末态 ρ_f 后为 σ_z 的本征态，并且记录下得到的本征态。

(2b3) 对于每一个 $m = 1, \dots, N_P$ 做下面的事情：

(2b3a) 选择一组含有 $l_k + 2$ 个脉冲的随机脉冲序列 $\mathcal{P} = \{P_1, \dots\}$

(2b3b) 在实验上对初态 $|0\rangle$ 作用脉冲序列 $P_{l_k+2} R P_{l_k+1} G_{l_k} \cdots G_1 P_1$ 并且在 σ_z 上进行投影测量，重复实验 N_e 次

(2b3c) 从实验数据和如果没有误差时期望得到的实验数据，估计出差概率 $p_{j,l_k,m}$ ，记录此次估计的不确定度。

误差的概率 p_l 可以通过公式 $p_{l_k} = \sum_{j=1}^{N_G} \sum_{m=1}^{N_P} p_{j,l_k,m} / (N_G N_P)$ 得到。我们同样可以得到每一个计算门序列的误差率 $p_{j,l_k} = \sum_{m=1}^{N_P} p_{j,l_k,m} / N_P$ 。如果误差是相互独立的， $p_{j,l_k,m}$ 和 p_{j,l_k} 应该和 p_{l_k} 没有明显的差别。

如果想要单独表征某一个门的保真度，可以使用 Interleaved Randomized Benchmarking 的方法^[161]。这种方法在想要表征的门 C 之间随机插入一些 Clifford 门操作。在完全随机门或所有门的平均误差都是去极化的极限下，该种协议可以完美估计 C 的门误差。

我们在实验中使用了一个叫 pyGSTi 的 python 包来进行随机序列的生成和最后实验结果的处理。pyGSTi 是一个开源软件库，旨在为人们提供方便的对单或者多比特的含噪声量子系统进行信息处理、表征和模型的工具^[162]。

4.5 实验结果

在我们的演示实验中，设定全局相位参数为 $f(t) = \eta[2\alpha - \sin(2\alpha)]$ ，其中 $\eta = 1/5$ 。在这个参数和最大驱动强度为 $(2\pi) 10$ kHz 情况下，相应的单量子比特门时间为 $224 \mu\text{s}$ 。我们用量子过程层析 (QPT) 的方法来表征单比特门的表现，并用过程保真度 $F_{\text{att}} = |\text{Tr}(\chi_{\text{exp}} \chi_{\text{th}}^\dagger)|$ 来估计 QPT 的结果。其中 χ_{exp} 和 χ_{th} 分别是实验和理论的过程矩阵。四个演示单比特门的演化算符 $U(\pi/2, 0, \pi), U(\pi/4, 0, \pi), U(0, 0, \pi/4), U(0, 0, \pi/2)$ 对应着 X, H, T, S 四个门，它们相应的保真度为 $F_X = 97.21\% \pm 0.03\%, F_H = 97.65\% \pm 0.06\%, F_T = 97.85\% \pm 0.05\%, F_S = 97.43\% \pm 0.03\%$ ，整个过程层析的结果可以从图 4.3 中看到。

我们同时使用了 Randomized Benchmarking (RB) 的方法来表征单比特量子门，这种方法的一个很大的好处是它不会把态制备和测量的误差计入到门误差里面。Reference RB 和 interleaved RB 分别被用来平均门的保真度和每个特定门的保真度。两种 RB 方式的实验序列和结果可以从图 4.4 中找到。最终我们

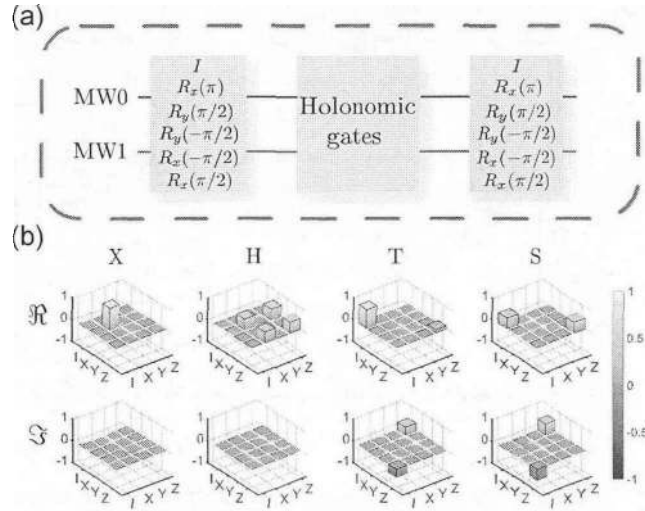


图 4.3 和乐单量子比特门的 QPT 结果 (MZ Ai et al, Physical Review Applied, 2020, 14(5): 054062.). (a) QPT 的实验序列。一组完备基被用来制备初态，每一个末态通过量子态层析来重构。(b) 四个量子比特门过程矩阵的实部和虚部的条形图。其中黑色的实线是理论估计。

得到的结果是平均门保真度 $F_{\text{ave}} = 99\%$ ，四个门特定门的保真度分别为 $F_X = 99.10\%$, $F_H = 98.90\%$, $F_T = 99.20\%$, $F_S = 99.10\%$ 。剩余的 infidelity 主要由磁场扰动导致 $|1\rangle$ 态的退相干造成。

4.6 鲁棒性对比

在大规模的实际量子计算应用中，拉比频率误差是一种主要的误差来源。我们在实验上验证了前文提到的几何量子门对于这种误差的鲁棒性。为了方便理解此种方案的效果，我们对比了 RNHQC ($\eta = 1$) 和往常的 NHQC ($\eta = 0$) 在相同的最大驱动强度 $[(2\pi)10\text{kHz}]$ ，主要受限于放大器的放大功率下的实验表现。图 4.5 (a) 和 (b) 中展示了实验中 X 和 H 门在不同的拉比频率误差下的实验结果对比。所有的结果都是通过 RB 的方法测量得来。所有的实验结果和数值模拟结果吻合的较好。对比清晰的展示了我们演示的 RNHQC 方案比以往的 NHQC 方案在存在拉比频率误差下的优越性，特别是当 Rabi 频率误差比较大的情况下。需要注意的是，在存在退相干导致的有限相干时间的情况下，RNHQC 会在误差比较小的时候表现不如 NHQC，这在理论上是无法避免的，但是只要我们可以想办法不断的提高系统的相干时间，RNHQC 将会表现的更好。

目前大家做单比特门操作时更多的是用动力学门。现在我们就来考虑一下在 single-loop 演化中不消除掉动力学相位时构造的量子门。一段时间为 T 的

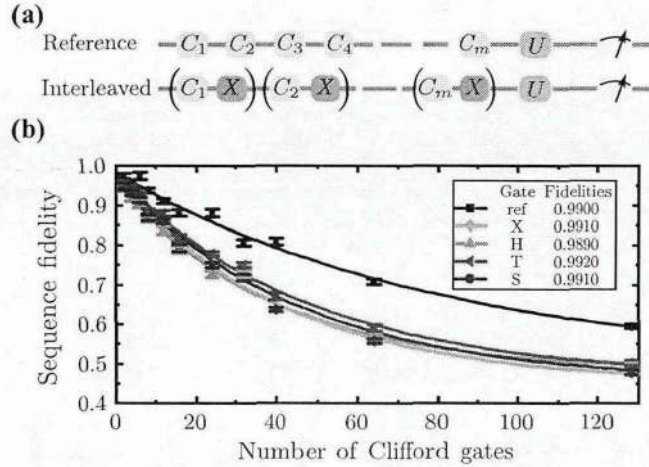


图 4.4 和乐单量子比特门的 RB 结果 (MZ Ai et al, Physical Review Applied, 2020, 14(5): 054062.). (a) Reference RB 和 interleaved RB 实验序列。(b) 序列保真度和 Clifford 门数目的关系。每个序列长度的保真度都是通过 20 个随机的序列测量得来。所有的曲线用 $F = Ap^m + B$ 进行拟合。平均门保真度用公式 $F_{\text{ave}} = 1 - (1 - p_{\text{ref}})/2$ 来计算。特定门的保真度可以通过公式 $F_{\text{gate}} = 1 - (1 - p_{\text{gate}}/p_{\text{ref}})/2$ 来计算，其中 p_{ref} 和 p_{gate} 分别是 reference 和 interleaved RB 的 p 参数。

环形演化被分为两个相等的时间间隔 $[0, T/2]$ 和 $[T/2, T]$ 。在第一段演化时间内 $t \in [0, T/2]$ ，我们设定 $\alpha(t) = \pi \sin^2(\pi t/T)$, $f(t) = \eta_D[2\alpha - \sin(2\alpha)]$ 。 $\beta(t)$ 的初始值被设置为 $\beta_1(0) = 0$, $\beta_1(T/2) = \int_0^{T/2} \dot{f}(t) \cos \alpha(t) dt = 0$ 。相应的演化算符为 $U_1(T/2, 0) = |d\rangle\langle d| + e^{i\gamma_1}|a\rangle\langle b|$ ，其中 $\gamma_1 = -f_1(T/2)/2$ 。在第二段演化时间中 $t \in [T/2, T]$ ，我们设置 $\alpha(t) = \pi \sin^2(\pi t/T)$, $f(t) = -\eta_D[2\alpha - \sin(2\alpha)]$, $\beta_2(T/2) = 0$, $\beta_2(T) = \int_{T/2}^T \dot{f}(t) \cos \alpha(t) dt = 0$ 。相应的演化算符为 $U_2(T, T/2) = |d\rangle\langle d| + e^{i\gamma_2}|b\rangle\langle a|$ ，其中 $\gamma_2 = -f_1(T/2)/2$ 。动力学门和几何门的 X , H 单比特门的实验参数波形参照图 4.6 (b) 和 (d)。总体来说，经过环形演化之后，演化矩阵变为 $\{|d\rangle, |b\rangle\}$ 子空间上的 $U(T, 0) = |d\rangle\langle d| + e^{i\gamma_D}|b\rangle\langle b|$ ，其中 $\gamma_D = -f_1(T/2) = -2\eta_D\pi$ 。在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 子空间上的任意单比特门可以表示为：

$$U(\theta, \phi, \gamma_D) = e^{i\gamma_D/2} e^{-i(\gamma_D/2)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.26)$$

。

我们同时也对比了 RNHQc 和动力学门对拉比频率误差的鲁棒性表现。在实验中，我们令和乐门的参数 η 等于动力学门的参数 η ，在最大驱动强度为 $(2\pi)10$ kHz 的情况下，相应的动力学门和几何门的时间都是 $430 \mu\text{s}$ 。在图 4.5 的 (c) 和 (d) 中展示了 X 、 H 门在不同的拉比频率误差下对比的实验结果，从中我们可以看到，几何门对于动力学门在对噪声的鲁棒性上面还是有很大的优势的。

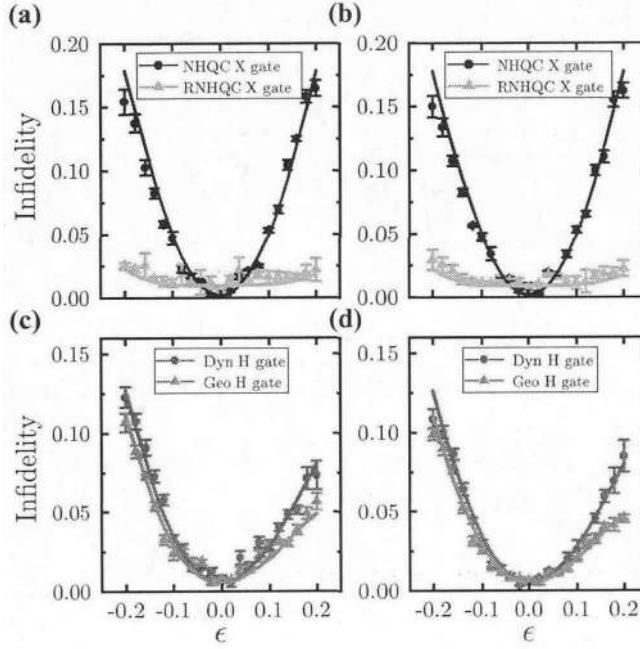


图 4.5 实验中使用微波场的幅度和相位波形 (MZ Ai et al, Physical Review Applied, 2020, 14(5): 054062.). (a) 和 (c) RNHQC 和 NHQC 方案在 X 门实验中, 归一化的幅度和相位波形。 (b) 和 (d) RNHQC 和动力学门方案在 H 门实验中, 归一化的幅度和相位波形。

4.7 四能级和乐量子门

当以往基于三能级的非绝热和乐量子计算破坏了几何相位的鲁棒性时, 不同于 RNHQC, 最近一个基于 dressed-state 的两个退简并暗态的非绝热和乐量子计算方案 (HQCTD) 被提出^[163]。然而寻找合适的 dressed-state 是比较复杂的, 特别是对于高维量子系统。另一方面, 由于精确控制多能级的挑战, 目前并没有人在实验上演示基于两个退简并暗态的非绝热几何量子计算。因此, 在前边 RNHQC 的基础上, 我们进一步在 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子基态的超精细能级中, 对基于四能级 dressed-state 的双暗态和乐量子门进行了演示, 并且验证了其在拉比频率误差下的鲁棒性。

4.7.1 实验原理

我们用 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子 $S_{1/2}$ 基态上的四个能级进行编码: 计算子空间 $|0\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F=1, m_F=0\rangle$, $|1\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F=1, m_F=+1\rangle$ 。辅助态空间 $|2\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F=1, m_F=-1\rangle$, $|a\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F=0, m_F=0\rangle$ 。具体可以参加图 4.7。我们的策略通过同时驱动三个微波 $\Omega_j(t) \cos(\omega_j t + \phi_j)$ ($j=0, 1, 2$) 来实现, 这三个微波分别于三个跃迁 $|j\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 共振耦合。在相互作用绘景下, 相互作用

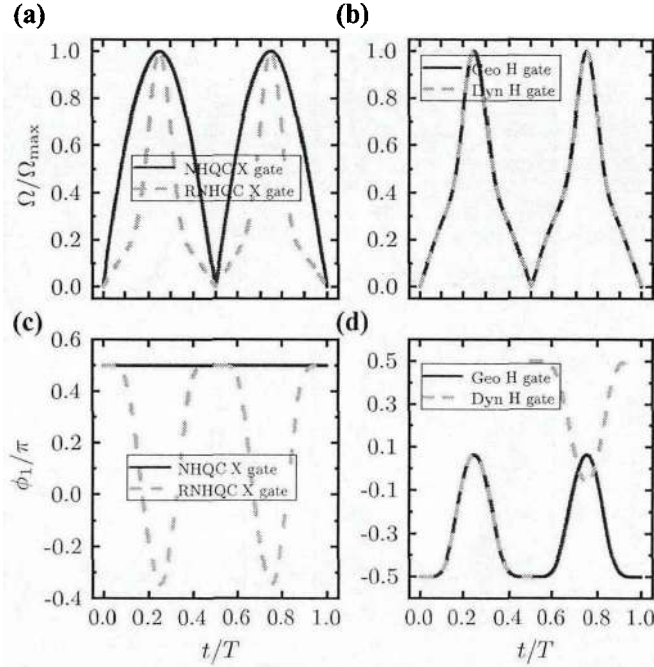


图 4.6 不同类型量子门的鲁棒性对比 (MZ Ai et al, Physical Review Applied, 2020, 14(5): 054062.). (a) 和 (b) RNHC 和 NHQC 的 X 、 H 门对于拉比频率误差鲁棒性的对比。结果很清晰的表明了 RNHC 对拉比频率误差的噪声鲁棒性，特别是在误差比较大的情况下。(c) 和 (d) 几何门与动力学门的 X 、 H 门对于拉比频率误差鲁棒性的对比。这些结果表明几何门相对动力学门具有很好的噪声鲁棒性。

的哈密顿量为：

$$H_1(t) = \sum_{j=0}^2 \frac{\Omega_j(t)}{2} e^{-i\phi_j} |j\rangle\langle a| + \text{H.c.} \quad (4.27)$$

令 $\Omega_0(t)/\Omega_1(t) = \tan(\theta/2)$ ，这个哈密顿量可以在新的希尔伯特空间 $\{|d_1\rangle, |b\rangle, |2\rangle, |a\rangle\}$ 下进行重写：

$$H_d(t) = \frac{\Omega(t)}{2} e^{-i\phi_0} |b\rangle\langle a| + \frac{\Omega_2(t)}{2} |2\rangle\langle a| + \text{H.c.} \quad (4.28)$$

其中 $\Omega(t) = \sqrt{\Omega_0^2(t) + \Omega_1^2(t)}$ 。亮态 $|b\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle - e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}|1\rangle$ ，其中 $\phi = \phi_0 - \phi_1 + \pi$ ， $\phi_2 = 0$ 。暗态 $|d_1\rangle = -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi}|0\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ 从 $\{|b\rangle, |2\rangle, |a\rangle\}$ 子空间中解耦。也就是说，系统的量子动力学被两个共振耦合 $|b\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 和 $|2\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ 来主导，同时暗态 $|d_1\rangle$ 在这个过程中保持不变。

与此同时，另外一个暗态路径，可以被两个含时的角度 α 和 β 参数化为：

$$|d_2(t)\rangle = \cos\alpha (\cos\beta e^{-i\phi_0}|b\rangle - \sin\beta|2\rangle) - i\sin\alpha|a\rangle \quad (4.29)$$

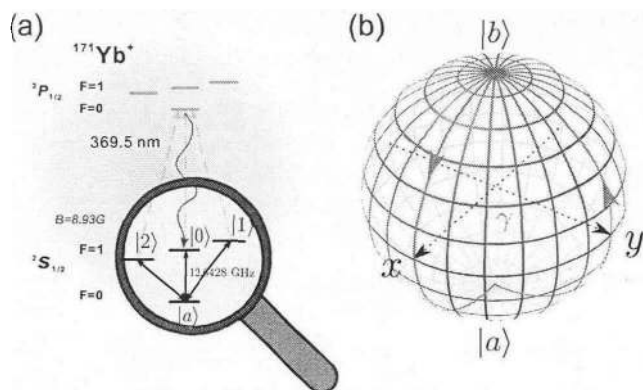


图 4.7 基于四能级系统的和乐量子门 (MZ Ai et al, arXiv:2101.07483, 2021.). (a) $^{171}\text{Yb}^+$ 的能级结构。(b) 在 $\{|b\rangle, |a\rangle\}$ 子空间构成的 Bloch 球上进行和乐量子门的演示说明。

根据含时薛定谔方程，暗态 $|d_2(t)\rangle$ 和哈密顿量 $H_d(t)$ 之间的参数关系可以写为：

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= 2(\dot{\beta} \cot \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} \cos \beta) \\ \Omega_2(t) &= 2(\dot{\beta} \cot \alpha \cos \beta - \dot{\alpha} \sin \beta)\end{aligned}\quad (4.30)$$

其中点代表对时间的微分。当选择一组合适的变量 $\alpha(t), \beta(t), \phi_0$ 后，我们可以逆向工程哈密顿量 $H_d(t)$ 来设计目标演化路径。用这种方式，在环形演化之后，我们可以设计一个暗态路径在亮态 $|b\rangle$ 上产生目标的非阿贝尔几何相位。在环形演化的限制下 $|d_2(T)\rangle \langle d_2(T)| = |d_2(0)\rangle \langle d_2(0)|$ ，边界条件 $\alpha(T) = \alpha(0) = 0$ 和 $\beta(T) = \beta(0) = 0$ 必须得到满足。与此同时， $\langle d_i | H_1(t) | d_k \rangle = 0$ 总是满足的，也就是说，在整个演化过程中是没有动力学相位积累的。最后，我们就可以得到一个纯的几何相位来实现目标非绝热和乐量子门。

为了实现一组通用的单比特和乐门，我们采用 single-loop 的方式，其中演化时间 T 被分成两个相等的时间间隔： $0 \rightarrow T/2$ 和 $T/2 \rightarrow T$ 。考虑到边界条件，我们设定 $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ ， $\beta(t) = \eta[1 - \cos(\alpha(t))]$ ，其中参数 η 是一个可以决定演化路径的常数。当 $\eta = 0$ 时，演化过程退回到以往的三能级和乐量子门方案。在我们的实验中，我们设定 $\eta = 4$ 。然后参数 $\Omega(t), \Omega_2(t)$ 可以通过公式 4.30 来解决。在第一段演化时间 $t \in [0, T/2]$ 内，我们设定 $\phi_0 = 0$ ，相应的演化算符为 $U_1(T/2, 0) = |d_1\rangle \langle d_1| - i|a\rangle \langle b|$ 。在第二段演化时间 $t \in [T/2, T]$ 内，我们设定 $\phi'_0 = -\gamma$ 。相应的演化算符为 $U_2(T, T/2) = |d_1\rangle \langle d_1| + ie^{i\gamma}|b\rangle \langle a|$ 。整个几何演化的矩阵为 $\{|d_1\rangle, |b\rangle\}$ 子空间上的 $U(T, 0) = |d_1\rangle \langle d_1| + e^{i\gamma}|b\rangle \langle b|$ 。同时这个么正矩阵可以写为 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基矢上的：

$$U(\theta, \phi, \gamma) = e^{i\frac{\gamma}{2}} e^{-i\frac{\gamma}{2}\vec{n} \cdot \vec{\sigma}} \quad (4.31)$$

其中 $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, $\vec{\sigma}$ 为泡利矩阵。上面的旋转矩阵 U 描述了围绕轴 $\vec{n}$ 旋转角度 γ , 然后乘上一个全局相位 $\exp(i\gamma/2)$ 的操作。

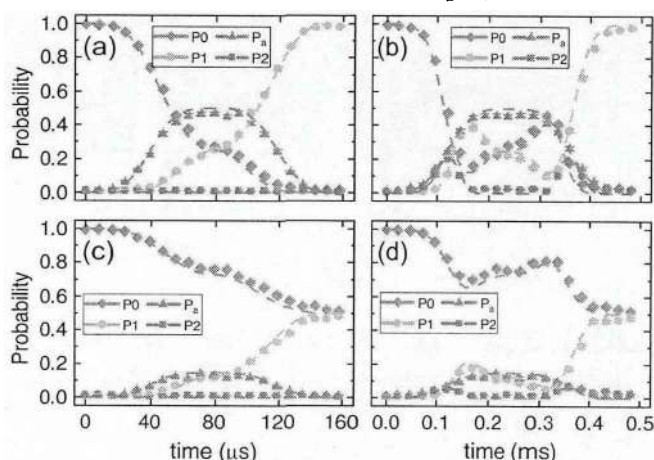


图 4.8 和乐量子门过程中的态布局动力学 (MZ Ai et al, arXiv:2101.07483, 2021.)。 (a) 和 (c) 分别是在 NHQC 中 X、H 门 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |a\rangle$ 的概率。 (b) 和 (d) 分别是在 HQCTD 中 X、H 门 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |a\rangle$ 的概率。

整个实验设备和实验流程与前边的 RNHC 几乎完全相同, 因此我们这里不再进行赘述。为了更加清晰的搞明白在几何演化过程中的整个流程, 我们探究了一下在几何门进行过程中时, $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |a\rangle$ 四个态的布局转移情况, 具体可以参加图 4.8。我们同样也对该量子门进行了量子过程层析和 Randomized Benchmarking 的表征, 得到平均门保真度在 $F_{\text{ave}} = 98.75\% \pm 0.02\%$, 每个门单独的保真度分别为: $F_X = 98.03\% \pm 0.01\%$, $F_H = 98.95\% \pm 0.01\%$, $F_T = 98.55\% \pm 0.02\%$, $F_S = 98.64\% \pm 0.02\%$ 。

我们同样也对演示的和乐量子门进行了鲁棒性测试, 在保证其他参数相同的情况下, 我们对比了基于两条暗态路径的 HQCTD 和以往的三能级 NHQC 在不同的拉比频率误差下的表现。结果如图 4.9 所示, 在所有对比的单量子比特门中, 当误差非常小的时候, NHQC 的表现都要比 HQCTD 要好一些, 但是随着误差的逐渐增加, HQCTD 会越来越比 NHQC 有优势。值得注意的是, 在不考虑退相干的模拟实验中, 无论误差是大还是小, HQCTD 都要比 NHQC 表现优越。也就是说, 理论上我们是可以通过不断的通过改进我们的系统, 提高系统的相干时间来提升 HQCTD 的效果的。

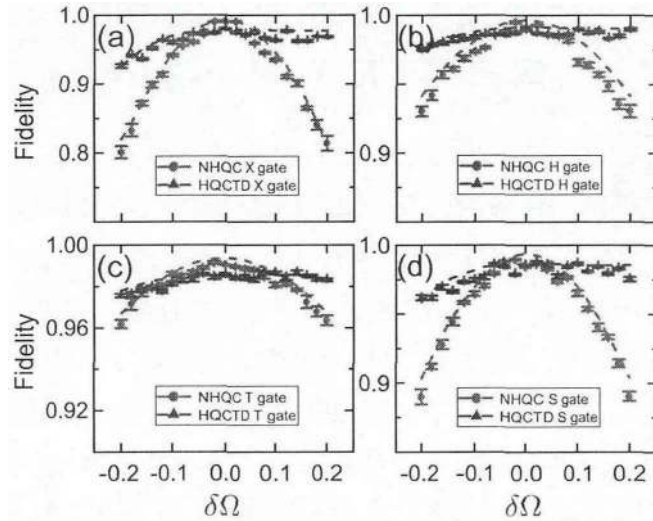


图 4.9 不同单比特量子门的噪声鲁棒特性 (MZ Ai et al, arXiv:2101.07483, 2021.). (a),(b),(c) 和 (d) 分别时 HQCTD ($\eta = 4$) 和 NHQC ($\eta = 0$) 在不同拉比频率误差下 X,H,T,S 四个单比特门的对比。NHQC 在拉比频率误差较小的情况下表现要比 HQCTD 要好, 但是随着误差的增加, HQCTD 表现的要比 NHQC 好很多。

4.8 本章小结

综上所述, 我们使用共振驱动在实验上面演示了任意的具有鲁棒性的非绝热和乐量子单比特门。通过与以往的非绝热和乐量子门和动力学门进行对比, 我们发现该方案对于控制幅度误差具有很好的鲁棒性效果, 有可能在未来的鲁棒性量子计算方面提供一定的帮助。与此同时, 为了实现通用的量子计算, 我们也提出了通过离子的内能级和声子能级进行耦合从而实现两比特门的方案。由此证明了基于离子阱系统的非绝热和乐量子计算是完全可以实现的。

第 5 章 可控噪声场下反 Kibble-Zurek 机制的研究

基于自发性对称破缺的形式, Tom Kibble 为像希格斯场这样的二分量标量场的原生扰动发展出一种新的思想。假如在早期宇宙冷却的过程中, 二分量标量场从均匀的高温相变化到对称破缺的阶段, 系统的序参数 (序参数是相变系统中跨越边界的有序度的量度, 是在相变过程中左右着系统演化的进程, 可以用于描述系统在临界点处行为的参量) 在相隔非常远的区域不一定是相同的。当系统的两部分区域相隔非常远甚至于都无法用光速进行交流的时候, 我们一般称这两部分区域是没有因果关系的。这意味着对称不能在全局上被打破, 随着宇宙的进一步演化, 因果无关的两个区域的序参数将会产生不同的值, 区域之间会产生壁垒。一些拓扑缺陷像磁单极子、涡旋等将会产生。到目前为止, 这些缺陷还并没有在宇宙视界内被观察到, 而这也成为了宇宙膨胀猜想的一个主要原因。在宇宙大爆炸后的 10^{-30} 秒内, 所有产生的缺陷都快速膨胀跑出了视界边界。很快, Wojciech Zurek 指出, 同样的规律也适用于常规相的液氦到超流相液氦的相变过程中。逐渐的, Kibble-Zurek 机制被人们开始广泛的用于描述从宏观到微观世界的相变过程并取得了不错的成果, 成为了一项非常重要的物理猜想。本节用囚禁离子作为实验平台, 在量子微观尺度上面再次验证了 Kibble-Zurek 机制, 并且探究了在噪声扰动情况下的一种违反 Kibble-Zurek 机制的行为。

5.1 Kibble-Zurek 机制背景介绍

Kibble-Zurek (KZ) 机制最初被 Kibble 和 Zurek 提出来描述早期宇宙的演化^[164-165], 同时也提供了一个行之有效的理论框架用于研究相变的临界动力学^[166]。考虑由于控制参数 λ 的改变导致的自发对称破缺的动力学过程。一个连续二阶相变可以由两个参数的差异进行表征, 其中一个是平衡关联长度 ξ :

$$\xi(\varepsilon) = \frac{\xi_0}{|\varepsilon|^\nu} \quad (5.1)$$

另外一个平衡弛豫时间 τ :

$$\tau(\varepsilon) = \frac{\tau_0}{|\varepsilon|^z \nu} \quad (5.2)$$

与临界点 λ_c 距离的函数。我们可以方便的定义约化距离参数:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_c - \lambda}{\lambda_c} \quad (5.3)$$

随着临界点与退简并真空流形相交 ($\epsilon > 0$)，初始被制备到高对称相 ($\epsilon < 0$) 的系统面临自发对称破缺的场景。

在公式 5.1 中， ν 是关联长度临界指数，同时公式 5.2 中的 z 是动力学临界指数，属于同一通用类型的不同系统具有相同的临界指数。在上面的公式中， ξ_0 和 τ_0 是依赖物理系统维度的常数，而 ν 和 z 只取决于相变的类型。KZ 机制描述了含时变化的参数 λ 穿过临界值的连续相变动力学。含时变化的参数 $\lambda(t)$ 在接近 λ_c 的时候通常是线性的，因此我们可以假定在临界点附近的退火是线性发生的：

$$\lambda(t) = \lambda_c [1 - \epsilon(t)] \quad (5.4)$$

约化参数可以用退火时间 τ_Q 来表征，并且随着时间线性变化：

$$\epsilon(t) = \frac{t}{\tau_Q} \quad (5.5)$$

其中时间 $t \in [-\tau_Q, \tau_Q]$ ， $t = 0$ 时到达临界点。当系统远离临界点的时候 $|\lambda| \gg \lambda_c$ ，平衡弛豫时间与到达平衡位置需要的时间相比非常小，动力学是绝热的。与之相反，当系统靠近临界点的时候，由于平衡弛豫时间无限发散，系统的动力学近乎被冻住。此时系统不能有效的根据外部参数的变化进行调整。正如图 5.1 表示的那样，KZ 机制把动力学分为三个阶段：动力学绝热演化，系统被冻住，再次绝热演化。在这个过程中参数 $\epsilon(t)$ 也从 $\epsilon(t) < 0$ 变化到 $\epsilon(t) > 0$ 。

这种近似 (后来被人们称作 **adiabatic-impulse** 近似)，抓住了非平衡动力学相变过程中的本质。冻结的本质是定义序参数的集体自由度不能跟上外部参数的改变。这并不意味着系统中所有的演化都终止了，或者序参数的演化都完全停止了。系统的微观状态依然在按照哈密顿量演化，甚至局部的微观热动力学平衡也依然在保持。但是，序参数不再跟随其平衡值，只能跟上局部的值，这在某种意义上会导致拓扑缺陷的产生。

绝热和冻结的边界可以通过对比平衡弛豫时间和经过临界时间点的的时间的对比进行估计：

$$\tau(t) \approx |\epsilon/\dot{\epsilon}| = t \quad (5.6)$$

通过这个方程可以得到时间尺度：

$$\hat{t} \sim \left(\tau_0 \tau_Q^{z\nu} \right)^{\frac{1}{1+z\nu}} \quad (5.7)$$

这个时间被称为冻结时间。系统选择对称破缺的自由度跟不上外界 ϵ 的改变，结果导致系统的序参数在间隔 $\epsilon \in [-\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon}]$ 内超出其平衡值：

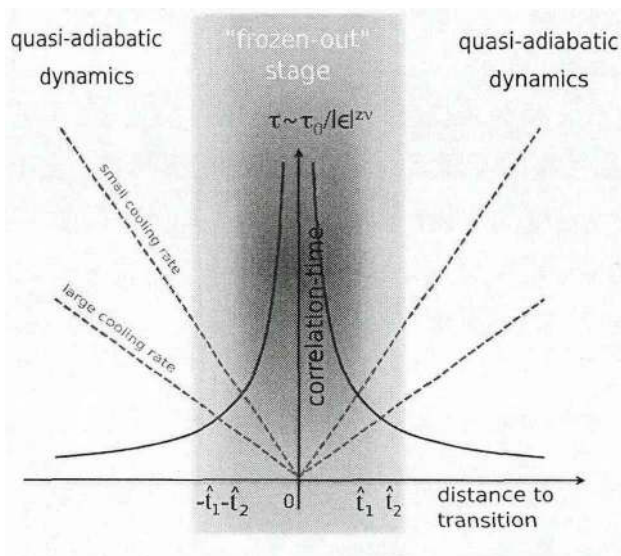


图 5.1 adiabatic-impulse 近似下, KZM 的三个阶段(维基百科: Kibble-Zurek mechanism)。在线性退火区域, 约化控制参数 $\epsilon = t/\tau_Q$ 驱动系统从对称相 ($t < 0$) 穿过临界点到达低对称相 ($t > 0$)。由于平衡弛豫时间的发散, 导致靠近临界点时系统动力学被“冰冻”, 系统的序参数停止跟随平衡期望值并在时间 $[-\hat{t}, \hat{t}]$ 内进入到 impulse 区域。

$$\hat{\epsilon} \equiv |\epsilon(\hat{t})| \sim \left(\frac{\tau_0}{\tau_Q} \right)^{\frac{1}{1+z\nu}} \quad (5.8)$$

自发对称破缺需要基态的简并。在一个扩展的系统中, 因果分离的区域会表现出相互独立表现。KZ 机制通过平衡关联长度的值来设定这些区域的平均尺寸:

$$\hat{\xi} \equiv \xi[\hat{\epsilon}] = \xi_0 \left(\frac{\tau_Q}{\tau_0} \right)^{\frac{\nu}{1+z\nu}} \quad (5.9)$$

这是 KZ 机制的主要预测点。

只有当系统的弛豫时间随 ϵ 指数变化时, 上面关于 $\hat{\xi}$ 的简单形式才成立。同时此处对于 $\hat{\xi}$ 的估计也经常被用来估计系统最后的拓扑缺陷密度:

$$n \sim \frac{\hat{\xi}^d}{\hat{\xi}^D} = \frac{1}{\xi_0^{D-d}} \left(\frac{\tau_0}{\tau_Q} \right)^{(D-d)\frac{\nu}{1+z\nu}} \quad (5.10)$$

其中 D 和 d 分别是空间和缺陷的维度。尽管 KZ 机制提供了一个对于缺陷密度数量级估计的方法, 但是其并不能准确的估算缺陷的数目。

在量子领域, KZ 机制在量子模拟的基态制备和绝热量子计算等方面提供了有用的启发^[167]。尽管 KZ 机制有许多非常重要的应用, 但是依然需要更多的工作去对它进行实验探究。到目前为止, KZ 机制已经在许多经典连续相变的系统

上面得到了验证, 诸如超冷原子气^[168], 离子晶体^[169-170], 超导电路^[171]等。与此相对应的, 往往需要在超冷原子或者玻色-爱因斯坦凝聚态系统中实现的^[172-175] KZ 机制的量子相变, 目前依然很缺乏实验的验证。最近几年, 逐渐发展 Landau-Zener 模型, 已经成为了一种探索二能级系统 (如光学干涉仪^[176], 囚禁离子系统^[155,177], 超导电路^[178]) 中 KZ 机制行之有效的方法。

尽管 KZ 机制被相信是广泛适用的, 但是 2012 年, 一个相反的观测却在研究铁磁相变的时候被报道出来: 在绝热近似下, 更长的退火时间导致了更多的拓扑缺陷。这个违反直觉的现象, 与标准的 KZ 机制相反, 被称作反 KZ 动力学^[179]。从那以后, 大量的研究投入到了反 KZ 机制的深入探讨中。与热耗散耦合的量子系统在量子退火中的特性被 Patane 等人进行了理论探究^[180-181], 揭示了反 KZ 行为。与此同时, del Campo 等人发现一个热隔离系统在噪声控制场下经过临界点也表现出反 KZ 的行为^[182]。为了探索反 KZ 行为是否会出现其他的量子自旋模型中, Gao 等人在理论上探索了横场 XY 链模型在含噪声控制场中穿过量子临界点的动力学^[183]。最近, 反 KZ 机制被研究人员利用 D-Wave 量子模拟器在一维和二维 Ising 模型中进行了演示^[184]。在 D-Wave 模拟器上对一维 Ising 模型进行的另外一项研究揭示了环境扰动耦合到特定的系统算符上也会导致反 KZ 行为^[185]。然而, 以往的研究都局限于理论探索或者是不可控噪声下的实验探索^[177,179,182,186-187], 不幸的是, 这样的实验无法探究该理论预测中最为重要的在不同噪音强度下, 缺陷与退火时间关系的规律。

因此, 我们利用囚禁 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的二能级结构, 得益于对高斯白噪声的精确控制, 探究了在可控噪声强度下, 横场 XY 链模型中不同噪音强度下缺陷密度与退火时间的关系。最终得出了最优退火时间与噪音强度的关系。

5.2 横场 XY 链中的反 KZ 机制理论

均匀横场中的自旋 1/2 量子 XY 链, 是除了量子 Ising 模型之外另外一个可以精确求解的自旋模型。只考虑最近邻相互作用下横场 XY 链的哈密顿量可以写为:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (J_x \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + J_y \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + h \sigma_n^z) \quad (5.11)$$

其中 N 代表了自旋的数目, $\sigma_n^i (i = x, y, z)$ 是作用到第 n 个自旋上的泡利矩阵, J_x 和 J_y 分别代表了沿着 x 和 y 方向的各向异性相互作用, h 为横场的强度。我们假定 $J = J_x + J_y$, $\gamma = (J_x - J_y)/J$, 然后哈密顿量可以被重新写为:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{n=1}^N [(1+\gamma)\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + (1-\gamma)\sigma_n^y \sigma_{n+1}^y] - h \sum_{n=1}^N \sigma_n^z \quad (5.12)$$

当 $\gamma = 0$ 的时候系统变成各向同性的, 当 $\gamma = 1$ 的时候系统变为 Ising 模型。这个哈密顿量可以使用 Jordan-Wigner 变换进行精确的对角化, 从而把一个自旋为 $1/2$ 的系统变为无自旋的费米子系统^[188]。自旋到费米子的 Jordan-Wigner 变换可以给出 $\sigma_n^\pm = \exp\left(\pm i\pi \sum_{m=1}^{n-1} c_m^\dagger c_m\right) c_n$, $\sigma_n^z = 2c_n^\dagger c_n - 1$, 其中 $\sigma_n^\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y$ 。在费米子系统中, XY 模型的哈密顿量可以重写为:

$$H = -J \sum_{l=1}^N \left[\left(c_l^\dagger c_{l+1} + c_{l+1}^\dagger c_l \right) + \gamma \left(c_l^\dagger c_{l+1}^\dagger + c_{l+1} c_l \right) \right] - h \sum_{l=1}^N \left(2c_l^\dagger c_l - 1 \right) \quad (5.13)$$

在周期性边界条件 $\sigma_{N+1}^\alpha = \sigma_1^\alpha$ 下, 要求 $c_{N+1} = -c_1$, 其中 N 为偶数。经过傅里叶变换 $c_n = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{N}} \sum_{k \in (-\pi, \pi]} (e^{ikn} c_k)$, 我们可以得到 $H = \sum_{k \in [0, \pi]} \Psi_k^\dagger \mathcal{H}(k) \Psi_k$, 其中 $\Psi_k^\dagger = (c_k^\dagger, c_{-k})$ 并且在动量空间中的哈密顿量密度可以表达为:

$$\mathcal{H}(k) = -2 \left[\hat{\sigma}_z (J \cos k + h) + \hat{\sigma}_x (J \gamma \sin k) \right] \quad (5.14)$$

系统的能量谱可以通过对角化公式 5.14 得到, 不同量子相之间的临界点或者临界线可以通过最小化能量间隔来得到。图 5.2 描述了横场 XY 链在参数 h/J 和 γ 张成的空间中的相图。在该相图中存在一个量子顺磁相 (PM) 和两个铁磁相, 分别沿 x 和 y 方向被标记为 FMx 和 FMy。这些不同的相构成了三种相位边界: 沿着横轴 $\gamma = 0$ 上的 Ising 临界线; 在 $(\gamma = 0, h/J = 1)$ 上的多临界点; 沿着 $h/J = \pm 1$ 的两条无间隙的线。当系统被一个或者多个参数驱动经过临界线或者临界点的时候, 就会发生量子相变。

为了学习横场 XY 链的退火动力学, 我们可以将哈密顿量分解为一系列互相独立子哈密顿量的和 $H(t) = \sum_{k \in [0, \pi]} \mathcal{H}(k, t)$, 其中每一个 k 模式的哈密顿量 $\mathcal{H}(k, t)$ 都可以由公式 5.14 作用到一个二维希尔伯特空间得到。态的含时演化被薛定谔方程 $i \frac{d}{dt} |\psi_k(t)\rangle = \mathcal{H}(k, t) |\psi_k(t)\rangle$ 主导。这个自旋哈密顿量向 2×2 希尔伯特空间的投影有效的将量子多体问题转换为一系列互相解耦的二能级问题, 这也是我们能够在单离子的二能级系统上进行这个实验的根本。

为了方便实验的实施, 我们每次只选择参数 h, J_x, J_y, γ 中的一个随时间线性变化而其他的保持不变。我们考虑三种不同的系统通过相图边界的退火方案: (i) transverse 退火方案, 只变化参数 $h(t)$, 沿着边界线从顺磁相变化到铁磁相, 在图中以紫色箭头标识; (ii) 只变化参数 J_x , 穿过 multicritical (MC) point 的退火方

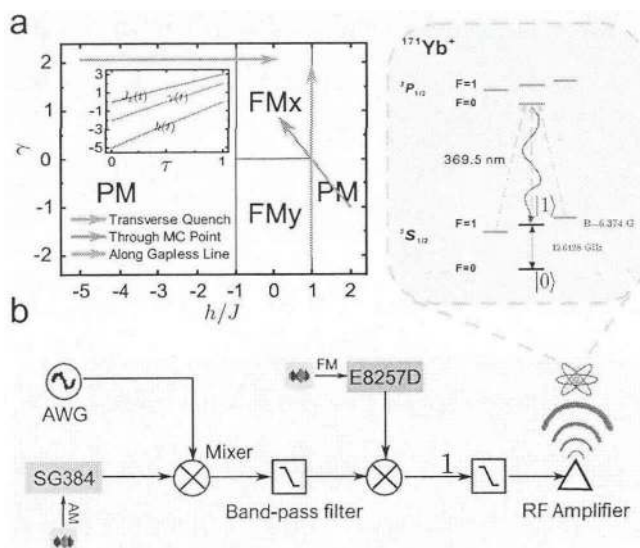


图 5.2 三个量子相变的相图和实验装置 (MZ Ai et al, *Physical Review A*, 2021, 103(1): 012608)。(a) 相图被分成顺磁性 (PM) 和铁磁性 (FM) 两种相, 它们在 $\gamma - hJ$ 框架下被参数 $h/J = \pm 1$ 分开。中间的 FM 相被线 $\gamma = 0$ 分成两个部分, 分别沿着 x 和 y 方向。三个箭头分别代表了三个退火方案。插图展示的是退火参数和时间的关系。(b) 实验中产生微波的设备简图。

案, 系统从顺磁相变化到铁磁相, 在图中用绿色箭头来标识; (iii) 只有 $\gamma(t)$ 变化且保证 $h/J = 1$, 穿过 gapless line 的退火方案, 在图中用橙色箭头来标识。当退火过程中没有热耗散或者噪声扰动的时候, 退火过程中形成的缺陷密度应该遵从 Kibble-Zurek (KZ) 机制, 缺陷密度随退火时间按照参数 $\beta = 1/2, 1/6, 1/3$ 呈指数衰减。然而, 当退火过程中存在噪声场的时候, 缺陷密度会展示出违反 KZ 机制的行为。

我们现在理论描述一下如何在控制场中加入噪声扰动 $\eta(t)$, 总的退火参数可以写为:

$$f_j(t) = f_j^{(0)}(t) + \eta(t) \quad (5.15)$$

其中 $f_j^{(0)}(t) \propto t/\tau_j$ 为随着退火时间 τ_j 线性变化的控制参数, 角标 $j = 1, 2, 3$ 则分别代表了三种退火方案。由于白噪声是一种对指数衰减的有色噪声很好的近似, 因此这里我们将 $\eta(t)$ 设置为平均值为 0, 二阶矩为 $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = W^2 \delta(t - t')$ 的高斯白噪声, 其中 W^2 代表了噪声的强度。我们将 W 设置为一个小值, 以保证噪声平均密度矩阵技术的有效性^[189]。我们考虑系统哈密顿量包含两个部分:

$$H(t) = H^{(0)}(t) + \eta(t)V \quad (5.16)$$

其中 $H^0(t)$ 代表了理想的退火哈密顿量，其描述了驱动系统的演化， $\eta(t)V$ 代表了控制场的扰动噪声，这将会把驱动过程改变为一个有效的开放动力学过程。定义随机波函数 $|\psi_\eta(t)\rangle$ ，按照薛定谔方程：

$$i \frac{d}{dt} |\psi_\eta(t)\rangle = [H^{(0)}(t) + \eta(t)V] |\psi_\eta(t)\rangle \quad (5.17)$$

随机密度矩阵 $\rho_\eta = |\psi_\eta\rangle \langle \psi_\eta|$ 是 $\eta(t)$ 的函数：

$$\frac{d}{dt} \rho_\eta(t) = -i [H^{(0)}(t), \rho_\eta(t)] - i [V, \eta(t)\rho_\eta(t)] \quad (5.18)$$

我们假定所有的噪声都是相互独立的，这可以让我们将随机过程中的噪声进行平均。定义噪声平均的密度矩阵 $\rho_t = \langle \rho_\eta(t) \rangle$ ，这个密度矩阵同时也是主方程的解：

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i [H^{(0)}(t), \rho_\eta(t)] - i [V, \langle \eta(t)\rho_\eta(t) \rangle] \quad (5.19)$$

对高斯噪音应用 Novikov 理论^[190]，我们可以得到 $\langle \eta(t)\rho_\eta(t) \rangle = -iW^2[V, \rho(t)]/2$ 和精确的主方程：

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i [H^{(0)}(t), \rho(t)] - \frac{W^2}{2} [V, [V, \rho(t)]] \quad (5.20)$$

根据这个主方程我们可以在理论上对含控制噪声的 KZ 行为进行有效的模拟。

在横场 XY 链模型中，退火后缺陷密度的定义和 Ising 模型非常相似。对于每一个 k 模式，我们可以在退火结束时找到其噪声平均的密度矩阵 $\rho_k(\tau_j)$ 。在绝热瞬时本征态的基 $\{|G_k(\tau_j)\rangle, |E_k(\tau_j)\rangle\}$ 上，我们可以对每个模式 k 测量其在激发态 $|E_k(\tau_j)\rangle$ 的概率 $p_k = \langle E_k(\tau_j) | \rho_k(\tau_j) | E_k(\tau_j) \rangle$ 。也就是说，对于整个 XY 链而言，所有的模式都会对缺陷密度产生贡献：

$$n_W = \frac{1}{N_k} \sum_{k \in [0, \pi]} p_k \quad (5.21)$$

其中 N_k 为实验中用到的模式的数目。对于没有噪音的情况 $W = 0$ ，这个值为 n_0 。然后通过测量不同模式下的激发概率，我们就可以得到系统在退火后的缺陷密度了。

5.3 实验设计及验证

5.3.1 实验设备

我们在 needle 阱中束缚的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子中进行了本次模拟实验。离子 $S_{1/2}$ 基态能级上面的两个超精细能级被编码为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$: $|^2S_{1/2}, F=0, m_F=0\rangle, |^2S_{1/2}, F=1, m_F=0\rangle$ 。驱动离子系统的微波通过两步混频的方式完成。一个 200 MHz 的微波信号从一个两通道任意波形发生器 (Spectrum) 里产生, 然后与一个 3 GHz 的微波信号 (from SG384, Stanford Research Systems) 进行混频。混频过后的信号继续与另外一个 9.44 GHz 的微波信号 (from E8257D, Agilent) 进行混频得到 12.64 GHz 左右的驱动微波。然后微波被放大到 2 W 并通过微波喇叭传送到离子的位置, 微波混频方案可以在图 5.2 中进行查看。在我们所有的实验中, 拉比频率被设定为 $100\ \mu\text{s}$, 下文及图中所有关于退火时间 τ 的时间表达都指拉比时间的倍数。

5.3.2 白高斯噪声的生成

在详细描述实验过程之前我们先讨论一下在我们的实验中微波控制场中可控噪声是如何产生的。众所周知, 高斯白噪声是信息理论中一种基本的噪音模型, 其经常被用来模拟发生在自然界中的许多随机过程产生的效果。我们在实验中应用的高斯白噪声是内置在微波信号源中的, 为了表征它们的特性, 我们利用频谱分析仪和数据采集卡对噪音数据进行了采集, 它们的时域和频域信息可以在图 5.3 中得到验证。

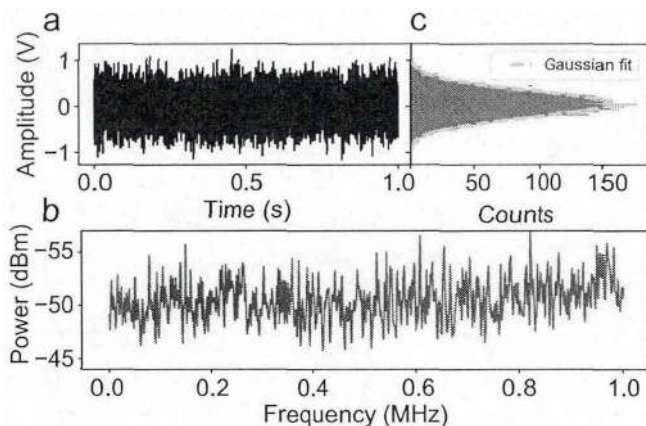


图 5.3 微波信号源中产生的白高斯噪声 (MZ Ai et al, Physical Review A, 2021, 103(1): 012608)。(a) 噪声的时域信息。(b) 谱仪收集到的噪声的频域信息。在 1 MHz 以内谱密度是个常数, 意味着噪声是白噪声。(c) 噪声幅度的柱状图。我们用高斯公式拟合了一下这个柱状图, 得到拟合参数 $\mu = -6.27 \times 10^{-3}, \sigma^2 = 0.1$ 。

假定 $\eta(t)$ 为平均值为 0，二阶矩为 $\langle \eta(t)\eta(\tau) \rangle = W^2\delta(\tau)$ 的高斯白噪音。根据 Wiener-Khinchin-Kolmogorov^[191] 理论，这个噪声的谱密度是其自相关的傅里叶变换：

$$\langle \eta(t)\eta(\tau) \rangle = \int \eta(t)\eta(t-\tau)dt = \int \frac{d\omega}{2\pi} |g(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} \quad (5.22)$$

其中 $g(\omega)$ 是功率谱密度， ω 为角频率。对于高斯白噪音来说，功率谱密度在一定的带宽范围内是一个常数 (在这里是 1 MHz)。由 δ 函数的傅里叶变换 $\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega\tau} d\omega$ ，我们可以得出结论 $g(\omega) = W$ 。在 transverse 退火方案中，高斯白噪音被添加到哈密顿量的 σ_z 部分，噪声哈密顿量为 $V^{(1)} = -2\eta(t)\sigma_z$ 。我们用高斯噪音对余弦微波信号进行频率调制，调制后的信号可以写为：

$$y_1(t) = \cos((\omega_{\text{res}} + FG(t))t) \quad (5.23)$$

其中 ω_{res} 为离子内态的共振频率。 F 是调制频偏，无量纲的参数 $G(t)$ 是噪声信号。在标准的二能级系统哈密顿量中，失谐频率 $\Delta = FG(t) \propto \eta(t)$ 。由于噪声的谱密度是其自相关的傅里叶变换 (公式 5.22)：

$$g(\omega) = \int_0^{1\text{MHz}} dt \eta(t) e^{i\omega t} \quad (5.24)$$

且高斯白噪音的带宽为 1 MHz，远远大于实验的拉比频率。因此我们可以得出结论 $F \propto W$ ，调制频偏的改变等价于噪声强度的改变。

在沿着 gapless line 退火的方案中，高斯白噪音被加到哈密顿量的 σ_x 部分，相应的噪声哈密顿量为 $V^3 = -2\eta(t)J \sin k\sigma_x$ 。在实验上我们利用高斯噪音对余弦微波信号进行幅度调制，调制后的信号可以被写为：

$$y_2(t) = [1 + AG(t)] \cos(\omega_{\text{res}}t) \quad (5.25)$$

其中 A 为调制深度。在离子哈密顿量中，拉比频率 $\Omega \propto AG(t)$ ，也就是说 $AG(t) \propto \eta(t)$ 。根据公式 5.25，噪音的强度正比于调制深度 A ，改变调制深度意味着改变噪音的强度。

至于第二种退火方案，穿过 MC point 的退火，高斯白噪音同时加到了哈密顿量的 σ_x 和 σ_z 的部分，而我们也同时对微波信号进行了频率调制和幅度调制，基于上面的原理，等比例的改变频率调制频偏和幅度调制深度，也就可以改变噪音的大小。利用这样的原理，我们在实验上实现了可控的噪声控制场，为后面探究最优退火时间奠定了基础。

5.3.3 三种退火方案实施

我们首先考虑 **transverse** 退火方案。在这个方案中，只有参数 $h(t)$ 是随时间变化的。为了模拟噪声扰动下的退火动力学，我们将高斯白噪声添加到含时参数 $h(t)$ 中，得到哈密顿量为：

$$H_m^{(1)}(k, t) = -2 \left[(J_x + J_y) \cos k + h(t) \right] \sigma_z - 2 \left[(J_x - J_y) \sin k \right] \sigma_x - 2\eta(t)\sigma_z \quad (5.26)$$

通过一些合适的变换 $v_{LZ} = v_h/(2J\gamma \sin k)^2$, $t_{LZ} = 4J\gamma \sin k (t + J \cos k/v_h)$ ，这个哈密顿量可以转化为标准的 Landau-Zener 模型 (LZ 形式: $H_{LZ}(k, t) = -\frac{1}{2}(\sigma_x + v_{LZ}t_{LZ}\sigma_z) - \frac{1}{2}\eta/(\gamma J \sin k)\sigma_z$)。标准的 LZ 模型可以被单离子系统有效的进行模拟^[155]。我们首先驱动 qubit 从初态 $|0\rangle$ 到哈密顿量 $H_m^{(1)}(k, 0)$ 的基态 $|G_k(0)\rangle$ 上面。在退火过程中，参数 $h(t)$ 线性的从 -5 变化到 0，并且保持 $J_x = 1, J_y = -1/3$ 不变。最后，执行第一个过程的逆过程用来将态重新驱动回 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基矢上面，以便测量激发态 $|E_k(\tau)\rangle$ 的概率 p_k 。整个激发态概率测量的流程可以参考图 5.4。在这个退火方案中的高斯白噪声是通过利用微波源内置的噪音源对微波信号进行频率调制实现的。不同的噪音强度通过变化调制的频偏 F 来实现。我们将哈密顿量 $H_1(t)$ 分解为 50 份相互独立的子项 $H_m(k, t)$ ，参数 k 等间隔的从 0 到 π 进行采样。最终的布局概率 p_k 在不同的噪音强度和退火时间下随 k 的变化情况如图 5.5 所示。高斯白噪声在 $k = \pi/2$ 附近造成了凸起，这也解释了在退火过程中产生的额外的缺陷，更强的噪音会导致更多的缺陷产生。

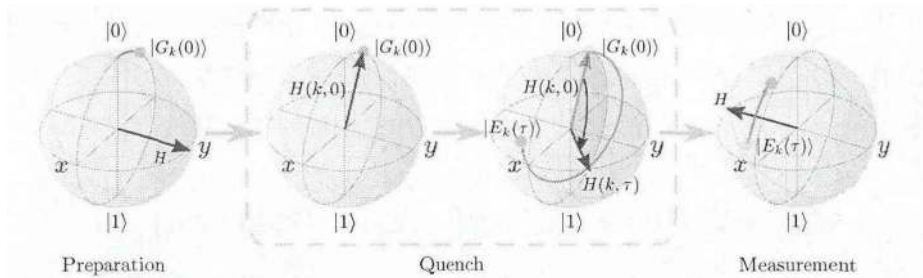


图 5.4 测量激发概率的方案 (MZ Ai et al, Physical Review A, 2021, 103(1): 012608)。一维横场 XY 链模型的量子临界动力学可以通过测量相应的 Landau-Zener 动力学进行探测。对于每个模式，一个典型的探测激发概率的过程包括初态制备，退火和测量。

接下来我们考虑通过 MC point 的各向异性退火方案。每个 k 模式下的哈密顿量可以写为：

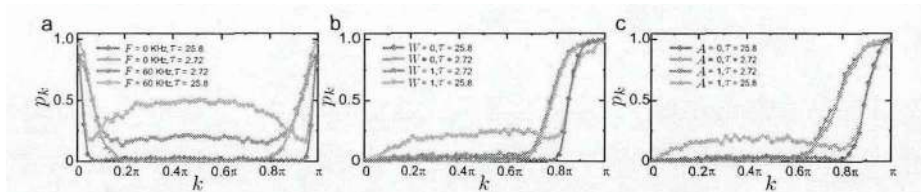


图 5.5 对于三种退火方案, 激发态概率 p_k 随模式 k 的变化 (MZ Ai et al, Physical Review A, 2021, 103(1): 012608)。 (a) Transverse 退火方案。蓝色和红色的符号代表了 60 kHz 频率偏差噪声控制场下的激发态概率。 (b) Gapless line 退火方案。 (c) MC point 退火方案。每种退火方案都展示了含有和不含有噪声下的激发概率的表现。

$$\begin{aligned}
 H_m^{(2)}(k, t) = & -2 \left\{ [J_x(t) + J_y] \cos(k) + h \right\} \sigma_z \\
 & -2 \left[(J_x(t) - J_y) \sin(k) \right] \sigma_x \\
 & -2\eta(t) [(\sin k)\sigma_x + (\cos k)\sigma_z]
 \end{aligned} \quad (5.27)$$

其中含时参数 $J_x(t)$ 从 0 变化到 3。这个哈密顿量同样可以通过一些恰当的变换 $v_{LZ} = v_x / [2(J_y \sin 2k + h \sin k)]^2$, $t_{LZ} = 4(J_y \sin 2k + h \sin k) [t + (J_y \cos 2k + h \cos k) / v_x]$ 变成标准的 LZ 模型。在退火过程中, 我们始终保持参数 $h = 2$, $J_x = 1$ 不变。在这种条件下, 系统初始在 PM 相, 然后经过 MC 点到达 FMx 相。在这个退火方案中用到的噪声通过同时对信号源进行频率调制和幅度调制产生。不同的噪声强度可以通过等比例的改变调制深度 A 和频偏 F 来实现。为了方便表述, 我们把噪声强度 W^2 表示为百分数, 其中对于幅度调制 $W^2 = A^2$, 对于频率调制 $W^2 = (F/60\text{kHz})^2$ 。不同噪声强度和退火时间下激发态概率随 k 的变化可以从图 5.5 中找到。

对于沿着 gapless line 的退火方案, 每个模式下的哈密顿量为:

$$\begin{aligned}
 H_m^{(3)}(k, t) = & -2 \left[(J \cos k + h) \sigma_z + J\gamma(t) \sin k \sigma_x \right] \\
 & -2\eta(t) J \sin k \sigma_x
 \end{aligned} \quad (5.28)$$

其中含时的参数 $\gamma(t)$ 从 -2 变化到 2, 并且其他参数被固定为 $h = 1$, $J = J_x + J_y = 1$ 。这个哈密顿量同样也可以经过合适的变换 $v_{LZ} = v_\gamma \sin k / [2(\cos k + 1)]^2$, $t_{LZ} = -4(\cos k + 1)t$ 转换成标准的 LZ 模型。在这个退火方案中, 噪声通过微波源内置的高斯白噪音进行幅度调制产生, 可以利用不同的调制深度 A 来实现不同的噪音强度。不同噪音强度和退火时间下激发态的概率随 k 的变化可以在图 5.5 中看到。

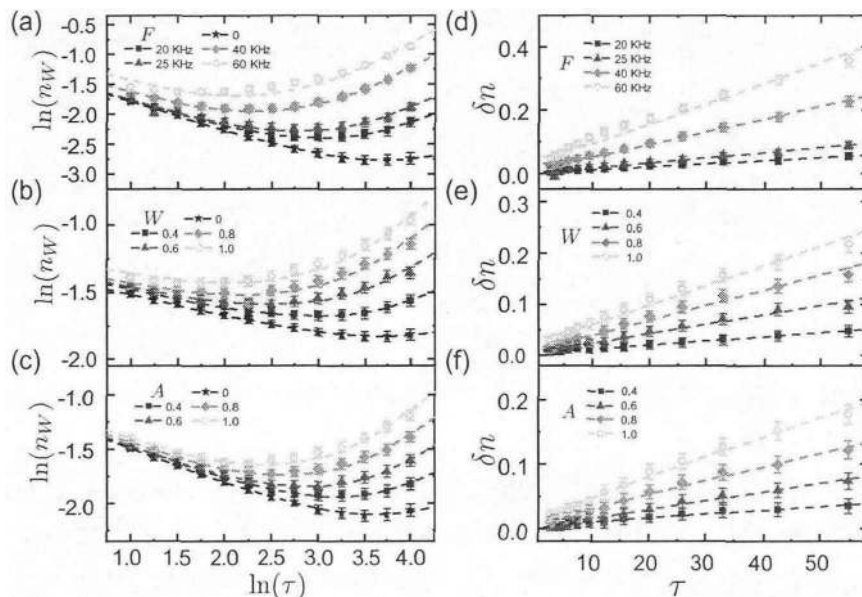


图 5.6 三种退火方案中缺陷产生的 Anti-KZ 行为。(a)-(c) 三种退火方案中缺陷密度 $\ln(n_W)$ 随着退火时间 $\ln(\tau)$ 的变化情况 (MZ Ai et al, Physical Review A, 2021, 103(1): 012608)。缺陷密度随着时间首先减少随后增加。对于同样的退火时间, 更强的噪音导致更多的缺陷。由于存在系统噪音, 甚至当没有认为加入的高斯噪音时, 也表现出了 anti-KZ 行为。(d)-(f) 高斯噪音引起的缺陷密度 $\delta n = n_W - n_0$ 。缺陷密度正比于退火时间。

5.3.4 最优化退化时间

在上面的三个退火方案中, 当控制场中存在噪音的情况下, 总的缺陷密度表现出反 KZ 机制的行为, 这种行为可以由公式 $n_W \approx r_W \tau + c\tau^{-\beta}$ 进行描述, 其中 $c\tau^{-\beta}$ 代表由于 KZ 机制导致的缺陷, 而 $r_W \tau$ 则代表了噪音造成的缺陷。另外值得注意的是, 像图 5.6 中表现出的那样, 当控制场中没有额外的误差时系统同样展示出了反 KZ 机制的行为, 这是由于实验设备中系统误差的存在 (如不完美的微波脉冲, 有限的相干时间, 态制备和测量误差等)。没有控制误差时的缺陷密度为 $n_0 \approx r_0 \tau + c\tau^{-\beta}$ 。因为参数 r_W 代表了存在系统误差时控制噪声产生缺陷的速率, 因此我们可以通过从 r_W 中减去 r_0 来消除系统噪音对缺陷产生的影响, 其中 r_0 为驱动场中没有噪声时的拟合参数。我们可以定义:

$$\delta n = n_W - n_0 \approx r_W \tau + c\tau^{-\beta} - (r_0 \tau + c\tau^{-\beta}) = \delta r \tau \quad (5.29)$$

来表示由于控制场中的噪声引起的缺陷。实验结果如图 5.6 所示。 $n_w \approx \delta r \tau + c\tau^{-\beta}$ 代表的是在 KZ 机制和不考虑系统噪声只有控制场中的噪声时产生的缺陷密度。最优退火时间 τ_{opt} 可以通过令 n_w 最小来求解。正如图 5.7 中展现的那样, 对于

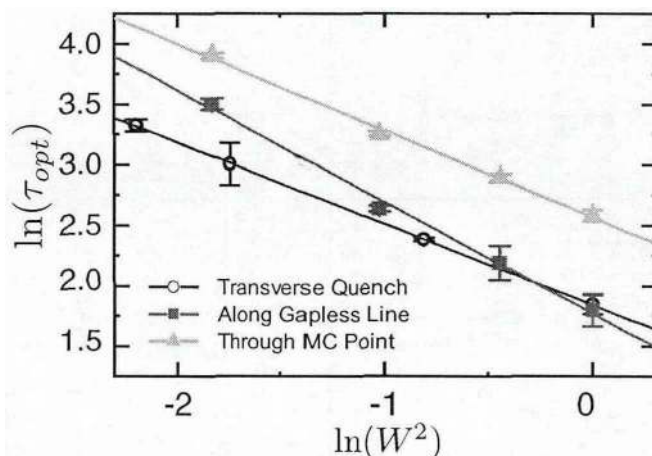


图 5.7 优化退火时间和噪声强度之间的关系 (MZ Ai et al, *Physical Review A*, 2021, 103(1): 012608)。优化退火时间 $\ln(\tau_{opt})$ 和噪声强度 $\ln(W^2)$ 之间呈现出正比关系 $\ln(\tau_{opt}) \propto \alpha_{fit} \ln(W^2)$ 。拟合参数分别为 $\alpha_{fit}^1 = -0.67 \pm 0.01$, $\alpha_{fit}^2 = -0.92 \pm 0.05$, $\alpha_{fit}^3 = -0.71 \pm 0.03$ 。

所有的退火方案，最小化缺陷的最优退火时间与噪声强度 W^2 呈指数关系。线性拟合可以得到 $\ln(\tau_{opt}) \propto \alpha_{fit} \ln(W^2)$ ，三种退火方案的拟合参数分别为 $\alpha_{fit}^1 = -0.67 \pm 0.01$, $\alpha_{fit}^2 = -0.92 \pm 0.05$, $\alpha_{fit}^3 = -0.71 \pm 0.03$ 。而其相对应的理论值分别为 $\alpha_{theory}^1 = -2/3 = -0.67$, $\alpha_{theory}^2 = -6/7 = -0.86$, $\alpha_{theory}^3 = -3/4 = -0.75$ 。可以看到，实验结果与理论值可以较好的吻合。

5.4 本章小结

综上所述，我们利用囚禁离子平台，通过可控的白高斯噪音，首次在实验上面探究了三种量子相变中出现的反 KZ 现象，定量的描述了在退火过程中缺陷出现的数目与噪音强度的关系。整个实验结果可以作为反 KZ 现象的一个有力证据。我们同样展示了使得产生的缺陷密度最小的优化退火时间与噪声强度呈现指数关系，这对于凝聚态、材料生长、量子退火等领域有十分重要的启发意义。

第6章 基于机器学习的鲁棒性量子控制

回顾科学过往的历史，我们不难发现许多重要的发明和发现都是通过多领域的交叉结合实现的。尤其是随着现代科学的飞速发展，单纯在物理领域的探索往往陷入瓶颈，难以获得进展。这时也许我们应该打开视野，多与不同领域的学者专家进行交流探讨，从而获得新的灵感。在本章，我们讨论了机器学习技术与量子物理问题的结合，通过机器学习技术，如何有效的帮助我们解决量子控制中的噪声鲁棒性问题。

6.1 基于机器学习的物理问题

在过去的十年里，机器学习 (machine learning, ML) 的迅速发展为各行各业 (诸如自动驾驶，医疗保健，金融，制造业，能源收集等) 带来了深远的影响，甚至被认为是像上世纪 80 年代计算机的应用一样具有重大意义的事情。机器学习的目标在于识别数据中的模式，这能使人们看到以往发现不了的规律和问题。例如，在自动驾驶这样一个高度复杂的系统中，大量从传感器中产生的数据需要被传送到中央处理器中，处理器用机器学习的方法来识别危险，进行决策。

最近几年，机器学习的成功首先表现在对一些现有技术的重大改进上，例如在图像识别领域。这些进步在很大程度上首次证明了机器学习方法对特定任务的作用。传统上自动化软件实现的目标也已经通过深度学习技术成功实现。例如强化学习技术在游戏中自动化中的演示，更进一步的提升了机器的认知能力，也往通用人工智能迈出了一大步。

随着机器学习技术在工业领域的应用，广大研究者开始探索其对于基础研究的帮助，特别是在物理领域。机器学习和物理学有着一些共同的方法和目标，这两门学科都关注收集和分析数据的过程，以设计出能够预测复杂系统行为的模型。然而两者在实现各自基本目标的方式上又存在显著差异。一方面，物理学家希望了解大自然的机制，用自己的知识、智慧和实验探索来构建模型；另一方面，机器学习通过不断的从数据中提取模型来提供“智能”，它对于模型的认知是黑箱的，我们往往无法说明模型因何工作，又如何改进。正因为两门学科认识规律的途径迥异，两者的结合与互助，往往产生了意想不到的效果，接下来我们会详细介绍一下机器学习及其在物理问题中的应用。

6.1.1 机器学习理论

目前主流的观点把机器学习分为三个类别，分别是监督学习、无监督学习和强化学习。我们会简单介绍一些相关内容的概念，如果想要更深一步的了解有关机器学习的发展历史和知识，我们推荐一些有用的书籍^[192-195]。

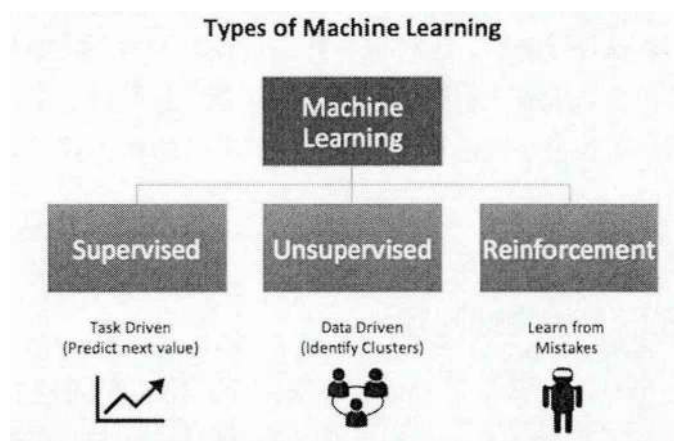


图 6.1 几种主流的机器学习方法 (IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN) p2278-8719)。
目前主流的机器学习方法分别是监督学习、无监督学习和强化学习。其中监督学习为任务驱动，主要目标是预测下一个值；无监督学习是数据驱动，主要目标是聚类；强化学习则主要从错误中学习正确的策略。

1. 监督学习

在监督学习任务中，存在一系列的 n 组数据，假定其中的一组数据为 $X_\mu \in \mathbb{R}^p$ ，其中 $\mu = 1, \dots, n$ 。例如每组数据可以看作是一张 25×25 的黑白色图片，每张图片都有 625 个值。对于每一组数据 X_μ ，同时会有一个标签数据 $y_\mu \in \mathbb{R}^d$ 用以说明其属性。监督学习的目标就是找到一个函数 f ，对于一组新的数据 X_{new} ，可以利用函数 $f(X_{\text{new}})$ 得到其对应的标签。在这个过程中，数据集 $\{X_\mu, y_\mu\}_{\mu=1, \dots, n}$ 被称为训练集。为了测试函数 f 的效果，大家往往把手中的数据分为训练集和测试集，分别用于模型的训练和评估。

整个训练过程都是为了寻找到一个合适的拟合函数 f 。大多数情况下，这个函数是由一系列参数构成的，这些参数分别叫做权重 $w \in \mathbb{R}^k$ 。然后对于每组数据会构建一个损失函数 $\mathcal{L}[f_w(X_\mu), y_\mu]$ ，这个函数表征了模型预测值 $f(X_\mu)$ 和真实值 y_μ 之间的距离。整个训练集上损失函数的平均值被称作经验风险 $\mathcal{R}(f_w) = \sum_{\mu=1}^n \mathcal{L}[f_w(X_\mu), y_\mu] / n$ 。

在训练过程中，模型的权重 w 被调整以最小化经验风险。最常用的最小化经验风险的算符是基于梯度下降的算法。在这种类型的算符中，权重参数 w 沿着经验风险的梯度方向被迭代调整：

$$w^{t+1} = w^t - \gamma \nabla_w \mathcal{R}(f_w) \quad (6.1)$$

其中参数 γ ，也叫学习率，表征了参数调整的快慢。当学习率设置过大的时候，模型可能会跳过最优值，而如果学习率设置过小，又会导致模型收敛速度太慢，增加训练时间。

运用监督学习方法的典型问题类型是分类问题和回归问题。分类问题往往是用一组特征值将样本进行离散值分类，例如信用卡风险评估问题，银行里面的风控部门往往会根据客户的职业、年龄、财产、信用等特征判断是否应该给该客户放贷。回归问题需要预测的往往是连续值。例如房价或者股票的走势。一些典型的监督学习算法有诸如线性回归、决策树等，不同的算法对于不同问题的效果也大相径庭。

2. 无监督学习

无监督学习与监督学习不同之处在于，无监督学习的训练数据只有一系列的特征 X_μ 而没有标签 y_μ 。这里学习的目标是恢复数据集中的一些底层结构。无监督学习的一个典型例子就是数据聚类，在数据聚类中，模型负责将数据点分配到不同的组中，每个组都有一些共同的属性。

在无监督学习中，人们通常寻求一种概率分布，这种概率分布产生的样本在统计上与观察到的数据样本相似，这通常被称为生成性建模。在某些情况下，这种概率分布是以显式形式编写的，并显式或隐式地参数化。生成模型内部包含潜在变量作为随机性的来源。当潜在变量的数量远小于数据的维数时，我们称之为降维。无监督学习的一个途径是搜索潜在变量的值，使观测数据的可能性最大化。

无监督学习的基本方法包括主成分分析及其变体。这个地方我想讲一下从物理学思想中得到的无监督学习方法——玻尔兹曼机 (BM)。BM 基本上是一个逆 Ising 模型，其中数据样本被视为来自成对交互 Ising 模型的 Boltzmann 分布的样本。目标是学习相互作用和磁场的值，以便观测数据的似然性 (玻耳兹曼测度中的概率)。受限玻尔兹曼机 (RBM) 是 BM 的一个特例，其中的两种变量：可见单元 (看到输入数据) 和隐藏单元通过有效耦合进行相互作用。在这种情况下，相互作用仅在可见和隐藏单元之间发生并再次进行调整，以使观测数据的似然性较大。BM 和 RBM 在多个物理领域都有非常广泛的应用。

3. 强化学习

强化学习 (RL)^[196] 同样是机器学习的一个领域。智能体观测目前自身处于环境的状态，同时做出下一步行动，达到新的状态并得到环境给予的奖励。强化学习的目的就是使得智能体能在这个过程中得到最大的奖励。强化学习的一个关键概念是，在利用迄今为止发现的好策略和探索找到更好的策略之间进行权

衡, 这也被称作“exploration exploitation balance”。

在许多工作中得到应用的一种主要的强化学习算法是 Q learning。Q learning 的主要内容是一个状态-行为值函数 Q , 这个函数规定了智能体在当前环境所处的状态下的行动方案。在整个训练过程中, 值函数 Q 被不断迭代的更新。但是值函数的方法有一个很严重的缺点, 当状态和行为数目非常大的时候, 计算机内存很难存储如此之大的矩阵 Q 。后来人们开始探索用深度神经网络来代替值函数, 这就是所谓的深度强化学习 (DRL)。最近几年强化学习应用最出名的例子要属谷歌的“阿尔法狗”在围棋中击败了世界冠军, 这也进一步说明了强化学习在目前的人工智能应用中的前景。

在这里我想简单阐述一下神经网络。神经网络是 Warren McCulloch 等人在 1943 年创造的一种模仿人类中枢神经系统的计算模型。一个神经网络一般由多层神经元结构组成, 每一层神经元拥有输入 (它的输入是前一层神经元的输出) 和输出, 每一层是由 N_i (第 i 层上的 N) 个网络神经元组成, 每个 N_i 上的网络神经元把对应 N_{i-1} 上的神经元输出作为它的输入。我们把神经元之间的连线叫做突触。在数学模型中每个突触有一个加权数值, 我们称做权重, 那么要计算第 i 层上的某个神经元所得到的势能等于每一个权重乘以第 $i-1$ 层上对应的神经元的输出, 然后全体求和得到了第 i 层上的某个神经元所得到的势能, 然后势能数值通过该神经元上的激活函数 (activation function) 以控制输出大小。神经网络训练过程常常用训练样本进行反向传播对各个层的权重进行矫正, 最终得到我们想要的模型。

6.1.2 机器学习在量子物理中的应用

目前机器学习技术已经在统计物理、粒子物理和宇宙学、多体量子物质、量子计算、物理化学和材料等方面取得了一系列的进展^[197], 但是由于篇幅和精力有限, 本论文只讨论机器学习技术在量子物理中的应用^[198-199]。

最近几年来, 已经有越来越多的人开始研究量子物理与机器学习交叉的问题, 进而衍生出了量子机器学习这一专用术语。一般而言, 当我们谈到量子机器学习的时候, 依据机器学习和量子物理结合方式的不同, 会有四个子方向, 正如图 6.2 所示, 我们可以利用经典机器学习方法研究经典和量子的数据, 也可以利用量子机器学习算法研究量子 and 经典的数据。众所周知, 量子力学往往会产生一些不规则的数据模式。经典的机器学习方法, 如深度神经网络既可以识别数据中的一些统计模式又可以生成这些模式。这意味着, 如果小型量子信息处理器可以产生经典计算机难以识别的模式, 那么它们应该也可以识别这些模式, 这对于量子力学的发展和实际的应用无疑是非常重要的。如果想要达到这样的效果, 就需要有一些可以适用于机器学习的有效量子算法。所谓量子算法就是一系列指令

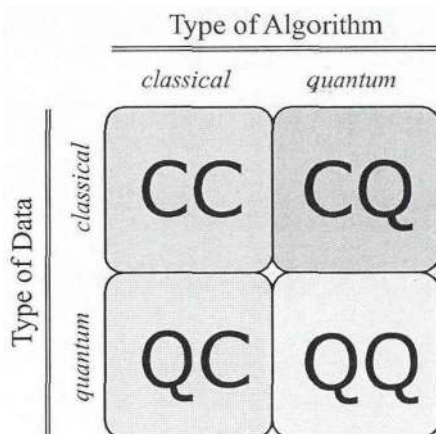


图 6.2 量子机器学习方法 (维基百科: Quantum machine learning)。结合量子计算和机器学习的四种不同的方法。其中第一个字母表明研究的系统是经典还是量子的, 第二个字母表明信息处理设备是经典还是量子的。图来源于维基百科。

的集合, 通过这些指令, 可以解决特定的问题。针对特定的问题量子算法有潜力比目前最好的经典算法表现的更好, 这也被称为量子加速。

截至到目前为止, 已经出现了许多具有量子加速效果的算法, 如量子线性代数解决方案——量子傅里叶变换, 在解决线性方程方面相比最好的经典算法展现出了指数级加速效果。这对于包括线性代数, 最小二乘回归, 梯度下降等机器学习算法是有巨大的速度提升的。除此之外, 还有量子主成分分析, 量子支持向量机等一些有效的算法。值得注意的是, 在利用量子机器学习算法解决经典数据问题的过程中, 往往会有如何将经典数据转换成量子态的问题, 包括如何将最后的结果转化为经典数据, 这些问题目前没有特别行之有效的方法, 在实际的操作中也会消耗一定的资源。

量子机器学习最直接的应用也许是处理量子数据。正如前文描述的那样, 许多量子机器学习算法通过将数据映射到量子态, 然后用量子线性代数程序操作这些量子态的方式找到经典数据中的模式。对于其他量子系统产生的量子数据, 这些算符可以直接产生作用, 找到隐藏在数据后面的特征和模式而不需要进一步的转化。这样的模型是更加有效和清晰的。例如我们可以用量子模拟器来探索量子动力学, 这类量子模拟器可以直接被编程使其动力学符合想要探究的量子系统的动力学模型。通过驱动量子模拟器, 我们就可以非常直观的得到未知系统的动力学演化过程了。

当然我们也可以利用经典的机器学习算法帮助我们解决量子问题。在量子计算和量子信息处理中一个主要的挑战就是驱动量子门使其达到量子容错要求的阈值。对于量子系统的精确控制也是一个非常重要而又复杂的任务。目前也已经发展出了利用机器学习技术, 尤其是强化学习技术帮助我们设计量子控制时

序以达到精准控制，或者是抵抗环境干扰的算法^[200-201]。

6.2 理论模型

6.2.1 Shortcut to Adiabaticity 模型

假定对一个单比特系统进行相干操控，其中在相互作用绘景下它们的相互作用哈密顿量为：

$$H(t) = \frac{\hbar}{2} [\Omega \sigma_x + \Delta(t) \sigma_z] \quad (6.2)$$

其中拉比频率 Ω 是固定的，失谐 $\Delta(t)$ 是含时变化的。基于不变量的 STA 理论表明，利用根据 Lewis-Riesenfeld (LR) 理论^[202] 推导出来的辅助方程，我们可以实现同时具备高保真度和鲁棒性特性的非绝热量子控制。二能级系统的 LR 不变量为 $I(t) = \frac{\hbar}{2} \Omega_0 \sum_{\pm} |\phi_{\pm}(t)\rangle \langle \phi_{\pm}(t)|$ ，其本征态分别是 $|\phi_+(t)\rangle = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\beta}{2}}, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\beta}{2}} \right)^T$ ， $|\phi_-(t)\rangle = \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\beta}{2}}, -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\beta}{2}} \right)^T$ ， Ω_0 是保持不变量 $I(t)$ 处于单位能量的任意常数频率。这里含时的角度参数 $\theta \equiv \theta(t)$ 和 $\beta \equiv \beta(t)$ 决定了量子态布洛赫球上面的演化路径。含时薛定谔方程的解可以由叠加态 $|\phi_{\pm}(t)\rangle$ 来进行描述。更详细的说， $|\Psi(t)\rangle = \sum_{\pm} c_{\pm} \exp(i\gamma_{\pm}) |\phi_{\pm}(t)\rangle$ ，其中 c_n 为常数，LR 不变量的相位为：

$$\gamma_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\dot{\theta} \cot \beta}{\sin \theta} \right) dt' \quad (6.3)$$

由条件 $dI(t)/dt \equiv \partial I(t)/\partial t + (1/i\hbar)[I(t), H(t)] = 0$ 可以得到辅助方程：

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\Omega \sin \beta \\ \dot{\beta} &= -\Omega \cot \theta \cos \beta + \Delta(t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

这将使预想的量子态沿着动力学模式 $|\phi_{\pm}(t)\rangle$ 演化。在以往的工作中，STA 控制方法可以在系统约束下起到优化噪声的效果，这种约束往往需要拉比频率 Ω 和失谐 Δ 满足公式 6.4。然而，在不同的量子平台中，对于 Δ 和 Ω 调控的偏好程度是不相同的。例如在超导 Xmon transmon 比特中，对失谐的调控要比拉比频率的调控更加方便和易于实现。

为了满足这些要求，我们将要利用逆向工程的方法来设计角度参数 θ 以构造合适的含时参数 $\Delta(t)$ 。我们将公式 6.4 的导数带入公式 6.4，可以得到：

$$\Delta(t) = -\frac{\ddot{\theta}}{\Omega\sqrt{1-\left(\frac{\dot{\theta}}{\Omega}\right)^2}} + \Omega \cot \theta \sqrt{1-\left(\frac{\dot{\theta}}{\Omega}\right)^2} \quad (6.5)$$

其中拉比频率 Ω 为常数。这使我们能够驱动量子态在有限短的时间 T 内 (这个时间受到量子速度极限的约束) 沿着一个动力学模式 $|\phi_+(t)\rangle$ 进行演化。首先我们要限定边界条件:

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(T) = \pi \quad (6.6)$$

这会使一个 qubit 从 $|0\rangle$ 态翻转到 $|1\rangle$ 态。第二, 这个方案可以被进一步优化以消除系统误差的影响, 例如环境扰动和实验中不可避免的控制偏差。为了这个目的, 我们考虑当在拉比频率和失谐中存在误差的情况: $\Omega \rightarrow \Omega(1 + \delta_\Omega)$, $\Delta(t) \rightarrow \Delta(t) + \delta_\Delta$, 在含时一阶微扰理论近似下, 跃迁概率为:

$$P = \frac{\hbar^2}{4} \left| \int_0^T \langle \Psi_-(t) | (\delta_\Omega \Omega \sigma_x + \delta_\Delta \sigma_z) | \Psi_+(t) \rangle dt \right|^2 \quad (6.7)$$

其中 $|\Psi_\pm(t)\rangle = e^{i\gamma_\pm(t)} |\phi_\pm(t)\rangle$ 为不变量的两个相互垂直的动力学模式。将公式 6.4 带入公式 6.7, 我们可以得到误差消除的情况:

$$\left| \int_0^T dt e^{i\eta(t)} (\delta_\Delta \sin \theta - i 2\delta_\Omega \dot{\theta} \sin^2 \theta) \right| = 0 \quad (6.8)$$

其中 $\eta(t) = 2\gamma_+(t)$, 通过结合公式 6.3 可以得到 $\dot{\eta} = \dot{\theta} \cot \theta / \sin \theta$ 。

受到参考文献^[152]的启发, 在公式 6.8 中的全局相位 $\eta(t) = 2\gamma_+(t)$ 可以被扩展成:

$$\eta(t) = 2\theta + \alpha_1 \sin(2\theta) + \alpha_2 \sin(4\theta) + \dots + \alpha_n \sin(2n\theta) \quad (6.9)$$

如此一来我们就可以得到 $\sin \beta = -1/\sqrt{1+4M^2 \sin^2 \theta}$, 其中 $M = 1 + \sum_n n \alpha_n \cos(2n\theta)$ 。最后, 通过利用给定的系数 α_n 和初始条件 $\theta(0) = 0$, 我们可以求解方程 6.4, 最终得到相应的参数 θ 演化到 $\theta(T) = \pi$, 其中时间 T 受到量子速度极限的约束:

$$\Omega T = \int_0^\pi d\theta \sqrt{1+4M^2 \sin^2 \theta} \geq \pi \quad (6.10)$$

这个方案可以使得 qubit 鲁棒性的从 $|0\rangle$ 态翻转到 $|1\rangle$ 态。原则上，我们可以利用在公式 6.9 中引入自由参数 α_n 来消除掉公式 6.8 中的积分项，这样的话在 σ_x 和 σ_z 项中的误差就可以被同时抑制。我们在此举一个例子来说明一下，假如我们只考虑 σ_x 或者 σ_z 一项的误差，利用 $\eta(t)$ 的一阶展开，得到 $\alpha_1 = -1$ 和 $\alpha_1 = -1.74$ 可以分别消除 Ω 和 Δ 上面的误差。

尽管利用上面的步骤可以实现鲁棒性的量子控制，但是我们发现利用这种方法很难预测失谐的形状和它的调谐范围。例如，在对抗 Δ 类型噪声的设计中，失谐最大的幅度会超过 2Ω ，并且在操作的边缘位置会有非常陡峭的变化，这些对于实际的实验波形操作而言都会造成一定的困难。相比较而言，我们更加更倾向于变化没有那么剧烈的顺滑操作。因此，我们为参数 θ 提出了下面的设计：

$$\theta(t) = \frac{\Omega T}{a} \left[as - \frac{\pi^2}{2}(1-s)^2 + \frac{\pi^2}{3}(1-s)^3 + \cos(\pi s) + A \right] \quad (6.11)$$

其中 $s = t/T$, $A = \pi^2/6 - 1$ ，利用边界条件 6.6 可以得到 $T = -\pi a / [(2 - a - \pi^2/6)\Omega]$ ， $a > 2 - \pi^2/6$ 是一个自由参数。这样的设定使得失谐 $\Delta(t)$ 在操作过程中几乎是随着操作时间线性变化的。根据这个新的方案，我们得到可以分别对抗 Δ 和 Ω 类型误差的参数分别为 $a = 0.604$ 和 $a = 0.782$ 。

6.2.2 机器学习模型

尽管 STA 可以使我们完成快速并且具有鲁棒性的量子控制，我们现在来考虑一下更加复杂的场景：如果我们只允许在固定时间内利用给定数目的可变失谐脉冲进行量子控制，应该如何去完成？这样的任务实际上是一个等价于动力学编程的组合优化问题，也被称为多步决策问题。尽管动力学编程的复杂性随着步数的增加呈现指数增长，我们依然可以用人工神经网络 (ANN) 的方法近似的去解决这个问题，这也自然而然的会引入深度强化学习的概念。实际上，当谈到深度强化学习的时候，会设计到两种方法。第一种方法是利用深度学习来近似动力学编程的解，第二种方法是所谓的深度策略网络，其能够并行地测试许多不同的控制系统。在本篇论文中，我们主要聚焦在第一种方法上。在这种方法中，数学模型“马尔可夫决策过程”可以用于描述这个问题。一个智能体在每个时间步骤 t 上观测到一个状态 s_t ，同时采取行动 a_t ，获得了奖励 r_t 并根据环境的动力学 $P(s_{t+1} | s_t, a_t)$ 从一个状态 s_t 转移到下一个状态 s_{t+1} 。智能体的目标是学习到一个策略 $\pi(a | s)$ 可以最大化总奖励 $\sum_i \gamma^i r_i$ ，其中 γ 是折扣比率， r_i 是奖励值。DRL 利用一个人工神经网络作为对于策略 $\pi(a | s)$ 的近似来实现最终的近似优化。

与智能体交互的环境是由一些方程组成的，这些方程一方面决定了智能体的演化方向，同时也负责给予智能体奖励。神经网络中的优化器根据这些奖励

来调整参数, 最终实现一个训练好的智能体, 可以提供优化的行为完成特定的任务。此外, 我们发现 STA 中逆向工程的概念和深度强化学习是相似的。我们需要设计奖励函数 $r(s, t_i)$ 来教育智能体, 并且值得注意的是, 一个合适的奖励函数是可以大大加速 DRL 算法的收敛的, 并且可以防止智能体陷入寻常解或者被重复行为所欺骗。

在实际的训练过程中, 我们构建了一个由三个隐藏层组成, 每层有 32 个节点的神经网络, 并且将 ReLU 作为我们的激活函数。在输入层中只有 3 个节点, 用于输入每一个时间步骤在 σ_z 上投影的概率 $\langle \sigma_z \rangle$, 归一化的失谐 $\tilde{\Delta}(t_{i-1})$ 和目前的系统时间 i/N 。神经网络的输出是在步骤 i 上归一化的失谐 $\tilde{\Delta}(t_i) = (\Delta(t_i) + \Delta_{\max}) / 2\Delta_{\max}$, 在这里, 我们假定失谐是在 $[-\Delta_{\max}, \Delta_{\max}]$ 范围内可调谐的。我们在训练过程中发现将目前系统所处的步骤也输入系统会加速训练的过程, 这是因为智能体应该知道系统在一个任务中演化了多长时间, 以便在一个固定的时间内进行传输, 从而决定下一个时间步骤的操作。具体的结构图示可以在图 6.4 中找到。

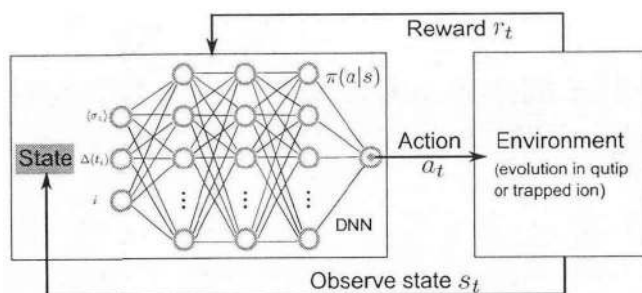


图 6.3 量子控制训练过程深度强化学习框架 (MZ Ai et al, arXiv:2101.09020, 2021)。智能体 (ANN) 由三个隐藏层构成, 智能体从环境中得到目前所处的状态, 经过神经网络层间传播和非线性激活, 输出层给出一个在目前状态需要进行的行为。环境给予的奖励 r_i 使得智能体可以学会如何达成目标。

在训练过程中, 使用 Proximal Policy Optimization (PPO)^[203] 作为训练算法, 因为它的表现与目前最先进的算法相当或者更好。举个例子来说, Trust Region Policy Optimization (TRPO) 算法^[204] 在连续控制问题上面表现良好, 对超参数调节具有鲁棒性。然而, TRPO 在采样时要求大的 batch size, 这是非常消耗时间的并且在高维度问题上面会失去作用。PPO 在采样复杂性和调参难度上面达到了一种平衡, 每次都会以比较小的步骤来更新策略。我们注意到, 如果设置一个常规的奖励函数, 例如 $r(t_i) = |\sigma_z(t_i)| - 1$, PPO 可以快速地学习到单组分控制的时间优化解, 假如我们不约束演化时间, 解就会收敛到常规的 π 脉冲上面。不同与策略梯度方法使用二阶导数矩阵来解决收敛性问题, PPO 通过在目标函数

中引入惩罚项来解决约束问题，这在优化过程中仅仅需要计算一阶导数矩阵。即使在训练过程中打破了约束条件，由于计算是简化的因而影响也不是很大。我们使用了 TensorForce^[205] 这一专门用于 DRL 训练的 python package 进行快速的实验。这个工具包是基于 TensorFlow，支持 GPU 加速。我们在训练过程中利用 QuTiP^[206] 搭建了一个二能级结构作为 DRL 的环境。在预训练和参数调节过程中我们都设定 batch size 为 20，学习率为 $1e-4$ ，其他超参数设定为 TensorForce 中 PPO 算法默认的值。

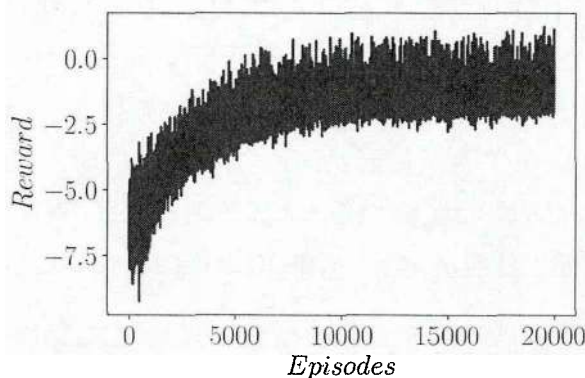


图 6.4 训练过程中奖励值的变化。随着训练迭代次数的增多，总奖励值不断增加，最终达到平衡，意味着系统收敛。

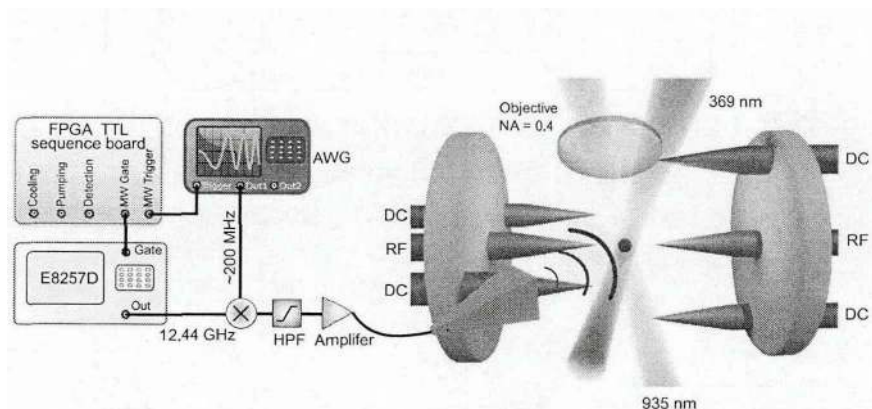


图 6.5 实验设备 (MZ Ai et al, arXiv:2101.09020, 2021)。单个 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子被囚禁在阱的中间。两束 369 nm 和 935 nm 的激光被用来冷却离子，其中 369 nm 激光同时被用来进行离子内态的探测。实验驱动微波通过混频的方式产生，整个实验的时序被一个 FPGA 进行控制。

在每次实验的过程如下：首先是 1 ms 的多普勒冷却将离子冷却到近乎基态的位置，接下来是 $20\ \mu\text{s}$ 的光泵浦以 99.5% 的概率将离子内态泵浦到 $|0\rangle$ 态。从 DRL 模型中得到的波形通过调制失谐的方式转换成驱动微波打到离子上面。最

后一个 0.4 NA 的物镜用来收集荧光判断离子内态。在所有的实验中，我们设定系统的拉比频率为 $\Omega = (2\pi)3.3\text{kHz}$ ，即相应的 2π 时间为 $300\text{ }\mu\text{s}$ 。整个实验时序过程可以参见图 6.6(e)。

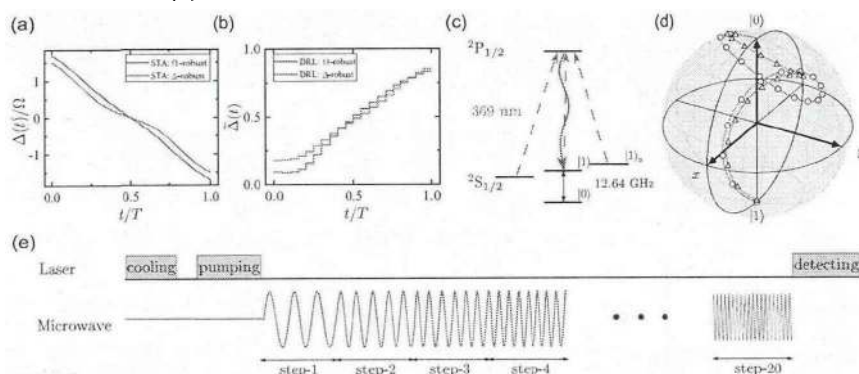


图 6.6 实验时序与模型波形 (MZ Ai et al, arXiv:2101.09020, 2021)。(a) STA 模型中优化的失谐随时间的变化。(b) 在 DRL 模型中优化的失谐随时间的变化。(c) $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的能级图。(d) 在 DRL 模型的驱动下量子态在布洛赫球上面的演化。红色实线代表了为 Ω 类型误差优化的轨迹，蓝色实线代表了为 Δ 类型误差优化的轨迹。(e) 在 DRL 模型实验中的实验时序。

6.3 实验实现及结果

6.3.1 训练与数值实验

我们首先在服务器上面进行了模型训练与数值实验。在我们的数值实验中，为了方便表示及训练收敛，可调谐的失谐范围 $[-\Delta_{\max}, \Delta_{\max}]$ 被归一化到 $\tilde{\Delta} \in [0, 1]$ ，其中 $\Delta_{\max}$ 是在 STA 模型中 $\Delta(t)$ 可以达到的最大值，同时也是神经网络在 t_i 阶段输出的编码后的值 $\tilde{\Delta}(t_i) = [\Delta(t_i) + \Delta_{\max}] / 2\Delta_{\max}$ 。二能级系统的信息，包括系统在 Z 方向的投影测量值 $\langle \sigma_z \rangle$ ，归一化的失谐 $\tilde{\Delta}(t_{i-1})$ 和系统时间信息 i/N 输入进神经网络。整个量子动力学过程利用将量子噪声考虑在内的 Lindblad 主方程，即 Liouville-von Neumann 方程来模拟。在预训练过程中，我们将奖励函数设置为 $r(t_i) = -\left|\tilde{\Delta}(t_i) - \frac{i-1}{N-1}\right|$ ，当最终 $\langle \sigma_z \rangle > 0.997$ 就停止训练。假定系统的拉比频率为 $\Omega = (2\pi)3.3\text{ kHz}$ ，在 STA 模型中对于 Δ 和 Ω 具有鲁棒性的操作时间分别是 $T_{\Delta} = 364\text{ }\mu\text{s}$ 和 $T_{\Omega} = 293\text{ }\mu\text{s}$ 。为了有效的评估基于 DRL 的鲁棒量子控制，我们实施了两个数值实验：(1) 我们分别将针对两种不同类型的误差优化的操作时间 T_{Δ} 和 T_{Ω} 等间隔的分成 20 个脉冲。从 DRL 模型中得到的分别针对失谐误差和拉比频率误差的数字优化波形可以参考图 6.6(b)。需要注意的是 STA 模型为 Landau-Zener 问题的鲁棒性提供了一个上界，我们可以通过利用与其效

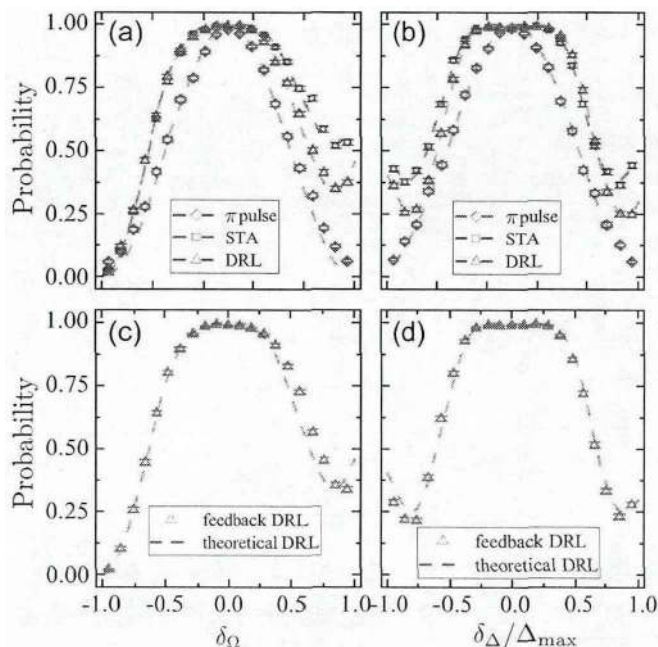


图 6.7 在单比特翻转中, STA, DRL 和 π 脉冲方式鲁棒性表现对比 (MZ Ai et al, arXiv:2101.09020, 2021)。(a),(b) 在不同的 Ω 和 Δ 误差下, 三种控制方法的表现对比。DRL 方法在大多数情况下与 STA 方法具有同样的鲁棒性, 它们都优于 π 脉冲方式。(c),(d) 反馈 DRL 的表现。在 Ω 和 Δ 误差中反馈 DRL 模型表现都与理论值吻合的很好, 这意味着 DRL 模型对于控制脉冲的扰动也具有一定的鲁棒性。

果的对比来检验人工智能方法在数字量子控制中的有效性。(2) 将操作时间固定在 $T = 300 \mu\text{s}$, 看是否利用这种方法训练出可以同时两种噪音同时起作用的智能体。

6.3.2 离子系统实验结果

与前面两章的实验一样, 我们利用囚禁的单个 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子中超精细能级结构中的二能级来进行实验。具体的实验装置和能级编码形式可以参考前面两章的类似内容, 驱动硬件连接方式可以参加图 6.5。我们首先在离子的钟态能级上进行演示实验, 在 1.5 mm 厚的坡莫合金屏蔽下, 终态的相干时间大约在 200 ms 左右。

为了验证基于 DRL 模型的控制方法对系统误差的鲁棒性能, 我们对比了 STA, DRL 和标准的 π 脉冲方法 (即固定强度的微波脉冲驱动一定的时间) 在不同的 Δ 和 Ω 误差下, 在单比特 X 门 (即拉比翻转) 这一任务上的表现进行了对比。所有的 DRL 模型都根据 STA 模型中针对 Δ 和 Ω 误差优化的时间先验信息进行了预训练。最终的结果可以在图 6.7 中得到。通过对比我们可以发现, DRL 模型方法在大多数情况下都比 STA 模型要好得多, 除了当误差太大的情况下 (例

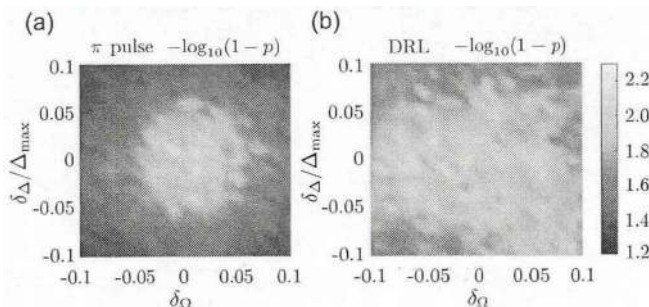


图 6.8 混合噪声下 π 脉冲方法和 DRL 方法的表现对比 (MZ Ai et al, arXiv:2101.09020, 2021)。当噪音非常小的情况下, π 脉冲方法的表现会稍微优于 DRL 模型, 但是随着混合噪音的增加, DRL 模型的表现要远远好于 π 脉冲控制方法。

如差出 0.5 个拉比频率或者失谐, 这种情况在真实的实验中几乎不会发生, 实验中大部分都还是一些比较小的误差, 例如 0.1 个拉比频率)。与此同时, 两种模型都要比标准的 π 脉冲方法要鲁棒很多。

为了进一步探索 DRL 模型的鲁棒性, 我们做了一个反馈 DRL 实验, 实验的过程如下: 在每次实验中, 我们做了 19 个循环的实验, 在第 n 次循环中 ($n \in [1, 19]$), 我们测量了 n 个控制脉冲后的实验结果, 然后将这个实验结果反馈回 DRL 模型, 得到下一个控制脉冲。当完成 19 次这样的循环后, 我们就得到了最终的 20 个控制脉冲序列。实验表明, 这些反馈生成的实验控制脉冲与理论上的 DRL 控制脉冲会有一点不同, 但是它们的效果几乎相差无几。这意味着我们的 DRL 模型方案对于控制脉冲的扰动依然具有很好的鲁棒性。

接下来我们实验验证在 Δ 和 Ω 的混合误差下, DRL 模型的表现。值得注意的是, 本次我们在训练模型的过程中, 没有使用从 STA 模型中获取的操作时间和失谐的可调谐范围等先验信息。混合噪声下 π 脉冲和 DRL 方法的表现可以参见图 6.8。我们对图中概率的值取了对数以便可以更加清晰的辨别两种方法的区别。相较而言, 由于训练模型的时候设定模型停止阈值为 $\langle \sigma_z \rangle > 0.997$, 并且 DRL 模型方法由于其多脉冲驱动的特点, 比 π 脉冲方法更容易累计误差, 导致最终的实验结果中, 在误差比较小的情况下, π 脉冲的表现比 DRL 还要好一点。随着混合噪声的增大, DRL 模型方法的表现变得越来越好, 并且在大部分场景下比 π 脉冲方法要好得多。我们相信, 随着实验系统控制精度的增加和训练时终止阈值的提高, DRL 的表现还会更加完美。

除此之外, 为了检验在真实的实验室环境噪声的影响下 DRL 模型的表现, 我们在离子的塞曼能级上也进行了一系列的实验。 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的塞曼能级对于磁场的干扰是一阶敏感的, 因此其对应的相干时间只有 0.35 ms。整个实验的过程与在终态进行实验时相同, 实验结果表明, DRL 模型在 Ω 和 Δ 上的表现都比

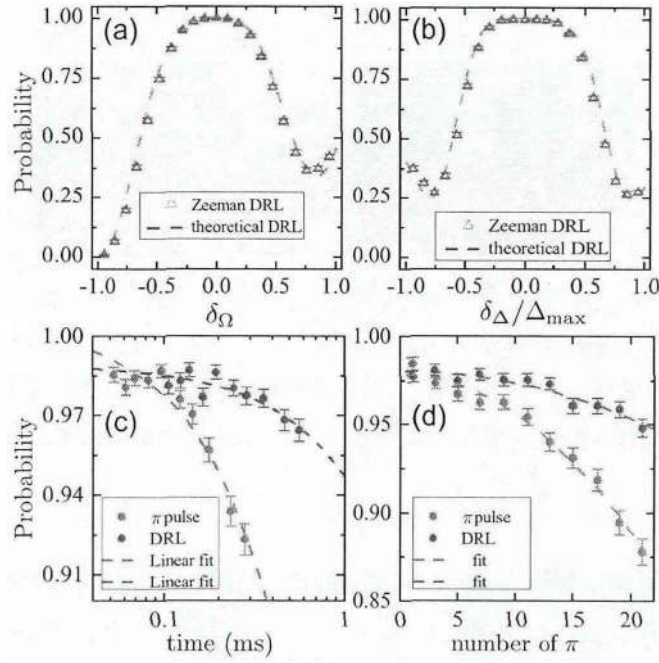


图 6.9 塞曼能级上 DRL 模型的抗噪声特性 (MZ Ai et al, arXiv:2101.09020, 2021)。 (a),(b) 在塞曼能级上 DRL 的表现。由于额外的实验室噪声造成的退相干, 无论是在 Ω 还是在 Δ 误差下 DRL 的表现要比理论值都要差一点。 (c) 在不同的拉比时间下 DRL 和 π 脉冲的对比。随着拉比时间的增加, π 脉冲的表现快速下降, DRL 表现的更加具有鲁棒性。 (d) 在不同的 π 翻转下 DRL 和 π 脉冲的对比。随着 π 翻转数目的增加, π 脉冲的表现快速下降, DRL 表现的更加具有鲁棒性。

理论值稍微差一点, 这是因为额外的退相干导致, 是完全可以理解的。我们还在没有人为加入噪音, 只考虑了实验室磁场环境的噪音情况下, 以两种形式对比了 DRL 模型和 π 脉冲在塞曼能级上的表现差异: (1) 固定打一个 π 翻转, 但是变化 π 翻转的时间; (2) 固定 π 翻转的时间 (此处我们设定为 $50 \mu\text{s}$), 变化 π 脉冲的数目。由图 6.9 可以看到, 无论是随着时间的增加还是随着 π 翻转数目的增加, π 脉冲方法都会迅速的退相干, 而 DRL 模型方法在两种方式的比较中都表现出了很好的鲁棒性。这对于含噪声的, 特别是目前的量子信息处理实验是非常有意义的。

6.4 本章小结

综上所述, 我们在实验上演示了基于深度强化学习的鲁棒性量子控制任务。通过对比, 深度强化学习模型生成的多脉冲控制序列在完成态翻转这一量子任务上面, 在系统存在拉比频率误差和失谐误差的情况下相比传统的 π 脉冲方法具有更好的鲁棒性。与此同时, 我们在离子的塞曼能级上面进行实验, 进一步验

证了该模型在真实的实验室噪声环境下依然起作用，具有提高量子信息处理和量子计算控制能力的应用潜力。后面我们也正在探索该方法对于两比特门的适用性，如果可以完成，无疑会在机器学习与量子计算中间构建起一座新的桥梁，经过机器学习完善的控制算法会使量子计算更加具有鲁棒性。

第7章 总结与展望

随着人们对于量子力学基本原理认识的提高以及对于微观物质控制能力的进步,量子技术在21世纪初期开始逐渐的进入人们的视野。目前发展的基于量子力学基本原理的技术主要有量子保密通信、量子精密测量和量子计算,其中随着摩尔定律极限的逼近以及近期发展的人工智能、大数据等新兴技术对于计算能力的需求,量子计算以其与生俱来的并行能力理论上可以形成对经典计算机在算力上的压倒性优势,成为科技巨头纷纷押注的赛道和大国之间科技竞争的桥头堡。想要实现能够解决现实问题的量子计算,不仅仅需要拥有多个可以操控的量子比特,对于量子比特的特性和操控的误差也有很高的要求。

目前世界各组从事量子计算的有超导电路、离子阱、NV色心、光子芯片、原子平台等众多系统,但是公认短期来看更有可能实现“有用的”量子计算的还要是超导电路和离子阱。超导电路的优势是其全部为电学控制,相比光学更加稳定,同时量子比特的制备与传统芯片的制作工艺有很多相通的地方,简化了制备流程和需要攻克的困难。而离子系统相干时间更长,所有的量子比特具有全同性,并且可以实现任意两个量子比特之间的相互作用。目前国际上从事离子阱系统研究的比较先进的组,一方面在进行离子阱的系统化、小型化和集成化尝试,另外也有人在不断的提高量子操控的保真度,或者是在目前所能达到的离子数目和操控精度上面进行一些量子模拟的实验研究。

我们组从事的是基于离子阱的量子信息实验研究,组内有人专门负责搭建能够束缚多个量子比特的新型阱,我在过去几年内,除了基本的离子阱搭建外,主要探索了一些量子控制方面的问题,可以概括为下面四个部分:

我们通过改进动力学解耦方法,在实验上演示了同时抑制量子系统演化过程中的动力学和几何学退相干。与传统的动力学解耦方法相比,我们改进的方法可以将系统的退相干速率较小一个数量级以上,为高精度量子控制和进一步提高量子门的保真度提供了方法。

我们基于离子的三能级系统设计了一种共振驱动的非绝热几何相位门。这种方案相对于以往的非绝热几何门,对拉比频率误差具有更高的鲁棒性。同时还为离子系统设计了两比特的相位门,为基于离子阱系统的通用非绝热和量子计算打下了基础。

将控制微波与高斯噪音进行混频,实现可控噪音强度的量子控制,然后定量探索了在含噪音的微波驱动下,量子相变过程中产生的缺陷数目与噪音强度的关系。我们的实验不仅仅演示了量子相变过程中的反KZ机制,也对一些凝聚态物理和量子退火等算法提供了一些新的启示。

我们还利用最近很火的机器学习技术，设计了多脉冲序列来完成特定的量子任务。经过深度强化学习的训练，我们的方案相对于传统的方法对于拉比频率误差和失谐误差都具有了更好的鲁棒性，并且在真实的实验室噪声下也有很明显的效果。

在写下这些文字的今天，美国基于离子阱系统的量子计算初创公司 IonQ 借壳上市成功，成为第一家正式登陆资本市场的量子计算公司。在资本力量的加持下，我们希望量子计算可以走的更快，行的更远，早日照耀人类前行的道路。我在未来应该会继续从事量子信息相关的工作，一方面深耕量子控制在不同的量子系统上面的应用，包括量子传感、量子模拟等；另外一方面也想尝试量子系统的集成化与芯片化，为量子技术早日应用到人们的日常生活中贡献一份自己的力量。

参考文献

- [1] KRAGH H. Quantum generations: A history of physics in the twentieth century[M]. Princeton University Press, 2002.
- [2] GISIN N, THEW R. Quantum communication[J]. Nature Photonics, 2007, 1(3):165-171.
- [3] GIOVANNETTI V, LLOYD S, MACCONE L. Advances in quantum metrology[J]. Nature Photonics, 2011, 5(4):222.
- [4] HIRVENSALO M. Quantum computing[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] DEUTSCH D, JOZSA R. Rapid solution of problems by quantum computation[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1992, 439(1907):553-558.
- [6] SHOR P W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring[C]//Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science. Ieee, 1994: 124-134.
- [7] GROVER L K. A fast quantum mechanical algorithm for database search[C]//Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing. 1996: 212-219.
- [8] HARROW A W, HASSIDIM A, LLOYD S. Quantum algorithm for linear systems of equations[J]. Physical Review Letters, 2009, 103(15):150502.
- [9] EINSTEIN A, PODOLSKY B, ROSEN N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?[J]. Physical Review, 1935, 47(10):777.
- [10] DIVINCENZO D P. The physical implementation of quantum computation[J]. Fortschritte der Physik: Progress of Physics, 2000, 48(9-11):771-783.
- [11] KNILL E, LAFLAMME R, MILBURN G J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics[J]. Nature, 2001, 409(6816):46-52.
- [12] MIGDALL A, DOWLING J. Introduction to the journal of modern optics special issue on single-photon: Detectors, applications, and measurement methods[R]. NATIONAL INST OF STANDARDS AND TECHNOLOGY GAITHERSBURG MD, 2004.
- [13] HADFIELD R H. Single-photon detectors for optical quantum information applications[J]. Nature Photonics, 2009, 3(12):696-705.
- [14] SHIELDS A J. Semiconductor quantum light sources[M]//Nanoscience And Technology: A Collection of Reviews from Nature Journals. World Scientific, 2010: 221-229.
- [15] SCHMIDT H, IMAMOGLU A. Giant kerr nonlinearities obtained by electromagnetically induced transparency[J]. Optics Letters, 1996, 21(23):1936-1938.
- [16] DUAN L M, KIMBLE H. Scalable photonic quantum computation through cavity-assisted

- interactions[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(12):127902.
- [17] POLITI A, MATTHEWS J C, O'BRIEN J L. Shor's quantum factoring algorithm on a photonic chip[J]. *Science*, 2009, 325(5945):1221-1221.
- [18] MATTHEWS J C, POLITI A, STEFANOV A, et al. Manipulation of multiphoton entanglement in waveguide quantum circuits[J]. *Nature Photonics*, 2009, 3(6):346-350.
- [19] CORY D G, FAHMY A F, HAVEL T F. Ensemble quantum computing by nmr spectroscopy [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1997, 94(5):1634-1639.
- [20] NEGREVERGNE C, MAHESH T, RYAN C, et al. Benchmarking quantum control methods on a 12-qubit system[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(17):170501.
- [21] BARENDTS R, KELLY J, MEGRANT A, et al. Superconducting quantum circuits at the surface code threshold for fault tolerance[J]. *Nature*, 2014, 508(7497):500-503.
- [22] OTTERBACH J, MANENTI R, ALIDOUST N, et al. Unsupervised machine learning on a hybrid quantum computer[J]. *arXiv:1712.05771*, 2017.
- [23] KANDALA A, MEZZACAPO A, TEMME K, et al. Hardware-efficient variational quantum eigensolver for small molecules and quantum magnets[J]. *Nature*, 2017, 549(7671):242-246.
- [24] ARUTE F, ARYA K, BABBUSH R, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor[J]. *Nature*, 2019, 574(7779):505-510.
- [25] CHILDRESS L, HANSON R. Diamond nv centers for quantum computing and quantum networks[J]. *MRS Bulletin*, 2013, 38(2):134-138.
- [26] HANSON R, DOBROVITSKI V, FEIGUIN A, et al. Coherent dynamics of a single spin interacting with an adjustable spin bath[J]. *Science*, 2008, 320(5874):352-355.
- [27] CHILDRESS L, DUTT M G, TAYLOR J, et al. Coherent dynamics of coupled electron and nuclear spin qubits in diamond[J]. *Science*, 2006, 314(5797):281-285.
- [28] BALASUBRAMANIAN G, NEUMANN P, TWITCHEN D, et al. Ultralong spin coherence time in isotopically engineered diamond[J]. *Nature Materials*, 2009, 8(5):383-387.
- [29] DE LANGE G, WANG Z, RISTE D, et al. Universal dynamical decoupling of a single solid-state spin from a spin bath[J]. *Science*, 2010, 330(6000):60-63.
- [30] FUCHS G, DOBROVITSKI V, TOYLI D, et al. Gigahertz dynamics of a strongly driven single quantum spin[J]. *Science*, 2009, 326(5959):1520-1522.
- [31] JELEZKO F, GAEBEL T, POPA I, et al. Observation of coherent oscillation of a single nuclear spin and realization of a two-qubit conditional quantum gate[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(13):130501.
- [32] DUTT M G, CHILDRESS L, JIANG L, et al. Quantum register based on individual electronic and nuclear spin qubits in diamond[J]. *Science*, 2007, 316(5829):1312-1316.
- [33] VAN DER SAR T, WANG Z, BLOK M, et al. Decoherence-protected quantum gates for a

- hybrid solid-state spin register[J]. *Nature*, 2012, 484(7392):82-86.
- [34] ROBLEDO L, CHILDRESS L, BERNIEN H, et al. High-fidelity projective read-out of a solid-state spin quantum register[J]. *Nature*, 2011, 477(7366):574-578.
- [35] NEUMANN P, KOLESOV R, NAYDENOV B, et al. Quantum register based on coupled electron spins in a room-temperature solid[J]. *Nature Physics*, 2010, 6(4):249-253.
- [36] MOEHRING D L, MAUNZ P, OLMSCHENK S, et al. Entanglement of single-atom quantum bits at a distance[J]. *Nature*, 2007, 449(7158):68-71.
- [37] BERNIEN H, HENSEN B, PFAFF W, et al. Heralded entanglement between solid-state qubits separated by three metres[J]. *Nature*, 2013, 497(7447):86-90.
- [38] HARTY T, ALLCOCK D, BALLANCE C J, et al. High-fidelity preparation, gates, memory, and readout of a trapped-ion quantum bit[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(22):220501.
- [39] BALLANCE C, HARTY T, LINKE N, et al. High-fidelity quantum logic gates using trapped-ion hyperfine qubits[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(6):060504.
- [40] WANG P, LUAN C Y, QIAO M, et al. Single ion-qubit exceeding one hour coherence time [J]. *arXiv:2008.00251*, 2020.
- [41] PAGANO G, HESS P, KAPLAN H, et al. Cryogenic trapped-ion system for large scale quantum simulation[J]. *Quantum Science and Technology*, 2018, 4(1):014004.
- [42] MONROE C, RAUSSENDORF R, RUTHVEN A, et al. Large-scale modular quantum-computer architecture with atomic memory and photonic interconnects[J]. *Physical Review A*, 2014, 89(2):022317.
- [43] KIELPINSKI D, MONROE C, WINELAND D J. Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer[J]. *Nature*, 2002, 417(6890):709-711.
- [44] NIFFENEGGER R J, STUART J, SORACE-AGASKAR C, et al. Integrated multi-wavelength control of an ion qubit[J]. *Nature*, 2020, 586(7830):538-542.
- [45] MEHTA K K, ZHANG C, MALINOWSKI M, et al. Integrated optical multi-ion quantum logic[J]. *Nature*, 2020, 586(7830):533-537.
- [46] Ibm' s roadmap for scaling quantum technology[EB/OL]. <https://www.ibm.com/blogs/research/2020/09/ibm-quantum-roadmap/>.
- [47] Achieving quantum volume 128 on the honeywell quantum computer[EB/OL]. <https://www.honeywell.com/us/en/news/2020/09/achieving-quantum-volume-128-on-the-honeywell-quantum-computer>.
- [48] Scaling ionq's quantum computers: The roadmap[EB/OL]. <https://ionq.com/posts/december-09-2020-scaling-quantum-computer-roadmap>.
- [49] The biggest flipping challenge in quantum computing[EB/OL]. <https://www.sciencemag.org/news/2020/07/biggest-flipping-challenge-quantum-computing>.

- [50] MABUCHI H, KHANEJA N. Principles and applications of control in quantum systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal, 2005, 15 (15):647-667.
- [51] RABITZ H, DE VIVIE-RIEDLE R, MOTZKUS M, et al. Whither the future of controlling quantum phenomena?[J]. Science, 2000, 288(5467):824-828.
- [52] CHU S. Cold atoms and quantum control[J]. Nature, 2002, 416(6877):206-210.
- [53] WISEMAN H M, MILBURN G J. Quantum theory of optical feedback via homodyne detection[J]. Physical Review Letters, 1993, 70(5):548.
- [54] LLOYD S. Coherent quantum feedback[J]. Physical Review A, 2000, 62(2):022108.
- [55] DOWLING J P, MILBURN G J. Quantum technology: the second quantum revolution[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2003, 361(1809):1655-1674.
- [56] WARREN W S, RABITZ H, DAHLEH M. Coherent control of quantum dynamics: the dream is alive[J]. Science, 1993, 259(5101):1581-1589.
- [57] RICE S A. Interfering for the good of a chemical reaction[J]. Nature, 2001, 409(6818): 422-426.
- [58] SHAPIRO M, BRUMER P. Principles of the quantum control of molecular processes[M]. 2003.
- [59] KHANEJA N, BROCKETT R, GLASER S J. Time optimal control in spin systems[J]. Physical Review A, 2001, 63(3):032308.
- [60] JUDSON R S, RABITZ H. Teaching lasers to control molecules[J]. Physical Review Letters, 1992, 68(10):1500.
- [61] BOUTEN L, VAN HANDEL R, JAMES M R. An introduction to quantum filtering[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2007, 46(6):2199-2241.
- [62] DOHERTY A C, JACOBS K. Feedback control of quantum systems using continuous state estimation[J]. Physical Review A, 1999, 60(4):2700.
- [63] GEREMIA J, RABITZ H. Optimal identification of hamiltonian information by closed-loop laser control of quantum systems[J]. Physical Review Letters, 2002, 89(26):263902.
- [64] D'HELON C, JAMES M. Stability, gain, and robustness in quantum feedback networks[J]. Physical Review A, 2006, 73(5):053803.
- [65] JAMES M. Quantum control theory[J]. arXiv:1406.5260, 2014.
- [66] THOMSEN L, MANCINI S, WISEMAN H M. Spin squeezing via quantum feedback[J]. Physical Review A, 2002, 65(6):061801.
- [67] YANAGISAWA M. Quantum feedback control for deterministic entangled photon generation [J]. Physical Review Letters, 2006, 97(19):190201.

- [68] VAN HANDEL R, STOCKTON J K, MABUCHI H. Feedback control of quantum state reduction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(6):768-780.
- [69] GRIFFITH E, HILL C, RALPH J, et al. Rapid-state purification protocols for a cooper pair box[J]. Physical Review B, 2007, 75(1):014511.
- [70] WILSON S, CARVALHO A, HOPE J, et al. Effects of measurement backaction in the stabilization of a bose-einstein condensate through feedback[J]. Physical Review A, 2007, 76(1): 013610.
- [71] ZHANG J, LIU Y X, NORI F. Cooling and squeezing the fluctuations of a nanomechanical beam by indirect quantum feedback control[J]. Physical Review A, 2009, 79(5):052102.
- [72] CHOU C W, HUME D, KOELEMEN J, et al. Frequency comparison of two high-accuracy al+ optical clocks[J]. Physical Review Letters, 2010, 104(7):070802.
- [73] HOSAKA K, WEBSTER S, STANNARD A, et al. Frequency measurement of the $s\ 2\ 1/2-f\ 2\ 7/2$ electric octupole transition in a single $y\ 171\ b^+$ ion[J]. Physical Review A, 2009, 79 (3):033403.
- [74] HAGER J W. A new linear ion trap mass spectrometer[J]. Rapid Communications in Mass Spectrometry, 2002, 16(6):512-526.
- [75] BLATT R, WINELAND D. Entangled states of trapped atomic ions[J]. Nature, 2008, 453 (7198):1008-1015.
- [76] DEHMELT H G. Radiofrequency spectroscopy of stored ions i: Storage[M]//Advances in Atomic and Molecular Physics: volume 3. Elsevier, 1968: 53-72.
- [77] PAUL W. Electromagnetic traps for charged and neutral particles[J]. Reviews of Modern Physics, 1990, 62(3):531.
- [78] HIGGINS G, POKORNY F, ZHANG C, et al. Coherent control of a single trapped rydberg ion[J]. Physical Review Letters, 2017, 119(22):220501.
- [79] ET AL. M S. Bempp:version 0.2.2[J/OL]. GitHub repository, 2020. <https://github.com/bempp/bempp-cl>.
- [80] AI M. Trapsimulation:version 0.2[J/OL]. GitHub repository, 2020. https://github.com/Amazingt/Potential_Simulation.
- [81] LIBBRECHT K G, BLACK E D. Improved microparticle electrodynamic ion traps for physics teaching[J]. American Journal of Physics, 2018, 86(7):539-558.
- [82] PIOTROWSKI M, SCARABEL J, LOBINO M, et al. Studies of thorium and ytterbium ion trap loading from laser ablation for gravity monitoring with nuclear clocks[J]. OSA Continuum, 2020, 3(8):2210-2221.
- [83] PRITCHARD J, ISAACS J, SAFFMAN M. Long working distance objective lenses for single atom trapping and imaging[J]. Review of Scientific Instruments, 2016, 87(7):073107.

- [84] DING Z H, CUI J M, HUANG Y F, et al. Fast high-fidelity readout of a single trapped-ion qubit via machine-learning methods[J]. *Physical Review Applied*, 2019, 12(1):014038.
- [85] WANG P, LUAN C Y, QIAO M, et al. Single ion qubit with estimated coherence time exceeding one hour[J]. *Nature Communications*, 2021, 12(1):1-8.
- [86] FAROLFI A, TRYPOGEORGOS D, COLZI G, et al. Design and characterization of a compact magnetic shield for ultracold atomic gas experiments[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2019, 90(11):115114.
- [87] BERRY M V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes[J]. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1984, 392(1802):45-57.
- [88] ARAI K, LEE J, BELTHANGADY C, et al. Geometric phase magnetometry using a solid-state spin[J]. *Nature Communications*, 2018, 9(1):1-7.
- [89] CAI H, REN Z. Geometric phase for a static two-level atom in cosmic string spacetime[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2018, 35(10):105014.
- [90] AHARONOV Y, ANANDAN J. Phase change during a cyclic quantum evolution[J]. *Physical Review Letters*, 1987, 58(16):1593.
- [91] TONG D, SJÖQVIST E, KWEK L C, et al. Kinematic approach to the mixed state geometric phase in nonunitary evolution[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(8):080405.
- [92] CAROLLO A, FUENTES-GURIDI I, SANTOS M F, et al. Geometric phase in open systems [J]. *Physical Review Letters*, 2003, 90(16):160402.
- [93] JONES J A, VEDRAL V, EKERT A, et al. Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance[J]. *Nature*, 2000, 403(6772):869-871.
- [94] LEEK P J, FINK J, BLAIS A, et al. Observation of berry's phase in a solid-state qubit[J]. *Science*, 2007, 318(5858):1889-1892.
- [95] MÖTTÖNEN M, VARTIAINEN J J, PEKOLA J P. Experimental determination of the berry phase in a superconducting charge pump[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(17):177201.
- [96] ZHANG Y, TAN Y W, STORMER H L, et al. Experimental observation of the quantum hall effect and berry's phase in graphene[J]. *Nature*, 2005, 438(7065):201-204.
- [97] CHEN X Y, LI T, YIN Z Q. Nonadiabatic dynamics and geometric phase of an ultrafast rotating electron spin[J]. *Science Bulletin*, 2019, 64(6):380-384.
- [98] FILIPP S, KLEPP J, HASEGAWA Y, et al. Experimental demonstration of the stability of berry's phase for a spin-1/2 particle[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(3):030404.
- [99] RICHARDSON D, KILVINGTON A, GREEN K, et al. Demonstration of berry's phase using stored ultracold neutrons[J]. *Physical Review Letters*, 1988, 61(18):2030.
- [100] LEIBFRIED D, DEMARCO B, MEYER V, et al. Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate[J]. *Nature*, 2003, 422(6930):412-415.

- [101] SCHLOSSHAUER M A. Decoherence: and the quantum-to-classical transition[M]. Springer Science & Business Media, 2007.
- [102] WHITNEY R S, MAKHLIN Y, SHNIRMAN A, et al. Geometric nature of the environment-induced berry phase and geometric dephasing[J]. Physical Review Letters, 2005, 94(7): 070407.
- [103] BERGER S, PECHAL M, KURPIERS P, et al. Measurement of geometric dephasing using a superconducting qubit[J]. Nature Communications, 2015, 6(1):1-6.
- [104] BERGER S, PECHAL M, ABDUMALIKOV JR A A, et al. Exploring the effect of noise on the berry phase[J]. Physical Review A, 2013, 87(6):060303.
- [105] QIN X K, GUO G C, ZHOU Z W. Suppressing the geometric dephasing of berry phase by using modified dynamical decoupling sequences[J]. New Journal of Physics, 2017, 19(1): 013025.
- [106] GILLESPIE D T. The mathematics of brownian motion and johnson noise[J]. American Journal of Physics, 1996, 64(3):225-240.
- [107] CASTRO F, SANCHEZ A, WIO H. Reentrance phenomena in noise induced transitions[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(9):1691.
- [108] FLÜHMANN C. Stabilizing lasers and magnetic fields for quantum information experiments [D]. MA thesis. ETH Zürich, 2014.
- [109] RUSTER T, SCHMIEGELOW C T, KAUFMANN H, et al. A long-lived zeeman trapped-ion qubit[J]. Applied Physics B, 2016, 122(10):1-7.
- [110] CHEN H B, LAMBERT N, CHENG Y C, et al. Using non-markovian measures to evaluate quantum master equations for photosynthesis[J]. Scientific Reports, 2015, 5(1):1-12.
- [111] LUO D W, YOU J, LIN H Q, et al. Memory-induced geometric phase in non-markovian open systems[J]. Physical Review A, 2018, 98(5):052117.
- [112] LUO D W, LIN H Q, YOU J, et al. Geometric decoherence in diffusive open quantum systems [J]. Physical Review A, 2019, 100(6):062112.
- [113] SOLINAS P, ZANARDI P, ZANGHÌ N. Robustness of non-abelian holonomic quantum gates against parametric noise[J]. Physical Review A, 2004, 70(4):042316.
- [114] ZHU S L, ZANARDI P. Geometric quantum gates that are robust against stochastic control errors[J]. Physical Review A, 2005, 72(2):020301.
- [115] SOLINAS P, SASSETTI M, TRUINI P, et al. On the stability of quantum holonomic gates [J]. New Journal of Physics, 2012, 14(9):093006.
- [116] XIANG-BIN W, KEIJI M. Nonadiabatic conditional geometric phase shift with nmr[J]. Physical Review Letters, 2001, 87(9):097901.
- [117] ZHU S L, WANG Z. Implementation of universal quantum gates based on nonadiabatic

- geometric phases[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(9):097902.
- [118] SJÖQVIST E. Trend: A new phase in quantum computation[J]. *Physics*, 2008, 1:35.
- [119] WILCZEK F, ZEE A. Appearance of gauge structure in simple dynamical systems[J]. *Physical Review Letters*, 1984, 52(24):2111.
- [120] ZANARDI P, RASETTI M. Holonomic quantum computation[J]. *Physics Letters A*, 1999, 264(2-3):94-99.
- [121] DUAN L M, CIRAC J I, ZOLLER P. Geometric manipulation of trapped ions for quantum computation[J]. *Science*, 2001, 292(5522):1695-1697.
- [122] TOYODA K, UCHIDA K, NOGUCHI A, et al. Realization of holonomic single-qubit operations[J]. *Physical Review A*, 2013, 87(5):052307.
- [123] LEROUX F, PANDEY K, REHBI R, et al. Non-abelian adiabatic geometric transformations in a cold strontium gas[J]. *Nature Communications*, 2018, 9(1):1-7.
- [124] SJÖQVIST E, TONG D M, ANDERSSON L M, et al. Non-adiabatic holonomic quantum computation[J]. *New Journal of Physics*, 2012, 14(10):103035.
- [125] XU G, ZHANG J, TONG D, et al. Nonadiabatic holonomic quantum computation in decoherence-free subspaces[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(17):170501.
- [126] XU G, LIU C, ZHAO P, et al. Nonadiabatic holonomic gates realized by a single-shot implementation[J]. *Physical Review A*, 2015, 92(5):052302.
- [127] SJÖQVIST E. Nonadiabatic holonomic single-qubit gates in off-resonant λ systems[J]. *Physics Letters A*, 2016, 380(1-2):65-67.
- [128] HERTERICH E, SJÖQVIST E. Single-loop multiple-pulse nonadiabatic holonomic quantum gates[J]. *Physical Review A*, 2016, 94(5):052310.
- [129] XU G, ZHAO P, XING T, et al. Composite nonadiabatic holonomic quantum computation [J]. *Physical Review A*, 2017, 95(3):032311.
- [130] XUE Z Y, GU F L, HONG Z P, et al. Nonadiabatic holonomic quantum computation with dressed-state qubits[J]. *Physical Review Applied*, 2017, 7(5):054022.
- [131] ZHAO P, XU G, DING Q, et al. Single-shot realization of nonadiabatic holonomic quantum gates in decoherence-free subspaces[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(6):062310.
- [132] HONG Z P, LIU B J, CAI J Q, et al. Implementing universal nonadiabatic holonomic quantum gates with transmons[J]. *Physical Review A*, 2018, 97(2):022332.
- [133] XU G, TONG D, SJÖQVIST E. Path-shortening realizations of nonadiabatic holonomic gates [J]. *Physical Review A*, 2018, 98(5):052315.
- [134] RAMBERG N, SJÖQVIST E. Environment-assisted holonomic quantum maps[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(14):140501.
- [135] ABDUMALIKOV JR A A, FINK J M, JULIUSSON K, et al. Experimental realization of

- non-abelian non-adiabatic geometric gates[J]. *Nature*, 2013, 496(7446):482-485.
- [136] XU Y, CAI W, MA Y, et al. Single-loop realization of arbitrary nonadiabatic holonomic single-qubit quantum gates in a superconducting circuit[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(11):110501.
- [137] DANILIN S, VEPSÄLÄINEN A, PARAOANU G S. Experimental state control by fast non-abelian holonomic gates with a superconducting qutrit[J]. *Physica Scripta*, 2018, 93(5): 055101.
- [138] FENG G, XU G, LONG G. Experimental realization of nonadiabatic holonomic quantum computation[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(19):190501.
- [139] LI H, LIU Y, LONG G. Experimental realization of single-shot nonadiabatic holonomic gates in nuclear spins[J]. *SCIENCE CHINA Physics, Mechanics & Astronomy*, 2017, 60(8):1-7.
- [140] ZHU Z, CHEN T, YANG X, et al. Single-loop and composite-loop realization of nonadiabatic holonomic quantum gates in a decoherence-free subspace[J]. *Physical Review Applied*, 2019, 12(2):024024.
- [141] ZU C, WANG W B, HE L, et al. Experimental realization of universal geometric quantum gates with solid-state spins[J]. *Nature*, 2014, 514(7520):72-75.
- [142] ARROYO-CAMEJO S, LAZARIEV A, HELL S W, et al. Room temperature high-fidelity holonomic single-qubit gate on a solid-state spin[J]. *Nature Communications*, 2014, 5(1): 1-5.
- [143] SEKIGUCHI Y, NIIKURA N, KUROIWA R, et al. Optical holonomic single quantum gates with a geometric spin under a zero field[J]. *Nature Photonics*, 2017, 11(5):309-314.
- [144] ZHOU B B, JERGER P C, SHKOLNIKOV V O, et al. Holonomic quantum control by coherent optical excitation in diamond[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(14):140503.
- [145] ISHIDA N, NAKAMURA T, TANAKA T, et al. Universal holonomic single quantum gates over a geometric spin with phase-modulated polarized light[J]. *Optics Letters*, 2018, 43(10): 2380-2383.
- [146] NAGATA K, KURAMITANI K, SEKIGUCHI Y, et al. Universal holonomic quantum gates over geometric spin qubits with polarised microwaves[J]. *Nature Communications*, 2018, 9 (1):1-10.
- [147] ZHENG S B, YANG C P, NORI F. Comparison of the sensitivity to systematic errors between nonadiabatic non-abelian geometric gates and their dynamical counterparts[J]. *Physical Review A*, 2016, 93(3):032313.
- [148] JING J, LAM C H, WU L A. Non-abelian holonomic transformation in the presence of classical noise[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(1):012334.
- [149] LIU B J, SONG X K, XUE Z Y, et al. Plug-and-play approach to nonadiabatic geometric

- quantum gates[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(10):100501.
- [150] LI S, CHEN T, XUE Z Y. Fast holonomic quantum computation on superconducting circuits with optimal control[J]. *Advanced Quantum Technologies*, 2020, 3(3):2000001.
- [151] YAN T, LIU B J, XU K, et al. Experimental realization of nonadiabatic shortcut to non-abelian geometric gates[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(8):080501.
- [152] DAEMS D, RUSCHHAUPT A, SUGNY D, et al. Robust quantum control by a single-shot shaped pulse[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(5):050404.
- [153] RUSCHHAUPT A, CHEN X, ALONSO D, et al. Optimally robust shortcuts to population inversion in two-level quantum systems[J]. *New Journal of Physics*, 2012, 14(9):093040.
- [154] LEIBFRIED D, BLATT R, MONROE C, et al. Quantum dynamics of single trapped ions[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2003, 75(1):281.
- [155] CUI J M, HUANG Y F, WANG Z, et al. Experimental trapped-ion quantum simulation of the kibble-zurek dynamics in momentum space[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6(1):1-7.
- [156] OLMSCHENK S, YOUNGE K C, MOEHRING D L, et al. Manipulation and detection of a trapped Yb^+ hyperfine qubit[J]. *Physical Review A*, 2007, 76(5):052314.
- [157] JEŽEK M, FIURÁŠEK J, HRADIL Z. Quantum inference of states and processes[J]. *Physical Review A*, 2003, 68(1):012305.
- [158] BLUME-KOHOOUT R. Optimal, reliable estimation of quantum states[J]. *New Journal of Physics*, 2010, 12(4):043034.
- [159] TORLAI G, WOOD C J, ACHARYA A, et al. Quantum process tomography with unsupervised learning and tensor networks[J]. *arXiv:2006.02424*, 2020.
- [160] KNILL E, LEIBFRIED D, REICHLE R, et al. Randomized benchmarking of quantum gates [J]. *Physical Review A*, 2008, 77(1):012307.
- [161] MAGESAN E, GAMBETTA J M, JOHNSON B R, et al. Efficient measurement of quantum gate error by interleaved randomized benchmarking[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(8):080505.
- [162] ERIK L S. pygsti:version 0.9.9.3[J/OL]. GitHub repository, 2020. <https://github.com/pyGSTio/pyGSTi>.
- [163] LIU B J, HUANG Z H, XUE Z Y, et al. Superadiabatic holonomic quantum computation in cavity qed[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(6):062308.
- [164] KIBBLE T W. Topology of cosmic domains and strings[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1976, 9(8):1387.
- [165] ZUREK W H. Cosmological experiments in superfluid helium?[J]. *Nature*, 1985, 317(6037):505-508.
- [166] CAMPO A, ZUREK W. Symmetry and fundamental physics: Tom kibble at 80[J]. 2014.

- [167] CHANDRA A K, DAS A, CHAKRABARTI B K. Quantum quenching, annealing and computation: volume 802[M]. Springer Science & Business Media, 2010.
- [168] NAVON N, GAUNT A L, SMITH R P, et al. Critical dynamics of spontaneous symmetry breaking in a homogeneous bose gas[J]. Science, 2015, 347(6218):167-170.
- [169] ULM S, ROSSNAGEL J, JACOB G, et al. Observation of the kibble-zurek scaling law for defect formation in ion crystals[J]. Nature Communications, 2013, 4(1):1-7.
- [170] PYKA K, KELLER J, PARTNER H, et al. Topological defect formation and spontaneous symmetry breaking in ion coulomb crystals[J]. Nature Communications, 2013, 4(1):1-6.
- [171] MONACO R, MYGIND J, RIVERS R. Zurek-kibble domain structures: The dynamics of spontaneous vortex formation in annular josephson tunnel junctions[J]. Physical Review Letters, 2002, 89(8):080603.
- [172] CHEN D, WHITE M, BORRIES C, et al. Quantum quench of an atomic mott insulator[J]. Physical Review Letters, 2011, 106(23):235304.
- [173] BRAUN S, FRIESDORF M, HODGMAN S S, et al. Emergence of coherence and the dynamics of quantum phase transitions[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2015, 112(12):3641-3646.
- [174] ANQUEZ M, ROBBINS B, BHARATH H, et al. Quantum kibble-zurek mechanism in a spin-1 bose-einstein condensate[J]. Physical Review Letters, 2016, 116(15):155301.
- [175] KEESLING A, OMRAN A, LEVINE H, et al. Quantum kibble-zurek mechanism and critical dynamics on a programmable rydberg simulator[J]. Nature, 2019, 568(7751):207-211.
- [176] XU X Y, HAN Y J, SUN K, et al. Quantum simulation of landau-zener model dynamics supporting the kibble-zurek mechanism[J]. Physical Review Letters, 2014, 112(3):035701.
- [177] CUI J M, GÓMEZ-RUIZ F J, HUANG Y F, et al. Experimentally testing quantum critical dynamics beyond the kibble-zurek mechanism[J]. Communications Physics, 2020, 3(1):1-7.
- [178] CAPPELLO V, MARCHETTI L, PARLANTI P, et al. Ultrastructural characterization of the lower motor system in a mouse model of krabbe disease[J]. Scientific Reports, 2016, 6(1):1-15.
- [179] GRIFFIN S M, LILIENBLUM M, DELANEY K T, et al. Scaling behavior and beyond equilibrium in the hexagonal manganites[J]. Physical Review X, 2012, 2(4):041022.
- [180] PATANE D, SILVA A, AMICO L, et al. Adiabatic dynamics in open quantum critical many-body systems[J]. Physical Review Letters, 2008, 101(17):175701.
- [181] NALBACH P, VISHVESHWARA S, CLERK A A. Quantum kibble-zurek physics in the presence of spatially correlated dissipation[J]. Physical Review B, 2015, 92(1):014306.
- [182] DUTTA A, RAHMANI A, DEL CAMPO A. Anti-kibble-zurek behavior in crossing the quantum critical point of a thermally isolated system driven by a noisy control field[J]. Physical

- Review Letters, 2016, 117(8):080402.
- [183] GAO Z P, ZHANG D W, YU Y, et al. Anti-kibble-zurek behavior of a noisy transverse-field xy chain and its quantum simulation with two-level systems[J]. Physical Review B, 2017, 95(22):224303.
- [184] GARDAS B, DZIARMAGA J, ZUREK W H, et al. Defects in quantum computers[J]. Scientific Reports, 2018, 8(1):1-10.
- [185] BANDO Y, SUSAKI Y, OSHIYAMA H, et al. Probing the universality of topological defect formation in a quantum annealer: Kibble-zurek mechanism and beyond[J]. Physical Review Research, 2020, 2(3):033369.
- [186] PUEBLA R, SMIRNE A, HUELGA S F, et al. Universal anti-kibble-zurek scaling in fully connected systems[J]. Physical Review Letters, 2020, 124(23):230602.
- [187] LIOU S F, YANG K. Quench dynamics across topological quantum phase transitions[J]. Physical Review B, 2018, 97(23):235144.
- [188] BUNDE J, MCKENZIE R H. Effect of disorder on quantum phase transitions in anisotropic xy spin chains in a transverse field[J]. Physical Review B, 1999, 60(1):344.
- [189] RAHMANI A. Dynamics of noisy quantum systems in the heisenberg picture: Application to the stability of fractional charge[J]. Physical Review A, 2015, 92(4):042110.
- [190] NOVIKOV E A. Functionals and the random-force method in turbulence theory[J]. Sov. Phys. JETP, 1965, 20(5):1290-1294.
- [191] KHINTCHINE A. Korrelationstheorie der stationären stochastischen prozesse[J]. Mathematische Annalen, 1934, 109(1):604-615.
- [192] LECUN Y, BENGIO Y, HINTON G. Deep learning[J]. Nature, 2015, 521(7553):436-444.
- [193] SCHMIDHUBER J. Deep learning in neural networks: An overview[J]. Neural Networks, 2015, 61:85-117.
- [194] BISHOP C M. Pattern recognition and machine learning[M]. springer, 2006.
- [195] GOODFELLOW I, BENGIO Y, COURVILLE A, et al. Deep learning: volume 1[M]. MIT press Cambridge, 2016.
- [196] SUTTON R S, BARTO A G. Reinforcement learning: An introduction[M]. MIT press, 2018.
- [197] CARLEO G, CIRAC I, CRANMER K, et al. Machine learning and the physical sciences[J]. Reviews of Modern Physics, 2019, 91(4):045002.
- [198] SCHULD M, SINAYSKIY I, PETRUCCIONE F. An introduction to quantum machine learning[J]. Contemporary Physics, 2015, 56(2):172-185.
- [199] BIAMONTE J, WITTEK P, PANCOTTI N, et al. Quantum machine learning[J]. Nature, 2017, 549(7671):195-202.
- [200] HENTSCHEL A, SANDERS B C. Machine learning for precise quantum measurement[J].

- Physical Review Letters, 2010, 104(6):063603.
- [201] LOVETT N B, CROSNIER C, PERARNAU-LLOBET M, et al. Differential evolution for many-particle adaptive quantum metrology[J]. Physical Review Letters, 2013, 110(22): 220501.
- [202] LEWIS JR H R, RIESENFELD W. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field[J]. Journal of Mathematical Physics, 1969, 10(8):1458-1473.
- [203] SCHULMAN J, WOLSKI F, DHARIWAL P, et al. Proximal policy optimization algorithms [J]. arXiv:1707.06347, 2017.
- [204] SCHULMAN J, LEVINE S, ABBEEL P, et al. Trust region policy optimization[C]// International conference on machine learning. PMLR, 2015: 1889-1897.
- [205] KUHNLE A, SCHAARSCHMIDT M, FRICKE K. Tensorforce: a tensorflow library for applied reinforcement learning[EB/OL]. 2017. <https://github.com/tensorforce/tensorforce>.
- [206] JOHANSSON J R, NATION P D, NORI F. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems[J]. Computer Physics Communications, 2012, 183 (8):1760-1772.

致 谢

不知不觉已经走完了博士的五个年头，当我们站在起点的时候，会感叹路途的遥远，当我们终于一路艰辛走进目标时，又会感叹时光荏苒，不禁开始怀念过往。在中国科大学习生活的这五年，会是我一生最宝贵的财富，无论以后遇到什么样的困难，我都会想起曾经在这里的日子，它们会给我勇气和信念，去战胜任何的艰难险阻。

曾经的我也有过迷茫，有对未来的恐惧，也曾一度丧失了对科研的信心，想转行它处。多亏了身边的良师益友，在我迷茫困顿的时候一直陪伴我、鼓励我，和我一起度过了最艰难的日子，在这里我要向他们致以最真诚的感谢！

首先我要感谢郭光灿院士，郭老师是中国量子信息研究的先驱之一，他不仅将自己对量子力学独到的见解教给了我们，同时为我们提供了优越的科研办公条件，让我们可以没有后顾之忧的探索自己感兴趣的领域。我一直为自己能得到郭老师的教导而感到荣幸与自豪。

然后我要感谢李传锋老师，李老师是我的山东老乡，每次与李老师促膝长谈，聆听李老师的教导都使我收益良多。李老师对于下面的青年教师和学生既宽容又严厉，在科学问题上要求很高，但是生活中却会经常给大家力所能及的帮助。李老师几乎每天都会工作到晚上 11 点以后，他为我们离子阱小组提供了前行的方向和指导，是我们背后的依靠。

特别感谢黄运锋老师，是黄老师将我招进了离子阱研究小组，他对待科研问题见解独到，一阵见血，每当我有实验上面的困难，都会去找黄老师请教。黄老师为人随和、充分尊重学生的意见，但是在关键的时刻也会严格监督我们，让我们养成良好的科研习惯。黄老师从来不吝啬组里的经费，每当外面有什么学习交流的机会，他都会鼓励我们前去参加。我为自己来到了黄老师组内读博感到幸运。

特别感谢崔金明老师，自从我来到离子阱组内，是崔老师手把手带领我走上了离子阱实验的道路。崔老师实验技能高超、思维开放活跃、精力异常充沛，对事物充满了好奇心，我从他那里学到了很多实验方面的技能和科学研究的方法。很希望以后还可以继续从崔老师那里学习。同时我要感谢我的合作老师华南师范大学的薛正远老师和上海大学的陈玺老师，他们给了我强大的理论支持，同他们的合作极大的丰富了我的科研经历。

此外，我要感谢实验组里的柳必恒老师、韩永建老师、项国勇老师、许金时老师，感谢你们对我的指导和帮助！

在这里我也要特别感谢对我科研生涯非常重要的四位师兄，他们是王健师

兄、张超师兄、胡晓敏师兄和王俊峰师兄，当然他们现在已经或者将要成为正式的老师了。他们不仅在实验技能方面对我倾囊相授，每当我对科研丧失了信心，对未来感到迷茫，也是他们不断引导我，帮助我，让我能继续在这条道路上继续走下去，祝愿他们科研能够越做越好，也希望未来能够继续像他们学习。

在感谢完上述老师后，我还要感谢我们强大的国家，感谢无私奉献的纳税人，是国家的稳定和他们的奉献，让我们能够自由的探索自己感兴趣的科研问题，不用为生活劳苦奔波。

感谢曾经帮助过我的师兄们：王钊，侯志博，吕为民，胡长康，周坤，贺冉，曹洹等，感谢与我一同生活，给我带来快乐和深厚友谊的同学和师弟妹们，他们是钱忠华，高新霞，郑永祥，李睿睿，鲍星宇，潘宇豪，周小龙，李黎，陈炎，房鼎，叶蔚然，郭钰，闫飞飞，潘维韦，刘超，庄伟峰，沈振雄，李赛，丁泳程等。感谢办公室的段开敏老师、王涛老师、吴莉老师、汪玉婵老师、李洪梅老师等。

感谢这么多年培养我长大成人的各个阶段的老师，陪我一起成长的同学和伙伴，没有你们，就没有现在的自己。

最后谨以此论文献给我的父亲、母亲和妻子张巧梦，感谢你们一直以来对我的支持与理解，你们永远都是我前进的动力和快乐的源泉，我爱你们！

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文

1. Cui JM, Ai MZ, He R, Qian ZH, Qin XK, Huang YF, Zhou ZW, Li CF, Tu T, Guo GC. Experimental demonstration of suppressing residual geometric dephasing[J]. Science Bulletin, 2019, 64(23): 1757-1763.
2. Ai MZ, Li S, Hou Z, He R, Qian ZH, Xue ZY, Cui JM, Huang YF, Li CF, Guo GC. Experimental realization of nonadiabatic holonomic single-qubit quantum gates with optimal control in a trapped ion[J]. Physical Review Applied, 2020, 14(5): 054062.
3. Ai MZ, Cui JM, He R, Qian ZH, Gao XX, Huang YF, Li CF, Guo GC. Experimental verification of anti-Kibble-Zurek behavior in a quantum system under a noisy control field[J]. Physical Review A, 2021, 103(1): 012608.
4. He R, Ai MZ, Cui JM, Huang YF, Han YJ, Li CF, Tu T, Creffield CE, Sierra G, Guo GC. Identifying the Riemann zeros by periodically driving a single qubit[J]. Physical Review A, 2020, 101(4): 043402.
5. Chen Z, Cui JM, Ai MZ, He R, Huang YF, Han YJ, Li CF, Guo GC. Experimentally detecting dynamical quantum phase transitions in a slowly quenched Ising-chain model[J]. Physical Review A, 2020, 102(4): 042222.
6. Gao XX, Cui JM, Ai MZ, Huang YF, Li CF, Guo GC. An Acoustic Sensor Based on Active Fiber Fabry-Pérot Microcavities[J]. Sensors, 2020, 20(20): 5760.
7. Zhou K, Ai MZ, Qian ZH, Gao XX, Hu ZH, Li Q, Yuan L, Wang Z, Huang YF, Tu T, Cui JM, Li CF, Guo GC. High-sensitivity strain sensor with an in-fiber air-bubble Fabry-Perot interferometer[J]. Applied Physics Letters, 2018, 113(18): 181901.
8. Cui JM, Zhou K, Zhao MS, Ai MZ, Hu CK, Li Q, Liu BH, Peng JL, Huang YF, Li CF, Guo GC. Polarization nondegenerate fiber Fabry-Perot cavities with large tunable splittings[J]. Applied Physics Letters, 2018, 112(17): 171105.

待发表论文

1. Ai MZ, Ding Y, Ban Y, Martin-Guerrero JD, Casanova J, Cui JM, Huang YF, Chen X, Li CF, Guo GC. Experimentally Realizing Efficient Quantum Control with Reinforcement Learning[J]. arXiv preprint arXiv:2101.09020, 2021.

2. Ai MZ, Li S, He R, Xue ZY, Cui JM, Huang YF, Li CF, Guo GC. Experimental Realization of Nonadiabatic Holonomic Single-Qubit Quantum Gates with Two Dark Paths in a Trapped Ion[J]. arXiv preprint arXiv:2101.07483, 2021.
3. He R, Ai MZ, Cui JM, Huang YF, Han YJ, Li CF, Guo GC, G Sierra, Creffield CE. Riemann zeros from a periodically-driven trapped ion[J]. arXiv preprint arXiv:2102.06936, 2021.
4. Zhang HQ, Ai MZ, Cui JM, Han YJ, Li CF, Guo GC. Investigating the quench dynamics of the bound states in a spin-orbital coupling system using a trapped ion[J]. arXiv preprint arXiv:2009.04176, 2020.
5. Qian ZH, Cui JM, Luo WX, Zheng YX, Huang YF, Ai MZ, He R, Li CF, Guo GC. Nanosecond super-resolved imaging of a single cold atom by stimulated emission depletion microscopy[J]. arXiv preprint arXiv:2104.10026, 2021.