

中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

博士学位论文



论文题目 高通光离子阱的搭建和应用

作者姓名 贺冉

学科专业 物理学

导师姓名 韩永建 教授 崔金明 副研究员

完成时间 二〇二一年五月

韩永建

中国科学技术大学
博士学位论文



高通光离子阱的搭建和应用

作者姓名： 贺冉

学科专业： 物理学

导师姓名： 韩永建 教授 崔金明 副研究员

完成时间： 二〇二一年五月三十一日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



**A high-optical-access ion trap and
its application**

Author: He Ran

Speciality: Physics

Supervisors: Prof. Han Yongjian, Prof. Cui Jinming

Finished time: May 31, 2021

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名： 贺月

签字日期： 2021年05月26日

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☒ 公开 ☐ 保密 (____ 年)

作者签名： 贺月

导师签名： 韩永建

签字日期： 2021年05月26日

签字日期： 2021.05.26

摘 要

冷原子系统，包括中性原子、囚禁离子、以及冷原子-离子混合系统是实现大规模量子模拟和量子计算的理想系统。激光控制技术在系统中被广泛地用于冷却、囚禁和操作微观粒子，这已成为当代原子、分子和光学（AMO）领域中最基础、最重要的控制手段。对于离子阱，尤其是包含多种粒子的混合离子阱来说，系统的通光性能需要尽可能地优化，才能为扩展这些光学操作手段提供充足的空间。

其中，可编程光镊阵列是一个强大的光学工具，与离子阱的结合尤为迫切。近十几年来，在冷原子系统和分子系统中，光镊已被广泛使用。光镊是一种高度汇聚的远失谐的偶极阱，其光斑半径可以汇聚到几个微米。使用一个高数值孔径的物镜以及一个声光衍射器即可实现可编程的光镊阵列，用于单原子或单离子的寻址。在离子阱中使用光镊具有重要意义。首先，使用光镊束缚离子替代射频电场，能够解决由于射频场固有的微运动带来的问题。第二，使用光镊束缚单个冷原子与电场囚禁的离子相互作用，可以实现低温下的可控的量子化学反应，为相干化学的全量子控制开辟道路。第三，在一维或二维长离子晶体中，使用光镊能够调制离子的局域运动模式，有利于解决离子阱系统中的可扩展问题和并行性问题。但是，光镊要求一个高的数值孔径的物镜和通光窗口，这对于已经复杂的离子阱光路和稀缺的高通光孔径来说是一个挑战。对于当前的大多数离子阱来说，无法同时实现高度汇聚的拉曼光独立寻址，可编程光镊阵列，和高效的荧光收集三种要求。当前的离子阱系统主要使用大体积的金属真空腔，这极大地限制了系统的通光性能。因此，为了解决这个问题，本博士学位论文主要介绍一种具备高通光性的离子阱系统的设计、搭建、测试及应用。

我们设计并搭建了一个新型高通光离子阱，将紧凑的刀片式离子阱与玻璃真空腔相结合。离子阱中心距离四个腔壁只有 15 mm，能够同时满足四个高数值孔径（NA）物镜的使用，其中两个物镜 $NA \leq 0.32$ ，另外两个 $NA \leq 0.66$ ，并具备充足的斜入射通光角度。高 NA 的物镜能够将激光光斑直径汇聚到 $2\mu\text{m}$ 以下，能够用于光偶极阱、单离子寻址、量子态操作，并能够实现荧光收集。五段式的电极结构能够实现离子运动状态的精确调控。使用激光剥蚀和离子化，我们成功囚禁并冷却了一维 $^{174}\text{Yb}^+$ 和 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子晶体，证明该阱可以稳定地工作。本文详细地介绍了该装置的结构设计和加工方法，并使用数值模拟和实验测量表征该装置的整体性能。这种紧凑的高通光离子阱能够将离子阱、光镊技术、中性冷原子集成到一个系统中，不仅可以作为一个可扩展模块用于量子信息处理，还有助于在混合系统中进行量子化学的实验研究。

我们利用单个囚禁离子作为量子模拟器，使用 Floquet 方法在实验上定位到了黎曼函数的第一个零点和波利亚函数的前两个零点。在恰当的周期性驱动函数控制下，这些函数零点的出现与 Floquet 系统两个准能量的简并点相关联，并在实验上对应系统演化的冻结。多个周期性的驱动对系统提出了严格要求，依赖离子阱的长相干时间和高保真度的操作和读取精度，黎曼函数第一个零点的测量值为 14.3 ± 0.1 ，十分接近实际值 14.1347。我们的工作实现了首次在量子系统中测量黎曼零点的实验研究，为寻找黎曼函数和量子系统之间的关联提供新的思路。

关键词：离子阱；通光性；混合系统；黎曼零点；Floquet 方法

ABSTRACT

Cold atom systems, including neutral atom, trapped ions, as well as cold hybrid ion-atom systems, are ideal platforms to explore scalable quantum simulation and quantum computing researches. In these systems, optical cooling, trapping, and quantum state manipulation provided by lasers are widely used, which are the most basic and important methods for modern atomic, molecular, and optical (AMO) experiments.

One of the most powerful and urgently needed tools compatible with trapped ion is the programmable optical tweezer, which has been widely utilized in cold neutral atoms and molecules for decades. Optical tweezers are high focused off-resonant dipole traps with a beam waist down to about a few microns. Programmable optical tweezer arrays can be applied, for example, by a high numerical aperture (NA) objective and an acoustooptic deflector (AOD), to address individual atoms or ions. Employing optical tweezers in an ion trap has several major significances. Firstly, it allows us to optically trap ions in the absence of radio-frequency (RF) field, which helps to get rid of the heating due to RF micromotion. Secondly, it allows us to trap single neutral atoms optically and spatially overlap them with single ions trapped electrically at ultralow temperature, which will eventually pave the way towards coherent chemistry with full quantum control. Thirdly, it allows us to engineer localized phonon modes of individual ions pinned by optical tweezers in a long string, which is able to address the challenge of scale and parallel quantum computations with long one-dimensional ion strings or two-dimensional ion crystals. However, an optical tweezer in the ion trap requires an additional high NA objective to the already complex optical configurations in the trapped ion system. For most ion traps, it is difficult or not feasible to have enough optical access for high focused Raman beams, programmable optical tweezer arrays, efficient fluorescence collection simultaneously. It is always crucial to optimize the optical accessibility of the ion trap setup, especially the hybrid atom-ion quantum system, to enhance these control capabilities. Currently, the optical accessibility of the trapped ion system, especially the hybrid atom-ion quantum system, is greatly limited by the conventional bulky stainless steel vacuum chamber. To address this problem, in this thesis we present the design, fabrication, test and application of a new ion trap with high optical access.

Here, we report the fabrication of integrating a compact segmented-blade ion trap into a glass vacuum cell. With a distance of 15 mm from the trap center to four outside

surfaces of the glass cell, the system enables us to install four high numerical aperture (NA) lenses (with two $\text{NA} \leq 0.32$ lenses and two $\text{NA} \leq 0.66$ lenses) and obliquely apply multiple laser beams around the glass cell simultaneously. The high NA lenses can be used to generate laser spots below $2\text{ }\mu\text{m}$ and collect fluorescence of single atoms, which are applicable to optical dipole trap, single atoms addressing, state manipulation, and fluorescence detection. Both DC blades are segmented into five electrodes, which enable the precise control of the motion of the ions. By using laser ablation and optical ionization methods, we have successfully loaded a one-dimensional $^{174}\text{Yb}^+$ and $^{171}\text{Yb}^+$ ion crystal in the trap, realized Doppler cooling of the ions and verified the trapping stability. We introduce the design concept and fabrication methods of this trap in detail, along with a series of numerical simulations and experimental characterizations of its performance. This compact high-optical-access trap setup can integrate multiple applications for trapped ions, optical tweezers, and neutral cold atoms in one apparatus, which not only can be used as an extendable module for quantum information processing, but also facilitates experimental studies on quantum chemistry in a cold hybrid ion-atom system.

We achieve a quantum simulator based on the trapped ion and experimentally identify the first non-trivial zero of the Riemann zeta function and the first two non-trivial zeros of the Pólya's function using a novel Floquet method. Through properly designed periodically driving functions, the zeros of these functions are characterized by the occurrence of crossings of quasi-energies when the dynamics of the system are frozen. Ion traps feature long coherence times and high fidelity of both operation and detection, which are critical to observe the CDT because dozens of driving cycles are necessary. The first Riemann zeros is indentified to be 14.3 ± 0.1 , in good agreement with the exact value 14.1347. Our study provides the first experimental realization of the Riemann zeros in a quantum system, which may provide new insights into the connection between the Riemann function and quantum physics.

Key Words: Ion trap; Optical access; Hybrid system; Riemann zeros; Floquet method

目 录

符号说明	XI
第 1 章 绪论	1
1.1 量子信息的发展	1
1.2 离子阱的发展	2
1.3 离子阱的路线图	3
1.4 基于离子阱的量子模拟	6
1.5 文章结构	8
第 2 章 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子与离子阱	9
2.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子	9
2.1.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 能级结构	9
2.1.2 $^{171}\text{Yb}^+$ 的多普勒冷却	10
2.1.3 $^{171}\text{Yb}^+$ 的初始化和态制备	11
2.1.4 $^{171}\text{Yb}^+$ 的态探测	12
2.2 激光与离子相互作用	13
2.2.1 EIT 冷却	17
2.2.2 边带冷却	19
2.2.3 拉曼操作	21
2.2.4 拉比频率计算	25
2.2.5 微波与离子相互作用	27
2.3 Paul 离子阱	30
2.3.1 Mathieu 方程	30
2.3.2 离子阱势	32
2.3.3 离子阱数值分析	35
2.3.4 一维离子晶体的运动模式	39
2.3.5 离子冷却模拟	41
第 3 章 高通光刀片阱的设计	43
3.1 刀片阱设计理念	44
3.2 刀片阱尺寸设计	45
3.2.1 刀片形状	45
3.2.2 刀片角度和间距	46
3.2.3 DC 电极宽度	48

3.3 刀片阱的制作	49
3.3.1 刀片加工	49
3.3.2 硅片固定基板	53
3.3.3 玻璃真空腔	54
3.3.4 陶瓷支柱和滤波板	56
3.3.5 组装	58
3.3.6 真空制备	59
3.3.7 光学平台	62
第4章 刀片阱的测试	65
4.1 螺旋谐振腔	65
4.2 直流电压源与滤波	71
4.3 激光与光路	71
4.3.1 369.5nm 激光稳频	71
4.3.2 369 和 399 激光光路	76
4.3.3 935nm 和 638nm 激光光路	77
4.4 离子成像	78
4.5 囚禁离子实验	79
第5章 Floquet 技术与黎曼函数零点	82
5.1 黎曼函数与 Pólya-Hilbert 猜想	82
5.2 Floquet 理论	84
5.3 使用 Floquet 方法寻找零点	86
5.4 实验与结果	92
第6章 结论	99
6.1 总结	99
6.2 展望	99
参考文献	101
附录 A 修改记录	113
致 谢	114
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	117

表 格 清 单

表 2.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 中的电偶极矩跃迁 ····· 26

表 2.2 简谐势阱中多离子的无量纲离子坐标 ····· 36

表 4.1 两组螺旋谐振腔的参数 ····· 67

插图清单

图 2.1	离子化示意图和 $^{171}\text{Yb}^+$ 的能级图	10
图 2.2	$^{171}\text{Yb}^+$ 的冷却、泵浦、操作和测量示意图	12
图 2.3	暗态和亮态探测光子数	12
图 2.4	EIT 冷却的 Fano 线型	18
图 2.5	离子的内态-声子能级	21
图 2.6	三能级系统的受激拉曼跃迁	22
图 2.7	三能级系统的受激拉曼跃迁和交换耦合	24
图 2.8	拉比频率、AC Stark 频移及其比例与波长关系	27
图 2.9	简谐势中离子最小间距随离子数变化	37
图 2.10	各个电极施加 1V 时在轴线上的电势	38
图 2.11	计算 20 个离子平衡位置	39
图 2.12	四次方轴向电势和离子平衡位置	40
图 2.13	四次多项式势阱的三维分布图。	40
图 2.14	多离子运动频率和运动模式	41
图 2.15	单离子的运动轨迹	42
图 3.1	高通光离子阱的应用	44
图 3.2	刀片阱示意图	46
图 3.3	分段阱组装图	47
图 3.4	$z=0$ 处单个离子的径向势阱	48
图 3.5	DC 刀片宽度扫描	49
图 3.6	使用激光处理刀刃	50
图 3.7	镀金并激光切割厚的 DC 刀片	52
图 3.8	DC 刀片表面	53
图 3.9	连接到 CF 法兰上的玻璃真空腔	54
图 3.10	玻璃腔表面电荷引起的杂散电场	55
图 3.11	陶瓷支柱和压线板	56
图 3.12	FPC 滤波板上层线路	57
图 3.13	刀片阱组装	58
图 3.14	真空制备时离子规示数	59
图 3.15	SAES 离子泵电流与氮气气压关系曲线	60
图 3.16	离子泵平均电流与真空规示数对比	61

图 3.17	四角固支的花岗石平台的竖直方向 (Z 轴) 振幅频率响应曲线。· · ·	62
图 3.18	光学平台和花岗岩平台的振幅谱密度 · · · · ·	63
图 3.19	安装好的刀片阱 · · · · ·	64
图 4.1	螺旋谐振腔尺寸 · · · · ·	66
图 4.2	螺旋谐振腔 · · · · ·	68
图 4.3	RF 电极 Smith 图 · · · · ·	68
图 4.4	螺旋谐振腔的 Q 值和共振频率随线圈尺寸的关系 · · · · ·	69
图 4.5	螺旋谐振腔校准 · · · · ·	70
图 4.6	十路四阶 RC 低通滤波器 · · · · ·	71
图 4.7	369 稳频光路 · · · · ·	73
图 4.8	扫描和锁定时的误差信号 · · · · ·	74
图 4.9	23 和 32 时超稳腔共振峰 · · · · ·	75
图 4.10	369 nm 和 399 nm 激光的光路 · · · · ·	76
图 4.11	935nm 和 638nm 激光光路 · · · · ·	77
图 4.12	激光入射角度 · · · · ·	78
图 4.13	含有 1-20 个离子的一维离子晶体 · · · · ·	79
图 4.14	单个离子的运动频率 · · · · ·	80
图 4.15	XY 和 ZX 平面的势阱 · · · · ·	80
图 4.16	微波拉比操作和 Ramsey 测量 · · · · ·	81
图 5.1	贝塞尔函数的零点 · · · · ·	88
图 5.2	被积分函数随 t 迅速减小 · · · · ·	89
图 5.3	驱动函数 $P_E(t)$ · · · · ·	90
图 5.4	具有对称性的驱动函数 · · · · ·	91
图 5.5	$\Phi(t)$, $\Phi(t) \cos(Et/2)$ 和 $\Phi'(t)$ · · · · ·	92
图 5.6	驱动函数的变形 · · · · ·	92
图 5.7	驱动函数随 E 和 t 的变化 · · · · ·	93
图 5.8	黎曼函数第一个零点的测量 · · · · ·	95
图 5.9	波利亚函数的第一个零点的测量 · · · · ·	96
图 5.10	波利亚函数的第二个零点的测量以及随 Ω 的变化 · · · · ·	97

符号说明

$\vec{E}$	电场强度
B	磁感应强度
Z	整数
e	自然对数
e	元电荷
$\sum_{i=1}^n a_i$	The sum of a_i

第1章 绪 论

1.1 量子信息的发展

自1900年Max Planck提出“量子”的概念到上世纪20年代,随着众多科学家的深入探索,量子理论已经发展出一套完整的理论——量子力学。受限于技术的发展,当时的人们还无法控制单个量子,但这并不妨碍量子力学在解释微观世界上获得的巨大成功。尤其是伴随着激光和晶体管的发展,人们操控微观粒子的能力愈来愈高。在上世纪70到80年代,David J. Wineland实现了囚禁单离子与激光的相互作用,Serge Haroche实现了腔内单原子与光子的相互作用,开启了人们精确操控微观量子态的大门。二人因此共同获得了2012年的诺贝尔物理学奖。

过去一百多年,量子力学已逐渐成为人们理解世界规律和推动科技发展的重要工具。对于未来,量子力学更是被赋予了一项推动计算机能力发展的重要构想——建造量子计算机。上世纪80年代Richard Phillips Feynman提出,想要使用经典计算机模拟量子力学,需要指数级增加的经典算力资源,而如果使用量子系统模拟量子力学,则可以大大减少资源消耗^[1]。Feynman给出了量子计算最初的设计和理论研究。经典比特的0和1两个状态被替换为量子比特的二能级系统,其演化遵循量子力学。信息被编码在量子态中,而测量会得到概率性的结果^[1]。之后,David Elieser Deutsch, Peter Williston Shor 和 Lov Kumar Grover 分别提出了三种量子算法^[2-4],其中Shor算法以其破解公开密钥加密方法(RSA加密算法)的潜力被认为是量子计算机优越性的代表算法。这些理论成果促使着人们在实验技术上的不断进步。多种物理系统都体现出实现量子计算的潜力,比如超导量子系统、囚禁离子系统、冷原子系统、碳化硅系统、氮空位色心、光子体系、NMR核磁共振系统、以及拓扑量子比特等等。实现量子计算需要满足DiVincenzo判据,即:1,具有良好表征的量子比特的可扩展系统;2,初态制备;3,长相干时间;4,可实现一组通用量子门;5,结果可以被测量;6,具有飞行比特连接静态比特^[5]。构建量子计算机的困难主要源于量子系统的脆弱性和可扩展问题。由于环境的影响,量子系统的量子特性会被消相干过程破坏。由于在操作过程中存在的噪音和误差,整个计算过程也很容易受到影响。尤其是在系统规模迅速增加时,这种脆弱性将导致量子优越性的不复存在。人们已经在离子阱系统和超导系统中分别展示了十几个甚至几十个量子比特的计算能力,并获得了社会广泛的关注。但是,实现普适的大规模量子计算需要百万级别的物理量子比特。这些物理比特将会通过容错编码形成具有容错能力的逻辑比特,以此抵御消相干等因素造成的错误。显然,这并非易事。不管是在单个系统中扩展可控量子

比特的数目，还是将多个小系统连接起来实现更大的系统，都遇到了严峻挑战。实现普适量子计算是最终的目标，在此之前，中小规模的量子计算机仍然能够解决特定的问题。尤其是利用这些有噪音的中小规模量子体系来进行的量子模拟，被认为是短时间内可以实现的目标。这将在生物制药、交通规划和飞行器设计等复杂问题领域都有潜在的应用价值。

1.2 离子阱的发展

在所有的量子体系中，离子阱是一种极有潜力的系统^[6]。Wolfgang Paul 于 1953 年发明了 Paul 型离子阱^[7-8]。Paul 型离子阱使用射频电场提供径向束缚，使用静电场实现离子的轴向束缚，因此可以实现离子的三维空间囚禁。最初的离子阱大多使用双曲面面形的电极^[7]，这种离子阱的势阱可以解析求解，离子的运动模式也可以解析地描述。因此这种离子阱常用于质谱分析中。但是这类离子阱的通光性较差，且其缺乏足够的控制电极。

经过多年的演化，人们发明了线性四极杆阱^[9]，分段式的四极杆阱、线性刀片阱^[10-11]、分段式线性刀片阱。刀片阱因其电极类似刀片而得名。朝着更为紧凑的结构、以及更为复杂的电极形状上发展，还出现了多层芯片阱^[12]。这些尺寸较大的具有三维结构的离子阱，统称三维离子阱。三维离子阱具有很多优点。第一，其通光孔径大，可在多个方向入射激光或观察离子。随着对离子控制需求的增加，人们将需要越来越多的激光光束和高数值孔径的物镜，三维离子阱的通光性优势则显得尤为必要。第二，三维离子阱的束缚能力强。虽然形状上已经与双曲面结构的离子阱有很大不同，但是三维离子阱依然具有相似的束缚能力，束缚势阱深度仍然容易达到电子伏的量级。因此，三维离子阱可以直接放置在室温环境下。第三，分段式的控制电极也增加了对离子运动状态的控制能力，离子的微运动也可以得到很好的补偿。当然，三维离子阱也有一些不足。例如，每一个三维离子阱都需要机械加工和手工组装，因此制造上有一定的难度，且安装的精度不够高。分段电极的数目难以提升，电极的形状也都较为简单，无法制作复杂的结构。

随着微纳加工技术的发展，使用微纳加工技术实现的小型化离子阱越来越受到关注，因此出现了具有复杂表面结构的二维离子阱^[13-14]。二维离子阱是三维离子阱的拓扑变形，其电极位于同一平面，而势阱中心处于电极的上方。二维离子阱的优点有很多。首先，微纳加工工艺可以实现复杂的电极结构，能够对离子的运动进行更为精确的控制。二维表面阱还可以兼容微纳光学等工艺，实现集成光学与离子阱的结合。集成了光波导的芯片阱，能够将复杂的空间光路直接集成到芯片上，并且减少空间光抖动带来的消相干^[15-18]。除了集成光学，还可以

集成电子线路,包括激光调制器、光开关、控制电源等等^[14]。因此二维离子阱为未来的可扩展集成离子阱开辟了道路。二维离子阱能够批量生产,有利于技术上的迭代和进步。但是,目前的二维离子阱还面临着一些亟待解决的困难。由于离子距离电极表面比三维离子阱更近,离子更容易受到环境噪音的加热^[19]。液氦低温环境能够有效地降低这种加热,因此二维离子阱常常放置在 4K 环境下。而研究表明,对电极表面进行处理,也能够有效地降低热率^[20]。尽管如此,二维离子阱的热率仍然比三维离子阱大得多。二维离子阱的另一个不足是其通光性受到电极平面的限制。由于激光光束具有一定的发散角,激光光斑在焦点前后都会发散。对于高度汇聚的寻址操作激光来说,其焦点位于离子附近,靠近芯片边缘的地方光斑会有较大的发散,被芯片边缘遮挡。一些表面阱通过在基底上刻槽的方法,垂直芯片表面通光。然而紫外光带来的充电效应也带来了新的问题^[21]。总而言之,二维离子阱具备了可扩展离子阱的基本特点,但仍有许多挑战。

1.3 离子阱的路线图

离子阱中的量子比特定义在某一特定元素的离子的内部能级上,天然地具备全同的性质。而例如超导系统等的人工量子比特,每个比特都是不同的。第二,利用激光,可以高保真度地实现量子比特的初始化、演化和测量,激光与离子的相互作用可以精确地控制,具备完备的理论基础。第三,离子阱利用电场将单个离子束缚在真空环境中,离子很难受到外界环境的影响,具备相当长的相干时间。第四,离子之间具备长程的库仑相互作用力,利用共同的运动模式来实现高保真度的两比特门操作,具备必须的通用量子门操作。第五,离子的能级天然地在激光频率范围,可以和光子飞行比特相互转换,实现不同静止比特之间的连接。第六,可以选择的离子种类有十几种,可以实现不同种类的组合,分别承担不同的功能,如协同冷却。因此,离子阱是一个量子模拟和量子计算绝佳的平台。

当前的离子阱系统中,人们能够操作的离子数目为几十个,实现上百个离子的操作也指日可待。然而,未来想要实现实用化的量子信息处理,需要具备成千上万,甚至百万个可控的物理比特。这是所有系统都面临的最大难题,即可扩展问题。现阶段,离子阱的可扩展路线图可以分为两大类。其一是由 David J. Wineland 等人提出的量子电荷耦合器 QCCD (quantum charge-coupled device) 路线图。使用具备丰富的分段电极的芯片阱,在同一个离子阱中布置不同功能的区域,通过改变电极的电压,控制离子在各个区域中穿梭。当离子移动到某个功能区时,将与来自其他区域的离子实现信息的交互,而后离子回到原有区域,或继续移动到其他的区域^[22-23]。各个功能区中,可以使用激光来实现操作,也可以使用近场微波来实现^[24-25]。QCCD 的方案需要人们建造足够精细和复杂的离子

阱芯片,来实现对离子的精确控制。这个方案的优点是可以实现量子操作的并行性,这有利于优化量子线路的效率。相比于一维离子链,QCCD中使用分叉的势阱,如交叉电极(Junction)结构^[12,26],可以实现离子空间位置的交换和重新布置。这对于提高离子的连通性有很大的帮助。但是,这种路线图目前也面临着一些需要解决的困难。首先,使用电场移动离子会消耗较多的时间资源,通常的移动发生在微秒甚至毫秒的时间尺度,这对于量子计算来说,会导致系统运行速度的降低。其次,在移动的过程中,由于电场噪音、轴向电势壁垒的存在,离子不可避免地会被加热,从而影响离子的运动状态。因此,实用的移动方案中往往需要使用其他离子辅助进行协同冷却^[27]。Honeywell公司的离子阱系统就使用了这种协同冷却技术,其中每一个量子比特离子都跟随着一个协同冷却的离子^[27]。

未来,QCCD方案的发展需要进一步结合集成光学、集成电子线路等技术,构建更为复杂的电极结构,功能更为完善的控制模块。还要不断地优化多离子的同步控制、热率的降低、协同冷却等等。这对微纳加工工艺和离子控制方面提出了更多的要求。

另一种主流的离子阱量子计算方案由 Christopher Roy Monroe 等人提出,即模块化的离子阱系统^[28]。在这个方案中,一个离子阱中不需要使用电极频繁地移动离子,而是使用可寻址的激光独立地操作各个离子,实现近邻或者非近邻的耦合。这样的离子阱作为一个中小规模的单元,可使用光子将不同单元连接起来,实现信息的交互,进而扩展成更大的系统。在一个阱中,实现上百个离子的囚禁和操作是可行的,而且由于离子之间库仑相互作用的存在,其分享着整体的运动状态,因此可以实现非近邻的相互作用。这相比于超导系统,提供了更强的连接性,能够大大地优化量子线路。尤其是在需要编码的容错量子计算中,这种全连通性将极大地降低物理比特的数量要求。但是这种路线仍存在许多困难。第一,该方案的操作依赖的是全局的运动模式,对于特定离子的操作,不仅需要考虑这些离子,还需要考虑其他离子的运动状态^[29]。即在操作结束时,要求所有的运动模式都回到初始状态。对于少数的离子,这样的优化问题可以通过激光强度和相位调制来实现。但是随着离子数目的增加,离子的运动模式越来越多,这样的优化问题越来越困难^[30]。此外,这样的操作难以实现同时对多个离子的不同操作,即难以实现并行性。还有一个问题值得考虑,随着离子数目的增加,为了保持离子间距的均匀性,需要降低轴向束缚,这样会导致离子链的轴向运动频率的降低,最终趋近于0。这会导致离子链更容易受到外界噪音的影响。Monroe等人提出的可扩展方法包括使用光子飞行比特将多个模块连接在一起,形成更大的系统。但是目前的连接效率无法满足需求,如何提高光子连接的效率,是一个值得深入研究的课题。离子数目的扩展也可以通过使用二维离子晶体来实现^[31],但这也需要对阱的结构进行设计和优化,同时需要更为细致的微

运动补偿。

当然,第二种路线的发展仍然受到单个离子阱中可以容纳的离子数目的限制,也受到操作并行能力的限制。是否有办法可以解决一维离子链的可扩展和并行性问题呢?一个很有潜力的解决方案是,将离子阱与可编程光镊阵列相结合。光镊在冷原子系统中是一种强大的光学工具^[32-34],它是一种远失谐的强汇聚的光偶极阱^[35]。在冷原子系统中,可以使用光镊将原子放置于三维空间的任意位置,排列成任意的二维或三维结构^[32-33,36-39]。而将光镊用于离子阱,能够实现单个离子的纯光囚禁^[40-42],避免由于微运动造成的加热问题^[43-44]。第二,可以使用光镊束缚单个原子,并与电场囚禁的单个离子相互作用,这有利于实现可控的量子级别的化学反应。最为重要的是,光镊将有希望解决离子阱扩展上的关键问题^[45-48]。第一,光镊有利于束缚更长更稳定的离子晶体。前面提到,随着离子数目的增加,需要降低离子的运动频率来维持离子间的间隔。这会导致纵模频率的降低,离子更容易受到外界的干扰。使用光镊作用在一部分离子上,可以将其运动频率稳定到一个较高的水平。随着光镊强度的增加,这种稳定能力趋于平衡,且理论上可以实现无穷长离子链的稳定束缚。第二,光镊有利于实现并行的可扩展的量子操作。被光镊作用的离子,其运动模式能从背景中激发出来,形成一个新的频率谱。利用这些被挑选出来的运动模式,可以实现对这些离子的量子操作。与此同时,还可以对没有被光镊作用的离子实现其他操作,因此实现了操作的并行性^[45-48]。综上所述,在离子阱中使用可编程的光镊阵列,有助于解决离子阱的扩展性问题和并行性问题。

然而,这个方案要求系统具备一个额外的通光孔径用于实现可编程光镊阵列。光镊所要求的物镜和窗口的数值孔径通常都在0.6以上,这对于离子阱的通光性提出了严格的要求。因为除了光镊之外,还必须保留原有的Raman光,和高效的荧光收集。其中Raman光需要实现对单个离子的独立寻址,因此必须使用高数值孔径的物镜。而荧光收集对于离子阱来说也是尤为重要的,必须使用大数值孔径的物镜。由于不锈钢技术的成熟和精细的加工精度,目前的离子阱装置大多使用体积较大的金属真空腔。这种真空腔具有灵活的结构和优良的超高真空兼容性。然而,金属真空腔常常只在一个或者两个方向具备高通光孔径,在其他方向受到距离和尺寸的限制,只能具备低数值孔径。在离子阱中使用大数值孔径的物镜时,还需要使用往腔内延伸的玻璃窗口,才能够匹配物镜的工作距离。放在低温系统中的离子阱,受到了更多的限制,因此增加一个高数值孔径用于光镊更为困难。

在冷原子领域中,玻璃真空腔被广泛使用,其具有紧凑的结构,兼容超高真空环境,天然具备高数值孔径等特性。在玻璃真空腔中制备冷原子系统,使用光镊操作单个原子已经成为成熟的技术。因此,玻璃真空腔被证明可以用于复杂的

冷原子实验。我们对于高通光性的解决方案就是使用玻璃真空腔取代原来的金属真空腔。实际上,已经有几个离子阱使用了玻璃真空腔^[12,49-50]。但是,这些离子阱都是芯片类的离子阱,本身的结构限制了在多个方向的高数值孔径,只能在一个或者两个方向上具备高的通光性,不能满足要求。所以,设计一个具备多方向的高数值孔径的离子阱,同时实现拉曼光独立寻址、可编程光镊阵列、和高效荧光收集,是极为迫切的。本文将介绍一种新型高通光离子阱的搭建和应用,通过将分段式刀片离子阱与玻璃腔室相结合,建造出四个方向都具备高数值孔径的集成化离子阱装置。该系统充分地扩展了离子阱的通光性能,能够实现大功率密度的激光光束与离子的相互作用,为量子信息和量子模拟提供充足的操作空间。

1.4 基于离子阱的量子模拟

离子阱系统提供了一个量子模拟的优良平台。由于库仑相互作用力,离子阱中的所有离子具备长程的、非近邻的相互作用。这为量子模拟提供了极大的便利。激光与离子相互作用哈密顿量的强度、相位、作用形式、以及时间都可以使用射频信号任意波发生器精确地调控。得益于离子的长相干时间和高操作保真度,离子阱已经成为量子模拟最重要的平台之一^[51-55]。例如,混合系统(hybrid system)使用了多种元素的离子、原子或者分子,构建具有复杂功能的量子体系,在量子计算和量子模拟中都有显著的优势^[56-58]。使用离子晶体与冷原子的碰撞可以研究分子的形成过程^[59-61,57,62]。其中,使用周期性调制哈密顿量的 Floquet 方法具有诸多应用价值。例如拓扑绝缘体^[63-64],非平衡动力学^[65],以及时间晶体^[66-67]等等。在本工作中,通过设计适当的驱动函数,周期性地驱动单个量子比特,使得当某个参数等于黎曼函数零点时,系统的准能量发生简并,则可在实验上观察到系统演化停止的现象^[68]。使用这种方法可以成功观测到黎曼函数的第一个零点和波利亚函数的前两个零点。

由黎曼在 1859 年正式提出的黎曼猜想,即黎曼函数的非平凡零点的实数部分都是 $1/2$,是数学界的一个悬而未决却又至关重要的问题^[69-70]。在数论中,黎曼函数的非平凡零点处于中心的地位。尤其是,它们与素数定理密切相关。素数定理能够预测所有的质数的分布,核心内容为寻找到一个函数 $\pi(x)$,其值为小于等于 x 的素数的个数。例如 $\pi(10) = 4$,这是因为小于等于 10 的素数有四个,分别为 2, 3, 5, 和 7。人类对于素数分布的规律可以追溯到公元前,然而在几千年来都没有能够完全的理解素数的奥秘。大数学家欧拉证明了素数具有无穷多个。无数个数学家都对 $\pi(x)$ 作了大量研究,然而始终无法得到其精确的表达形式。黎曼在其唯一的这篇关于素数的研究论文中,给出了 $\pi(x)$ 的具体形式^[69-70]。

如果将黎曼零点带入这个形式,则可以得到 $\pi(x)$ 。带入的黎曼非平凡零点越多,则得到的 $\pi(x)$ 越准确。如果黎曼猜想为真,则人们关于 $\pi(x)$ 的一些近似形式能够得到最优的误差估计。因此,黎曼猜想在数学上具有很重要的意义。

在物理学中,黎曼零点也与一些问题密切相关。波利亚(George Pólya)首先提出了一个猜想,即如果能将黎曼零点与一个厄米算符的本征值一一对应,由于厄米算符的本征值必然是实数,则可以自然地证明黎曼猜想。受到当时蓬勃发展的量子力学的影响,波利亚认为,可以找到一个量子系统,其哈密顿量(厄米算符)的本征值与黎曼零点一一对应,这称为波利亚-希尔伯特猜想(Pólya-Hilbert conjecture, PHC)^[71-73]。这个猜想的提出在当时并未受到过多的关注。直到上世纪七十年代,蒙哥马利(Hugh Lowell Montgomery)发现黎曼零点十分符合高斯酉系综(Gaussian unitary ensemble, GUE)的统计^[72,74],此时PHC才得到人们的重视。上世纪八十年代,人们测试了在第 10^{20} 个零点附近的 10^5 个零点时发现黎曼零点的统计规律相对于GUE只有少许的偏差,更进一步地支持了PHC。随后贝里(Michael Berry)和其合作者基廷(Jonathan Keating)使用量子混沌理论研究黎曼函数,并提出了提出 E_n 实际上是量子混沌系统哈密顿量的本征值^[75-77]。在该系统的经典版本中,其孤立周期轨道的周期为质数的对数。虽然人们对这类静态哈密顿量的方法进行了大量的研究^[78-87],但是至今没有一个决定性的答案,更没有找到在一个在实验上可以实现的哈密顿量。

2015年,物理学家克里菲尔德(Charles Creffield)和谢拉(German Sierra)提出了一种特别的方法——准静态哈密顿量。在周期性的哈密顿量驱动下,系统可以用Floquet理论来描述。该系统的动力学演化分为两个方面。其一,在单个周期内,系统呈现出快速变化的动态特征。其二,在整数个周期的节点,系统又呈现出缓慢的均匀的演化轨迹,而且该演化的速度取决于该系统的准能量(Quasi-energy)。正是因为这类系统同时表现出动态和静态哈密顿量的特征,因此被称为准静态的方法。我们可以类似于静态哈密顿量的方法,来寻找黎曼零点^[68]。在PHC中,黎曼零点与静态哈密顿量的能谱对应。但在周期性驱动的系统,其中黎曼零点与准能量(Quasi-energy)的简并点一一对应。也就是说,当系统的控制参数为黎曼零点时,系统的准能量发生了简并,于是不再随着整数周期演化,整个系统似乎被冻结了一般。我们可以设计一种驱动函数,使得只在黎曼零点到来时,系统发生“冻结”。使用这种方法,则可以在实验上测量黎曼函数零点。我们在实验上使用离子阱囚禁单个量子比特,利用周期性的驱动该量子比特的演化,定位到了黎曼函数的第一个零点和波利亚函数的前两个零点。实验上得到的结果与理论值吻合。本文的工作提供了第一个在量子系统中测量黎曼零点的实验研究,将对于寻找黎曼函数和量子系统之间的关联提供新的思路。

1.5 文章结构

本文的结构如下:

第二章主要介绍 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的性质和能级结构, 激光与原子的相互作用, 以及离子阱系统的基本原理。

第三章主要介绍新型高通光刀片阱的设计思想、基本结构, 以及加工、制作、组装和超高真空的制备。

第四章主要介绍新型高通光刀片阱的测试工作, 包括螺旋谐振腔、激光光路的设计和搭建、激光频率的稳定、成像系统、电子控制, 以及捕获离子和测试。

第五章主要介绍使用 Floquet 方法, 在单个囚禁离子上实现黎曼函数零点的观测实验。

第六章主要介绍总结和展望。

第2章 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子与离子阱

Paul 型离子阱是一种使用使用射频电场提供径向束缚能力，使用静电场提供轴向束缚能力的装置。离子的能级提供了丰富的操作空间，可以实现冷却、初始化、和荧光探测等基础操作。被囚禁的离子作为量子比特的载体，可与激光相互作用实现对量子比特的操控。本章我们介绍所使用的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的性质、以及和激光的相互作用、以及离子阱的基本原理。

2.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子

本节介绍 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的性质和能级结构，和操作 $^{171}\text{Yb}^+$ 所需的激光。

可用于量子比特编码的离子必须具备以下特征：1，离子的电子能级具备封闭的冷却回路，确保多普勒冷却的持续进行；2，能够高效地将离子制备到基态能级，确保初始化的高保真度；3，离子的某个二能级系统可以作为量子比特，在激光或微波的作用下实现拉比振荡；4，离子的二能级系统具备足够长的相干时间，并远大于操作的时间；5，该二能级系统的某个能级能够被高效读取。6，离子能够稳定存在。人类发现的 118 种元素中（94 种自然存在），满足上述要求的且已经被使用的离子有十几种，分别为 Be^+ ， Mg^+ ， Ca^+ ， Sr^+ ， Ba^+ ， Ra^+ ， Cd^+ ， Hg^+ ，和 Yb^+ ^[88]。其中处于镧系的 Yb^+ 是当前用于离子阱中质量最大的离子。上述离子具有各自的优势和劣势。选择哪种离子作为量子比特的载体决定了离子阱的参数和激光器的选择。

本工作中选择的是 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子。镱为第 70 号元素，具有 7 种稳定的同位素，分别为： ^{168}Yb (0.126 %)， ^{170}Yb (3.023 %)， ^{171}Yb (14.216 %)， ^{172}Yb (21.754 %)， ^{173}Yb (16.098 %)， ^{174}Yb (31.896 %) 和 ^{176}Yb (12.887 %)。其上标表示原子相对质量，例如 ^{171}Yb 的原子质量为 171 u (1 u $\approx$ 1.660540 kg)。

2.1.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 能级结构

^{171}Yb 原子有两个最外层电子， $^{171}\text{Yb}^+$ 离子由 ^{171}Yb 从原子状态剥离其中一个电子得到。 $^{171}\text{Yb}^+$ 中用于多普勒冷却的 $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$ 的跃迁波长为 369.5 nm。该波长的激光可以使用半导体激光器直接获得，也可以通过 739 nm 的激光倍频获得。由于 $^{171}\text{Yb}^+$ 存在 1/2 的核自旋，其超精细结构中的两个能级 $|0\rangle \equiv ^2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ 和 $|1\rangle \equiv ^2S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ 构成了一组钟态能级，工作中的两个量子状态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 就编码在这组钟态能级上。该能级跃迁频率为 $12642812118.5 + \delta$ Hz，其中 $\delta = (310.8)\text{B}^2$ ，B 为单位为高斯的磁感应强度。因

此跃迁对外磁场一阶不敏感，可以具有很长的 T_2 时间。该钟态能级的上能级具有相当长的寿命，几乎不会自发辐射，因此具有很长的 T_1 时间。该量子比特的操作可使用微波或激光来实现。如图2.1所示， $^{171}\text{Yb}^+$ 的多普勒冷却所需激光分别为 369.5 nm，935 nm 和 638 nm，这些波长的半导体激光器都是比较成熟的商业产品。此外， $^{171}\text{Yb}^+$ 的 $^2S_{1/2}$ 上能级还具有塞曼（Zeeman）能级，其劈裂为 $\omega_{\text{Zeeman}} \simeq 2\pi \times 1.4\text{B MHz}$ ，其中 B 为磁感应强度，单位高斯（1 Gauss=0.0001 T）。

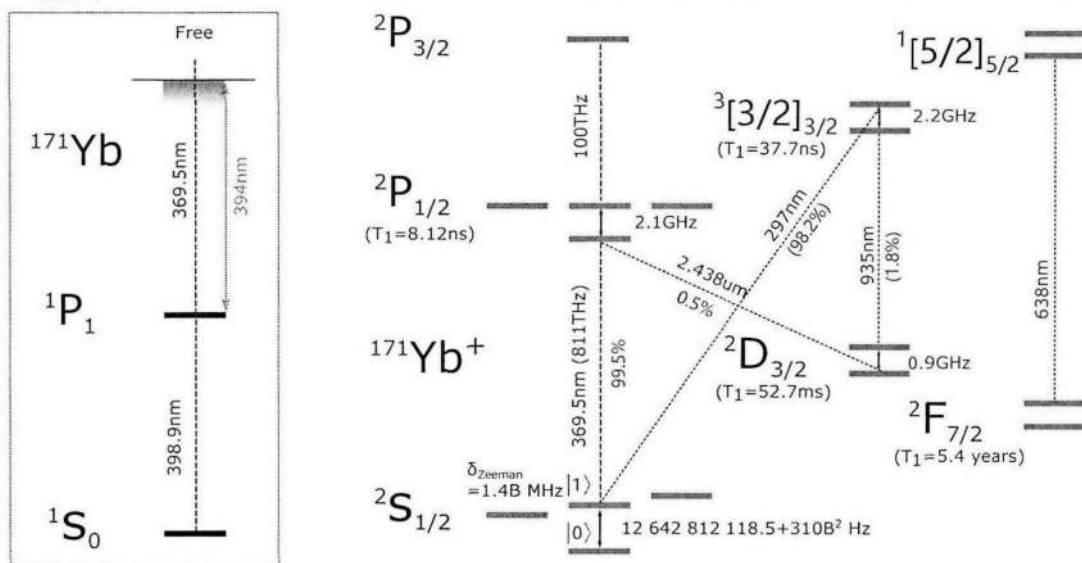


图 2.1 离子化示意图和 $^{171}\text{Yb}^+$ 的能级图（未按比例）。左侧为 ^{171}Yb 原子的离子化示意图。处于基态的 ^{171}Yb 原子受 399 nm 激光激发跃迁至 P 能级，而后在波长短于 394 nm 的激光的照射下即可电离形成 $^{171}\text{Yb}^+$ 。本工作中使用红失谐 200 MHz 的 369 nm 激光完成离子化，并同时冷却离子。右侧为 $^{171}\text{Yb}^+$ 的能级图。量子比特编码在超精细跃迁 $|0\rangle \equiv ^2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ and $|1\rangle \equiv ^2S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ 中，跃迁频率为 $12642812118.5 + (310.8)\text{B}^2 \text{ Hz}$ ，其中磁感应强度 B 单位高斯（Gauss）。由于 $^2P_{1/2}$ 能级有千分之 5 的概率会跃迁到 $^2D_{3/2}$ 能级，因此需要 935 nm（以及 3.7 GHz 的边带）的激光将其泵浦回 $^2S_{1/2}$ 能级。而由于背景气体的碰撞，离子有可能会进入寿命长达 5.1 年的 $^2F_{7/2}$ 能级，因此需要 638 nm 将其泵浦回高能级后，自发辐射到 S 能级。

2.1.2 $^{171}\text{Yb}^+$ 的多普勒冷却

热原子经双光子过程离子化成为离子。此时离子的温度在 200 摄氏度以上，速度在几百米每秒，具有较大的动能。如果没有冷却，该离子将迅速飞跃离子阱中心而难以囚禁。使用多普勒冷却技术可以将该离子的速度降低，并在被势阱捕获后迅速冷却到稳定囚禁状态。

由于多普勒效应，离子所感受到的激光频率是依赖于运动方向的。当使用红失谐的激光照射离子时，如果离子与激光波矢同向运动，离子所感受到激光失谐增加，发生吸收光子和自发辐射的概率减小；当离子与激光波矢反向运动时，失

谱减少更接近共振, 则发生吸收光子和自发辐射的概率增加。经过一段时间后, 由于吸收光子造成的离子动量改变平均不为 0。而自发辐射光子的方向是各向同性的, 在发生大量散射后, 由于自发辐射光子而造成的离子动量变化平均值为 0。因此, 多次吸收和发射光子的平均结果是离子在激光波矢方向有一个动量减小量。这就产生了冷却的效果。不同于使用正交的三束激光冷却原子, 由于离子在势阱中做周期运动, 只需要一束冷却激光即可实现多普勒冷却。这要求该激光波矢在离子的三个运动模式方向都有分量。

实现多普勒冷却的重要条件是散射率足够高, 因此本工作中使用的是 $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$ 能级跃迁。 $^2P_{1/2}$ 能级的寿命只有 8.12 ns, 自发辐射速率为 $2\pi \times 19.6$ MHz, 离子吸收光子后会迅速自发辐射。由于 $^2P_{1/2}$ 能级的 $F = 1$ 的能级与 $F = 0$ 的能级相距只有 2.1 GHz, 离子很容易非共振跃迁至 $^2P_{1/2}, F = 1$ 能级, 而后自发辐射至暗态 $|0\rangle \equiv ^2S_{1/2} |F = 0, m_F = 0\rangle$, 进而中断冷却。因此, 369.5 nm 的冷却光需要经过 14.7 GHz 的 EOM 调制, 其边带将离子重新泵浦回多普勒冷却的循环。由于 $^2P_{1/2}$ 能级约有千分之 5 的概率会跃迁到 $^2D_{3/2}$ 能级, 因此需要 935.18 nm 的激光将其泵浦回 $^2S_{1/2}$ 能级。同样地, 由于 D 能级的其他能级的存在, 935 nm 的激光也需要添加 3.7 GHz 的 EOM 调制边带来将其泵浦回冷却循环。而由于背景气体的碰撞, 离子有可能会进入寿命达 5.1 年的 $^2F_{7/2}$ 能级, 因此需要 638 nm 泵浦光将其泵浦回高能级后, 自发辐射到 S 能级。该 638 nm 激光可以设置为扫描频率的状态, 使得不同子能级都能够被泵浦。当然, 使用 760 nm 的激光 (加 5.25 GHz 的边带) 也可以激发 $^2F_{7/2}(F = 3) \leftrightarrow ^1[3/2]_{3/2}(F = 1)$ 和 $^2F_{7/2}(F = 4) \leftrightarrow ^1[3/2]_{3/2}(F = 2)$ 的跃迁, 使冷却继续。

实验上, 由于离子初始速度较大, 需要使用大失谐的冷却光来冷却。因此离子化光中的 369.5 nm 的激光红失谐 200 MHz。在离子被囚禁在势阱中后, 另一束红失谐 10 MHz 的冷却光将其进一步冷却。由于 $^2S_{1/2}(F = 1)$ 的能级具有三个塞曼能级, 在冷却光作用下容易陷入相干布居的暗态而停止冷却^[89], 所以需要将离子置于一个弱磁场中。对于磁场大小的讨论, 请参考文献^[90]。其中给出了最优磁场大小的参考值为 6 高斯 (Gauss)。由于塞曼能级的存在, 离子从 P 能级自发辐射后, 有三分之一的概率会落入 $m = \pm 1$ 的塞曼能级, 因此冷却光需要具有 $\sigma_{\pm}$ 和 π 光的偏振分量, 使用线偏光和一个二分之一波片即可完成。

2.1.3 $^{171}\text{Yb}^+$ 的初始化和态制备

使用光学泵浦的方法可以快速将离子制备到基态 $|0\rangle$ 。如图 2.2 所示, 冷却光关闭, 935 nm 和 638 nm 激光长开, 一束 369.5 nm 的近共振激光经过 2.1 GHz 的 EOM 调制, 将处于 $^2S_{1/2}(F = 1)$ 的电子全部经 $^2P_{1/2}(F = 1)$ 跃迁到 $^2S_{1/2}(F = 0)$ 。在几十微秒内, 即可以获得 99% 以上的初态保真度。

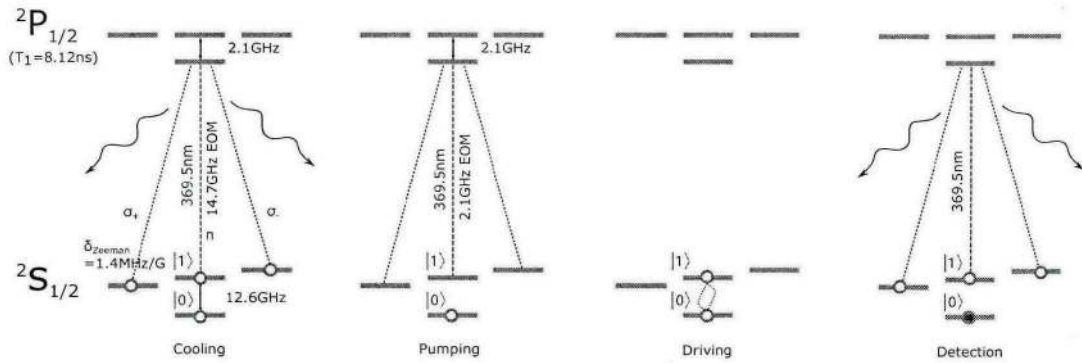


图 2.2 $^{171}\text{Yb}^+$ 的冷却、泵浦、操作和测量示意图。图中省略了长开的 935 nm 和 638 nm 激光，只保留 369.5 nm。冷却时，只需要一束红失谐 10 MHz 的冷却光，并经过 14.7 GHz 的 EOM 调制，将落入 $^2S_{1/2}$, $F=1$ 的状态泵浦回冷却循环。该冷却光的偏振需要包含 $\sigma_{\pm}$ 和 π 三个分量。关闭冷却光，打开含有 2.1 GHz 边带的泵浦光，可以将离子的上能级全部泵浦到下能级 $|0\rangle$ 态。使用微波或者拉曼激光，则可以驱动量子比特的演化。最后开启探测光，收集离子发出的光子，可以实现荧光探测。当量子态坍缩到 $|1\rangle$ ，则能够探测到多个光子，而如果坍缩到 $|0\rangle$ ，则没有光子发出。

当完成初始化后，关闭所有 369.5 nm 的激光。然后使用微波或者激光与离子相互作用，驱动量子比特的演化。

2.1.4 $^{171}\text{Yb}^+$ 的态探测

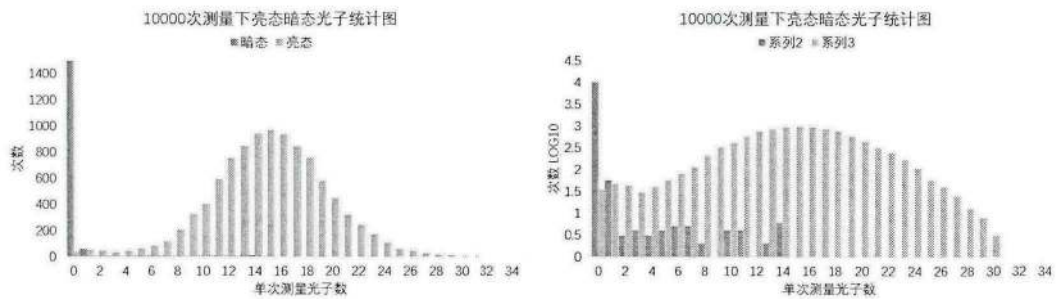


图 2.3 暗态和亮态探测光子数。左图：分别制备暗态 $|0\rangle$ 和亮态 $|1\rangle$ 各 10000 次，并测量 $|1\rangle$ 态，记录所发出的光子数。可见暗态 98.5 % 的光子数为 0，而亮态的光子数为中心值为 16 的泊松分布。右图：将左侧数据的纵坐标取对数坐标。因此，可以选择两个光子数作为区分暗态和亮态阈值。

在量子比特结束演化之后，需要使用荧光探测技术读取量子态^[91-93]。该探测过程是破坏性的测量。此时，935 nm 和 638 nm 激光长开，一束 369.5 nm 的近共振激光照射到离子上，引发量子态发生坍缩。如果量子态坍缩到 $|1\rangle$ 态，则离子将在探测光的作用下发生 $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$ 能级跃迁而释放光子，称之为亮态；反之，如果坍缩到 $|0\rangle$ 态，则没有受激跃迁和自发辐射，称之为暗态。由于非共振跃迁到 $^2P_{1/2}(F=1)$ 能级，亮态的探测过程会停止而后没有光子发出，因此亮

态探测时发出的光子数目是远少于冷却时的。实验上观测到的是中心在 10 到 20 内的泊松分布，而暗态的光子数集中在 0 和 1，如图2.3所示。

2.2 激光与离子相互作用

本小节简要介绍原子与光场相互作用。对于 $^{171}\text{Yb}^+$ 来说，可以使用微波、连续光和脉冲光来操作量子比特。虽然作用原理有区别，但处理形式是一致的。例如，微波与原子相互作用，可以从原子磁矩 $\vec{\mu}$ 与微波的磁场强度 $\vec{B}$ 相互作用出发。而激光与原子相互作用，可以从原子电偶极矩 $\vec{d}$ 与激光的电场强度 $\vec{E}$ 的相互作用出发。因此本节以激光与离子相互作用为例，介绍如何实现单离子和多离子的操作。

首先考虑二能级系统，电偶极矩为

$$\vec{d} = e\vec{r} = \sum_{mn} |m\rangle \langle n| \langle m| e\vec{r} |n\rangle \quad (2.1)$$

其中, $m, n = 0, 1, \dots, e$ 表示单位电荷。由于奇偶对称性可知^[94], $\langle 0|\vec{r}|0\rangle = \langle 1|\vec{r}|1\rangle = 0$ 。因此

$$\vec{d} = d_{01} |0\rangle \langle 1| + d_{01}^* |1\rangle \langle 0| \quad (2.2)$$

其中, $d_{mn} = \langle m| e\vec{r} |n\rangle$, $d_{mn}^* = d_{nm} = \langle n| e\vec{r} |m\rangle$ 。激光的电场强度可以表示为

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \hat{e}\mathcal{E} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi) \\ &= \hat{e}\mathcal{E} \frac{1}{2} (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中, $\hat{e}$ 表示激光偏振方向, $\mathcal{E}$ 表示电场强度幅度, $\vec{k}$ 表示激光波矢, $\vec{r}$ 表示离子的位置, ω 表示激光频率, ϕ 表示激光的相位。激光与离子相互作用的总哈密顿量可以表示为

$$H = H_0 + H_{int} \quad (2.4)$$

其中, H_{int} 表示相互作用部分。参考 Marlan O. Scully 的《量子光学》第五章，

$$\begin{aligned} H_{int} &= \vec{d} \cdot \vec{E} \\ &= \frac{1}{2} d_{01} \hat{e} \mathcal{E} |0\rangle \langle 1| (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)} \\ &\quad + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)}) + H.c. \end{aligned} \quad (2.5)$$

定义单光子拉比频率 $g_{mn} = \frac{d_{mn} \hat{e} \mathcal{E}}{\hbar}$ ，则有

$$\begin{aligned} H_{int} &= \frac{\hbar}{2} g_{01} |0\rangle \langle 1| (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)} \\ &\quad + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)}) + H.c. \end{aligned} \quad (2.6)$$

原子本身的哈密顿量可以表示为

$$\begin{aligned} H_0 &= H_{atom} + H_{motion} \\ &= \sum_{m=0,1} \hbar\omega_m |m\rangle\langle m| + H_{motion} \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中, H_{motion} 表示离子的运动哈密顿量, 暂时不考虑其细节。

将上述式子扩展到 N 能级系统, 其中只有一个上能级 $|e\rangle$, $N-1$ 个下能级 $|m\rangle$, $m = 0, 1, \dots, N-2$, 且每个下能级 $|m\rangle$ 都与 $|e\rangle$ 通过光场 $\vec{E}_m = \hat{e}_m \mathcal{E}_m \cos(\vec{k}_m \vec{r} - \omega'_m t + \phi_m)$ 相互作用, 其中 $\hat{e}_m$ 表示第 m 个激光电场偏振方向, $\mathcal{E}_m$ 表示第 m 个激光的电场幅度, ω'_m 表示第 m 个激光的频率, $\vec{k}_m$ 为第 m 个激光的波矢, ϕ_m 为第 m 个激光的相位, $\vec{r}$ 表示离子位置。电偶极矩变为

$$\begin{aligned} \vec{d} &= e\vec{r} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} |m\rangle\langle e| \langle m| e\vec{r} |e\rangle + H.c. \end{aligned} \quad (2.8)$$

约定求和 $\sum_m$ 是对于所有参与相互作用的 N 个能级求和 (即使上能级 $|e\rangle$ 对应的项为 0, 也将其包括在求和中), 则

$$\begin{aligned} H_{int} &= \sum_m |m\rangle\langle e| d_{me} \hat{e}_m \mathcal{E}_m \cos(\vec{k}_m \vec{r} - \omega'_m t + \phi_m) + H.c. \\ &= \sum_m \frac{\hbar}{2} g_{me} (e^{i(\vec{k}_m \vec{r} - \omega'_m t + \phi)} + e^{-i(\vec{k}_m \vec{r} - \omega'_m t + \phi)}) |m\rangle\langle e| + H.c. \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中, $d_{ee} = 0$, $g_{ee} = 0$ 。实际上这里存在一个问题, 即假设了第 m 个光场只耦合 $|m\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 跃迁而与其他下能级无关。这是由于在很多系统中, 下能级之间的能级差在几个到几十个 GHz 的量级, 而耦合强度只有 MHz 的量级。在后期的近似中, 主要的频率为耦合强度, 高频项将会被省略掉。

$$\begin{aligned} H_{atom} &= \sum_m \hbar\omega_m |m\rangle\langle m| \\ &= \sum_m \hbar\omega_e |m\rangle\langle m| + \sum_m \hbar(\omega_m - \omega_e) |m\rangle\langle m| \\ &= \hbar\omega_e \mathbb{I} - \sum_m \hbar\omega_{em} |m\rangle\langle m| \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中, $\omega_{em} = \omega_e - \omega_m$ 表示原子能级 $|e\rangle$ 和 $|m\rangle$ 间的频率差, 舍去常数项 (相当于改变能量零点的位置), 得到

$$H_{atom} = - \sum_m \hbar\omega_{em} |m\rangle\langle m| \quad (2.11)$$

进一步的处理需要用到旋转坐标系进入不同的表象, 即对 H 进行么正变换 U 。这种变换是灵活多变的, 根据不同的问题选择不同的坐标系, 可以得到更简

单, 有更明确物理意义的哈密顿量。但是, 不管选择什么坐标系, 都不会改变实际的物理过程, 也不会改变对可观测量的测量结果, 如某个物理量的期望值。 U 的选择可以有很多种, 一般的形式是

$$U = e^{-i \sum_m \nu_m |m\rangle \langle m| t} \quad (2.12)$$

其中, ν_m 表示在 U 在第 m 个对角元上的旋转频率, 可以记为 ν_m 。 U 在 Taylor 展开后得到

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i \sum_l \nu_l |l\rangle \langle l| t)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_m (-i \nu_m t)^n |m\rangle \langle m|}{n!} \\ &= \sum_m \sum_n \frac{(-i \nu_m t)^n}{n!} |m\rangle \langle m| \\ &= \sum_m e^{-i \nu_m t} |m\rangle \langle m| \end{aligned} \quad (2.13)$$

且 $U^\dagger = \sum_m e^{i \nu_m t} |m\rangle \langle m|$ 。

旋转之后的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_{rot} &= U H U^\dagger - i \hbar U \dot{U}^\dagger \\ &= U H_0 U^\dagger - i \hbar U \dot{U}^\dagger + U H_{int} U^\dagger \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中

$$\begin{aligned} i \hbar U \dot{U}^\dagger &= i \hbar \left(\sum_m e^{-i \nu_m t} |m\rangle \langle m| \right) \left(\sum_n i \nu_n e^{i \nu_n t} |n\rangle \langle n| \right) \\ &= i \hbar \sum_m \sum_n e^{-i \nu_m t} |m\rangle \langle m| i \nu_n e^{i \nu_n t} |n\rangle \langle n| \\ &= - \sum_m \hbar \nu_m |m\rangle \langle m| \end{aligned} \quad (2.15)$$

H_{atom} 的部分与 U 对易, 因此不变,

$$\begin{aligned} U H_{atom} U^\dagger &= \sum_m e^{-i \nu_m t} |m\rangle \langle m| \left(- \sum_n \hbar \omega_{en} |n\rangle \langle n| \right) \sum_k e^{i \nu_k t} |k\rangle \langle k| \\ &= \sum_m -\hbar \omega_{em} |m\rangle \langle m| \\ &= H_{atom} \end{aligned} \quad (2.16)$$

而运动部分与 U 也对易, 因此

$$U H_{motion} U^\dagger = H_{motion} \quad (2.17)$$

所以静态哈密顿量部分不变

$$U H_0 U^\dagger = H_0 \quad (2.18)$$

总哈密顿量变为

$$H_{rot} = \hbar \sum_m (\nu_m - \omega_{em}) |m\rangle \langle m| + U H_{int} U^\dagger \quad (2.19)$$

再看相互作用的部分，首先

$$\begin{aligned} U H_{int} &= \sum_m e^{-i\nu_m t} |m\rangle \langle m| \left(\sum_n \frac{\hbar}{2} g_{ne} (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_n t + \phi)} \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_n t + \phi)}) |n\rangle \langle e| + H.c. \right) \\ &= \sum_m e^{-i\nu_m t} \frac{\hbar}{2} g_{me} (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_m t + \phi)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_m t + \phi)}) |m\rangle \langle e| \\ &\quad + \sum_n e^{-i\nu_e t} \frac{\hbar}{2} g_{ne} (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_n t + \phi)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_n t + \phi)}) |e\rangle \langle n| \end{aligned} \quad (2.20)$$

然后得到

$$\begin{aligned} U H_{int} U^\dagger &= \sum_m e^{-i\nu_m t} \frac{\hbar}{2} g_{me} (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_m t + \phi)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_m t + \phi)}) e^{i\nu_e t} |m\rangle \langle e| \\ &\quad + \sum_n e^{-i\nu_e t} \frac{\hbar}{2} g_{ne} (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_n t + \phi)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_n t + \phi)}) e^{i\nu_n t} |e\rangle \langle n| \\ &= \sum_m e^{i(\nu_e - \nu_m)t} \frac{\hbar}{2} g_{me} (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_m t + \phi)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_m t + \phi)}) |m\rangle \langle e| + H.c. \end{aligned} \quad (2.21)$$

此时，选择合适的旋转坐标系的参数 ν_m ，则可进一步简化上述表达式。例如，选择进入激光频率的旋转坐标系 $\{\nu_m = \omega'_m, \nu_e = 0\}$ ，则

$$e^{i(\nu_e - \nu_m)t} (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_m t + \phi)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_m t + \phi)}) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - 2\omega'_m t + \phi)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} + \phi)} \quad (2.22)$$

其中， $e^{i(\vec{k}\vec{r} - 2\omega'_m t + \phi)}$ 项是高频项。在微分方程求解中，高频项的积分在时间上近似为 0。因此应用旋波近似 (Rotating wave approximation, RWA) 可将其忽略，只保留低频项 $e^{-i(\vec{k}\vec{r} + \phi)}$ ，则有

$$U H_{int} U^\dagger = \sum_m \frac{\hbar}{2} g_{me} e^{-i(\vec{k}\vec{r} + \phi)} |m\rangle \langle e| + H.c. \quad (2.23)$$

而总哈密顿量的另一部分可以化简为

$$\begin{aligned} U H_0 U^\dagger - i\hbar U \dot{U}^\dagger &= \sum_m -\hbar \omega_{em} |m\rangle \langle m| + \sum_m \hbar \nu_m |m\rangle \langle m| + H_{motion} \\ &= \sum_m \hbar (\omega'_m - \omega_{em}) |m\rangle \langle m| + H_{motion} \\ &= \sum_m \hbar \Delta_m |m\rangle \langle m| + H_{motion} \end{aligned} \quad (2.24)$$

其中, $\Delta_m = \omega'_m - \omega_{em}$ 表示激光频率相对于原子共振跃迁的失谐频率。因此,

$$H_{rot} = H_{motion} + \sum_m \hbar \Delta_m |m\rangle \langle m| + \left(\sum_m \frac{\hbar}{2} g_{me} e^{-i(\vec{k}\vec{r} + \phi)} |m\rangle \langle e| + H.c. \right) \quad (2.25)$$

定义 $\Omega_m = g_{me} e^{-i(\vec{k}\vec{r} + \phi)}$ 为复数拉比频率, 最终得到

$$H_{rot} = H_{motion} + \sum_m \hbar \Delta_m |m\rangle \langle m| + \left(\hbar \sum_m \frac{\Omega_m}{2} |m\rangle \langle e| + H.c. \right) \quad (2.26)$$

选择其他的表象 v_m 可以得到在其他的旋转坐标下的哈密顿量, 但物理量的期望值不会改变。

2.2.1 EIT 冷却

式2.26有诸多应用, 例如可以用于分析电磁诱导透明 (Electromagnetically-induced-transparency, EIT) 效应, 并计算在 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子上实现二者具有相同的推导形式, 实现 EIT 冷却的条件。

为了统一, 定义 $|m\rangle$ 的矩阵表示为 $N \times 1$ 的列矩阵, 其第 $m+1$ 列为 1, 其余元素为 0, 例如

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

考虑三能级系统, r 代表强的耦合光, 耦合 $|m=0\rangle$ 与 $|e\rangle$ 能级, g 代表弱的探测光, 耦合 $|m=1\rangle$ 与 $|e\rangle$ 能级。除了前述的相互作用哈密顿量 H ,

$$H = \hbar \begin{bmatrix} \Delta_r & 0 & \frac{\Omega_r}{2} \\ 0 & \Delta_g & \frac{\Omega_g}{2} \\ \frac{\Omega_r^*}{2} & \frac{\Omega_g^*}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

还应包括上能级的自发辐射耗散过程来完成 EIT 冷却的循环, 因此需要使用主方程来描述整个过程

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + \mathbf{L}\rho \quad (2.29)$$

其中, $\mathbf{L}\rho$ 为 Lindblad 算符, $\mathbf{L}\rho = \sum_j (b_j \rho b_j^\dagger - \frac{1}{2} \{b_j^\dagger b_j, \rho\})$, 其中 $b_j = \sqrt{\Gamma/3} |j\rangle \langle e|$, 密度矩阵算符为

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{rr} & \rho_{rg} & \rho_{re} \\ \rho_{gr} & \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{er} & \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

该主方程有 5 个独立方程，再加上 $\rho_{ee} + \rho_{rr} + \rho_{rr} = 1$ 共计 6 个。稳态解 $\frac{d\rho}{dt} = 0$ 有解析解为：

$$\rho_{ee} = \frac{4\Delta^2\Omega_g^2\Omega_r^2\Gamma}{D} \quad (2.31)$$

其中

$$D = 8\Delta^2\Omega_r^2\Omega_g^2\Gamma + 2\Delta^2\Gamma^3\Omega^2 - 4\Delta_g\Delta\Omega_r^4\Gamma + \frac{1}{2}\Omega^6\Gamma + 8\Delta^2\Gamma(\Delta_r^2\Omega_g^2 + \Delta_g^2\Omega_r^2) + 4\Delta_r\Delta\Omega_g^2\Gamma \quad (2.32)$$

其中， $\Omega = \sqrt{\Omega_g^2 + \Omega_r^2}$ ， $\Delta = \Delta_g - \Delta_r$ [95]。这就是 Fano 线型的散射率曲线。上述的主方程也可以使用数值求解，一个例子如图 2.4 所示。

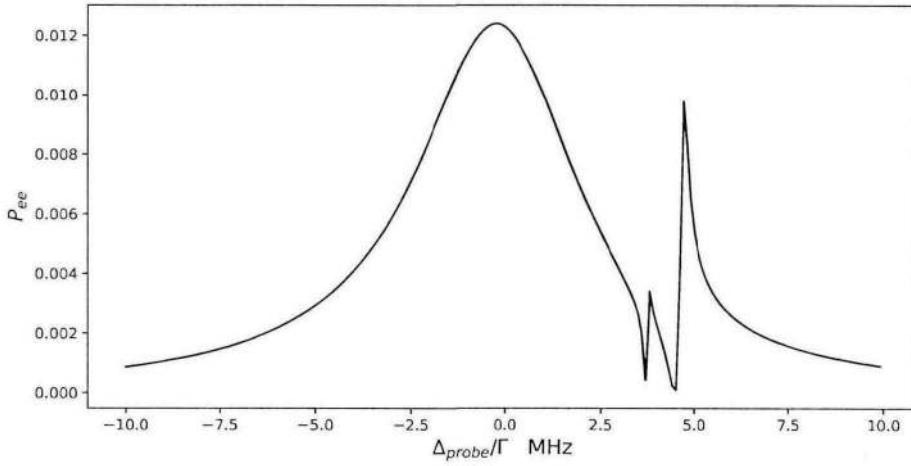


图 2.4 EIT 冷却的 Fano 线型。 $^{171}\text{Yb}^+$ 的 EIT 冷却中散射率随探测光失谐量的变化为 Fano 线型。参数如下：上能级线宽为 Γ ，耦合光和另一束耦合光的失谐分别为 $\Delta_r = 4.47\Gamma$ 和 $\Delta_{-1} = 3.69\Gamma$ ，探测光、耦合光和另一束耦合光的耦合强度分别为 $\Omega_0 = 0.35\Gamma$ ， $\Omega_0 = 2.0\Gamma$ ， $\Omega_0 = 0.7\Gamma$ 。图中在探测光的失谐等于 $\Delta_g = \Delta_r = 4.47\Gamma$ 时，本应发生的载波跃迁被抑制为 0。而红失谐在 $0 \sim 0.23\Gamma$ 范围内的散射率都大于对应的蓝失谐散射率。因此，处于该范围内的运动模式都可以被冷却。

多普勒冷却的极限是加热和冷却速率的竞争，二者相等时达到平衡态，即多普勒极限温度。要进一步降低声子数，需要破坏这种平衡，使得声子减小的速率远大于声子增加的速率。EIT 冷却技术通过一束强的耦合光与原子相互作用，改变弱的探测光的散射率与频率失谐的关系，将原来的洛伦兹线型调制为 Fano 线型。当 $\Delta_{couple} = \Delta_{probe}$ 时，本应发生载波跃迁，但由于电磁诱导透明的存在，散射率接近 0，系统进入相干布居的暗态，因此载波跃迁被大大抑制。而通过调节激光的作用强度和失谐频率，可以使得红边带跃迁对应的频率范围恰好落于 Fano 线型的较高的散射峰内。同时蓝边带跃迁处于宽谱末端，散射率也很低。因

此,红边带的散射率被大大增加而载波和蓝边带的散射率大大被抑制,进一步冷却成为可能。EIT 冷却具有大于边带冷却的谱宽,因此可以同时冷却较宽谱宽的所有运动模式到接近基态。在 $^{40}\text{Ca}^+$ 中很早就实现了 EIT 冷却^[96-97],这是因为其 S 能级上的塞曼能级只有两个,可以使用两束激光耦合到激发态。 $^{171}\text{Yb}^+$ 中由于 S 能级上有三个塞曼能级,情况稍微复杂,其物理过程是一致的。直到 2020 年才首次实现 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的 EIT 冷却^[95]。本文并不包含对 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的 EIT 冷却实验,但在之后的工作中有可能且有必要实现该冷却过程。

2.2.2 边带冷却

另一个十分重要的表象为相互作用表象 (Interaction picture)。从最开始的哈密顿量出发^[23,98], $H = H_0 + H_{int}$, 其中 $H_0 = H_{atom} + H_{motion}$ 。此时,新的么正矩阵变换为 $U = e^{iH_0 t/\hbar} = e^{iH_{atom} t/\hbar + iH_{motion} t/\hbar} = e^{iH_{atom} t/\hbar} e^{iH_{motion} t/\hbar}$ 。很容易得到 $i\hbar U \dot{U}^\dagger = H_0$, $U H_0 U^\dagger - i\hbar U \dot{U}^\dagger = 0$, 因此

$$H_{IP} = U H U^\dagger = U H_I U^\dagger \quad (2.33)$$

根据式2.21, 得到

$$\begin{aligned} H_{IP} = U_m \left(\sum_m e^{i(\nu_e - \nu_m)t} \frac{\hbar}{2} g_{me} (e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_m t + \phi)} \right. \\ \left. + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega'_m t + \phi)}) |m\rangle \langle e| + H.c. \right) U_m^\dagger \end{aligned} \quad (2.34)$$

此时, $\nu_m = \{-\omega_m\}$, $\omega_e - \omega_m = -\omega_{em}$, 式中含有 $\Delta_m = \omega'_m - \omega_{em}$ 的项为低频项, 含有 $\omega_{em} + \omega'_m$ 的项为高频项, 使用旋波近似忽略高频项, 则

$$H_{IP} = U_m \left(\sum_m \frac{\hbar}{2} g_{me} e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \Delta_m t + \phi)} |m\rangle \langle e| + H.c. \right) U_m^\dagger \quad (2.35)$$

为了将上式展开, 现在考虑离子运动, 只考虑一维 z 方向,

$$H_{motion} = \hbar \omega_z a^\dagger a \quad (2.36)$$

其中, ω_z 为 z 方向声子频率, $a^\dagger$ 为声子的产生算符, a 为湮灭算符。含有离子位置的项 $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ 可以对 $\vec{r}$ 泰勒级数展开, 对其每一个级数做变换 $U_m \vec{r}^n U_m^\dagger$ 。考虑到一维坐标算符可以表示为 $z = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_z}}(a + a^\dagger)$, 有

$$\begin{aligned} U_m z^n U_m^\dagger &= (U_m z U_m^\dagger)^n \\ &= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_z}} (a e^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) \right)^n \end{aligned} \quad (2.37)$$

因此

$$\begin{aligned} U_m e^{-i\vec{k}\vec{r}} U_m^\dagger &= \exp(-ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_z}}(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t})) \\ &= \exp(-i\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t})) \end{aligned} \quad (2.38)$$

其中 $\eta = k_z \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_z}}$ 为 Lamb-Dicke 参数。因此,

$$H_{IP} = \sum_m \frac{\hbar}{2} g_{me} e^{i(\Delta_m t - \phi)} \exp(-i\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t})) |m\rangle \langle e| + H.c. \quad (2.39)$$

该结果可以自然地拓展到三维。

在 Lamb-Dicke 极限下, $\eta \ll 1$ (实际上是在声子数 n 足够小, 使得 $\eta\sqrt{\langle(a+a^\dagger)^2\rangle} \ll 1$, 见文献^[98] 式 69-72), 上式对 η 展开保留第一项得

$$\begin{aligned} H_{IP} &= \sum_m \frac{\hbar}{2} g_{em} e^{-i(\Delta_m t - \phi)} [1 + i\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t})] |e\rangle \langle m| \\ &+ H.c. \end{aligned}$$

如果只考虑二能级系统 $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ 与一束激光相互作用, 定义 $|m\rangle = |g\rangle$ 为下能级, $\sigma_+ = |e\rangle \langle g|$, $\sigma_- = |g\rangle \langle e|$ 。上述结果中根据激光与原子能级的失谐量 $\Delta_g = \omega'_g - \omega_{eg}$ 的不同, 可以分为下面的三种情况,

1. 在近共振 $\Delta_g \ll \omega_z$ 时, H_{IP} 中的高频项可以被省略, 则

$$H_{IP} = \frac{\hbar}{2} \Omega (e^{-i(\Delta_g - \phi)} \sigma_+ + e^{i(\Delta_g - \phi)} \sigma_-) \quad (2.40)$$

其中, Ω 为单光子拉比频率。这种情况被称为载波跃迁。载波跃迁是在 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 之间的跃迁, 并不会改变声子态, 其作用强度为 Ω 。

2. 在 $\Delta_g = -\omega_z$ 时, 省略高频项得到

$$H_{IP} = \frac{\hbar}{2} \eta \Omega (a \sigma_+ e^{i\phi} + a^\dagger \sigma_- e^{-i\phi}) \quad (2.41)$$

这种情况被称为红边带跃迁。红边带跃迁是在 $|g\rangle |n\rangle \leftrightarrow |e\rangle |n-1\rangle$ 之间的跃迁, 因此会改变声子状态, 但是其作用强度为 $\Omega_{n,n-1} = \eta \Omega \sqrt{n}$ 。使用红边带操作, 可以将内态与声子态纠缠起来。

3. 在 $\Delta_g = \omega_z$ 时, 省略高频项得到

$$H_{IP} = \frac{\hbar}{2} \eta \Omega (a \sigma_- e^{-i\phi} + a^\dagger \sigma_+ e^{i\phi}) \quad (2.42)$$

这种情况被称为蓝边带跃迁。蓝边带跃迁是在 $|g\rangle |n\rangle \leftrightarrow |e\rangle |n+1\rangle$ 之间的跃迁, 因此也会改变声子状态, 其作用强度为 $\Omega_{n,n+1} = \eta \Omega \sqrt{n+1}$ 。使用蓝边带操作, 也可以将内态与声子态纠缠起来。

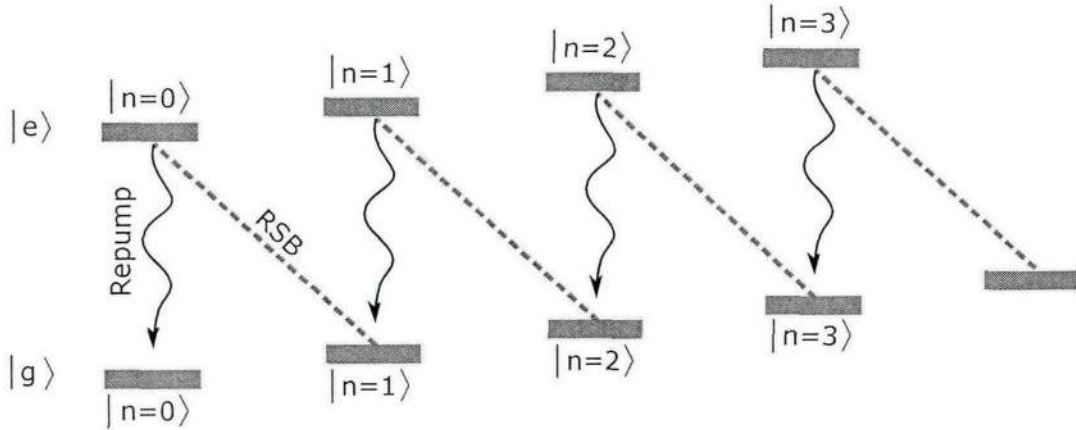


图 2.5 离子的内态-声子能级。离子的二能级系统与粒子的运动状态为独立的自由度，因此其直积态可以画为图中的梯状能级。使用红边带可以驱动 $|g\rangle|n\rangle \leftrightarrow |e\rangle|n-1\rangle$ 的跃迁，在 $|e\rangle|n-1\rangle$ 的状态可以通过光学泵浦的方法跃迁至 $|g\rangle|n-1\rangle$ ，从而每个循环降低一个声子数。在 $^{171}\text{Yb}^+$ 的实验上，该光学泵浦的方法可以直接使用 369.5 nm 的泵浦光（含 2.1GHz 的边带）经过 P 能级跃迁至基态。对于 $^{40}\text{Ca}^+$ 来说，红边带过程可以直接使用 729 nm 的稳频激光操控 S-D 能级的跃迁来实现，而光学泵浦的过程即使用 866 nm 或者 854 nm 的激光将 D 态的状态经过 P 态耗散到 S 能级。

上述结果的一个重要应用是边带冷却技术^[99]。多普勒冷却极限下，仍然存在一定的声子数目。而两比特或者更多比特的纠缠操作，使用的方案要求将离子的某个运动模式冷却到基态^[100]。使用红蓝边带操作，即可完成这一过程，如图2.5所示。

2.2.3 拉曼操作

$^{171}\text{Yb}^+$ 的超精细结构能级劈裂为 12.6 GHz，而激光频率在几百 THz，无法直接驱动。所以可以使用微波来操作。但由于微波的波长达到厘米的量级，其操作声子的能力微乎其微，难以满足多离子纠缠门操作的要求。可行的办法是使用磁场梯度辅助微波纠缠门，但这需要使用缀饰态作为量子比特以抵消磁场带来的消相干^[25,23]。因此需要使用双光子拉曼过程，即使用两束频率差接近 12.6 GHz 的激光来耦合两个超精细能级。

仍然考虑三能级系统 $\{|0\rangle, |1\rangle, |e\rangle\}$ 与两束激光相互作用，如图2.6。其哈密顿量与式2.28相同

$$H = \hbar \begin{bmatrix} \Delta_0 & 0 & \frac{\Omega_0}{2} \\ 0 & \Delta_1 & \frac{\Omega_1}{2} \\ \frac{\Omega_0^*}{2} & \frac{\Omega_1^*}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

其中， $\Delta_0 = \omega'_0 - \omega_{e0}$ 和 $\Delta_1 = \omega'_1 - \omega_{e1}$ 分别表示两束激光与 $|0\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 和 $|1\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 共振跃迁的失谐频率， Ω_0 和 Ω_1 表示两束激光分别与原子的耦合强度。虽然上述哈密顿量可以通过微分方程直接求解（参考文献^[101]4.1.2 节），但稍加分析便可

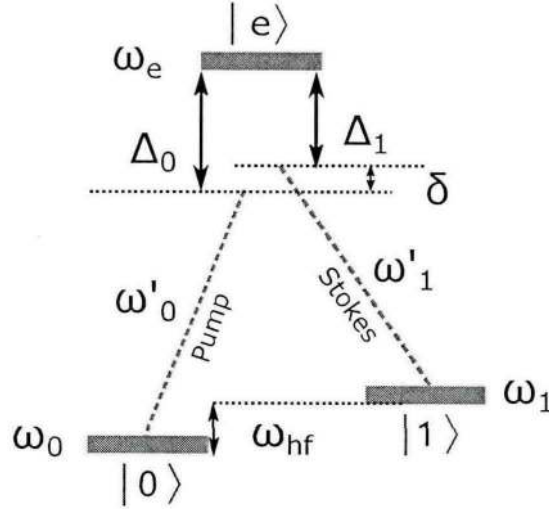


图 2.6 三能级系统的受激拉曼跃迁。

以更容易理解它所表达的物理意义。三个能级中，需要关心的是下面两个能级的布居数随时间的变化。为了降低由于拉曼光引起的自发辐射速率，激光失谐需要远远大于耦合强度，因此上能级的布居数非常小。做出一个假设，即上能级将迅速达到稳态而不再变化，即 $\dot{c}_e = 0$ 。此时，上能级可以使用绝热消除（Adiabatic elimination）的方法从描述中去掉^[102]，并得到有效的二能级系统的哈密顿量。定义 $\Delta = \Delta_0$ 为单光子失谐， $\delta = \Delta_0 - \Delta_1$ 为双光子失谐，即要求 $\Delta \gg \Omega_0, \Omega_1, \delta$ 。进入旋转坐标 $\{-\Delta_0, -\Delta_0, -\Delta_0\}$ 得到

$$H = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Omega_0}{2} \\ 0 & -\delta & \frac{\Omega_1}{2} \\ \frac{\Omega_0^*}{2} & \frac{\Omega_1^*}{2} & -\Delta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

代入 Schrödinger 方程，

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (2.45)$$

令 $|\psi(t)\rangle = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_e \end{bmatrix}$ ，得到

$$\begin{aligned} i\dot{c}_0 &= \frac{\Omega_0}{2} c_e \\ i\dot{c}_1 &= -\delta c_1 + \frac{\Omega_1}{2} c_e \\ i\dot{c}_e &= -\Delta c_e + \frac{\Omega_0^*}{2} c_0 + \frac{\Omega_1^*}{2} c_1 \end{aligned} \quad (2.46)$$

采用绝热消除方法，取 $\dot{c}_e = 0$ ，可以解得

$$c_e = \frac{\Omega_0^*}{2\Delta} c_0 + \frac{\Omega_1^*}{2\Delta} c_1 \quad (2.47)$$

重新带入上式，得到

$$\begin{aligned} i\dot{c}_0 &= \frac{\Omega_0\Omega_0^*}{4\Delta}c_0 + \frac{\Omega_0\Omega_1^*}{4\Delta}c_1 \\ i\dot{c}_1 &= \left(\frac{\Omega_1\Omega_1^*}{4\Delta} - \delta\right)c_1 + \frac{\Omega_1\Omega_0^*}{4\Delta}c_0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

这等效于拉比频率为 $\Omega_R = \frac{\Omega_0\Omega_1^*}{2\Delta}$ ，AC stark 频移为

$$\delta_0 = \frac{\Omega_0\Omega_0^*}{4\Delta} \quad (2.49)$$

$$\delta_1 = \frac{\Omega_1\Omega_1^*}{4\Delta} \quad (2.50)$$

且失谐为 $-\delta$ 的两能级跃迁。即

$$\begin{aligned} i\dot{c}_0 &= \delta_0 c_0 + \frac{\Omega_R}{2}c_1 \\ i\dot{c}_1 &= (\delta_1 - \delta)c_1 + \frac{\Omega_R^*}{2}c_0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

拉曼跃迁的有效拉比频率 Ω_R 可以展开为

$$\begin{aligned} \Omega_R &= \frac{\Omega_0\Omega_1^*}{2\Delta} = \frac{g_0 e^{-i(\vec{k}_0 \vec{r} + \phi_0)} g_1^* e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} + \phi_1)}}{2\Delta} \\ &= \frac{g_0 g_1^*}{2\Delta} e^{i((\vec{k}_1 - \vec{k}_0) \vec{r} + (\phi_1 - \phi_0))} \end{aligned} \quad (2.52)$$

定义双光子波矢 $\Delta\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_0$ ，相位差 $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_0$ ，有

$$\Omega_R = \frac{g_0 g_1^*}{2\Delta} e^{i(\Delta\vec{k} \vec{r} + \Delta\phi)} \quad (2.53)$$

由于激光造成的 AC Stark 频移可以通过改变双光子失谐 $\delta = \delta_1 - \delta_0$ 来补偿，并实现二能级系统之间全部的布居数转移。

上述结论的成立时有条件的，即要求 $\Delta \gg \Omega_0, \Omega_1, \delta$ 。实际上，绝热消除的结果是精确结果的零级近似解，舍去了三个能级的高频振动，只保留了缓变的过程，具有一定的局限性。尤其是在拉曼光不再远失谐的时候，上面的 AC stark 频移不再准确。关于该问题的更多讨论，参考文献^[102-103]。

前面说过，以上的计算建立在一个假设上，即一个激光只将一个下能级耦合到上能级，而与其他下能级没有相互作用。这其实是不准确的，应当考虑另一种可能的耦合情况，激光 ω'_0 会失谐耦合 $|1\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 跃迁，激光 ω'_1 会失谐耦合 $|0\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 跃迁。由于这时双光子失谐大大增加，不会引起双光子跃迁。但是对下能级的 AC Stark 频移的影响是不能忽略的。根据之前的结果直接得到，两种耦

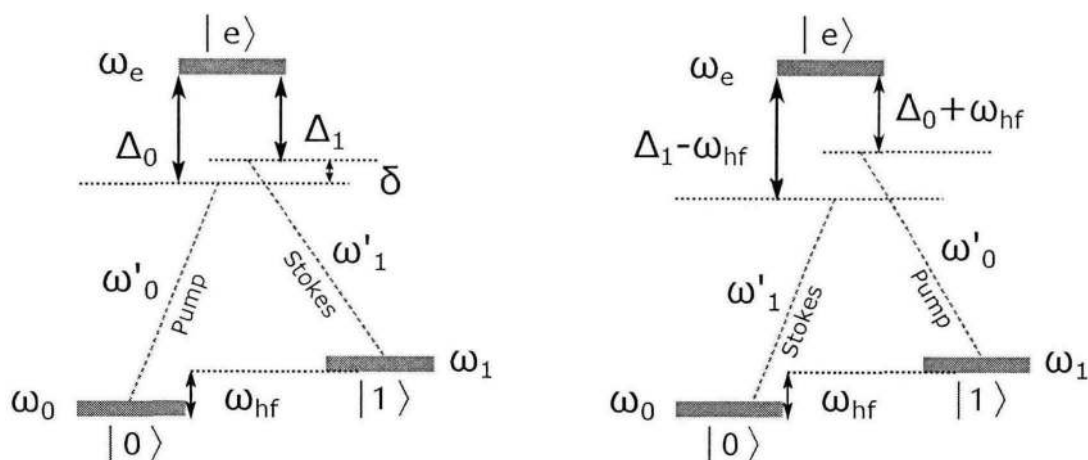


图 2.7 三能级系统的受激拉曼跃迁和交换耦合。

合的总的 AC Stark 频移为

$$\delta_0 = \frac{\Omega_0 \Omega_0^*}{4\Delta_0} + \frac{\Omega_1 \Omega_1^*}{4(\Delta_1 - \omega_{hf})} \quad (2.54)$$

$$\delta_1 = \frac{\Omega_1 \Omega_1^*}{4\Delta_1} + \frac{\Omega_0 \Omega_0^*}{4(\Delta_0 + \omega_{hf})} \quad (2.55)$$

其中，后半部分即交换耦合产生的频移^[104]。可以发现，上面的结果实际就是两个频率的激光分别产生的 AC Stark 频移的叠加。

上述结果表明，使用频率差接近 12.6 GHz 的两束激光，通过上能级辅助的受激拉曼跃迁可以实现 $^{171}\text{Yb}^+$ 中超精细能级 $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ 的翻转。下一小节将计算激光波长与拉比频率的关系。

除了使用连续光，脉冲激光也可以用于该操作。一个典型的例子是使用 355 nm 锁模脉冲激光^[101]。由于 355 nm 的皮秒激光所造成的自发辐射速率和 AC Stark 频移较低，能够实现较高保真度和较高速度的门操作而被经常使用。但是 355 nm 也存在一些缺点，如紫外波长引入的充电现象会导致离子运动状态的不稳定，而且 355 nm 无法经过光纤，否则会导致波前的严重畸变。甚至在空间光的传播中，由于空气的扰动也会导致消相干。皮秒脉冲光的另一个缺点是脉冲之间存在间隔，限制了多个脉冲操作的速度。而使用连续光则能够避免这个问题。随着波长的增加，激光与离子的相互作用强度也会减小，因此要求系统具备高数值孔径，能够将可见光汇聚为更小的光斑，则能够保证操作速度。

2.2.4 拉比频率计算

将上一节的式2.53，式2.54和式2.55扩展到 N 个上能级^[103]，有

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \sum_i \frac{\Omega_{i0}\Omega_{i0}^*}{4\Delta_{i0}} + \frac{\Omega_{i1}\Omega_{i1}^*}{4(\Delta_{i1} - \omega_{hf})} \\ \delta_1 &= \sum_i \frac{\Omega_{i1}\Omega_{i1}^*}{4\Delta_{i1}} + \frac{\Omega_{i0}\Omega_{i0}^*}{4(\Delta_{i0} + \omega_{hf})} \\ |\Omega_R| &= \sum_i \frac{g_0 g_1^*}{2\Delta_{i0}}\end{aligned}\quad (2.56)$$

其中，求和符号针对所有的上能级 $|e_i\rangle$ ， $\Delta_{i0} = \omega'_0 - \omega_{i0}$ 表示第一束激光相对于 $|0\rangle \leftrightarrow |e_i\rangle$ 跃迁频率的失谐， Ω_{i0} 表示第一束激光在 $|0\rangle \leftrightarrow |e_i\rangle$ 跃迁的单光子拉比频率， $\Delta_{i1} = \omega'_1 - \omega_{i1}$ 表示第二束激光相对于 $|1\rangle \leftrightarrow |e_i\rangle$ 跃迁频率的失谐， Ω_{i1} 表示第二束激光在 $|1\rangle \leftrightarrow |e_i\rangle$ 跃迁的单光子拉比频率。

Wavelength Air (nm)	Aki (1/s)	Lower Conf.	Lower Term	Lower J	Upper Conf.	Upper Term	Upper J
152.45	*	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{14}7p$	2P	3/2
156.97	*	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{14}7p$	2P	1/2
211.667	3.41e+08	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{13}(^2F^{\circ}_{5/2})5d6s(^1D)$	$1[1/2]^{\circ}$	1/2
212.674	4.91e+07	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{13}(^2F^{\circ}_{5/2})5d6s(^1D)$	$1[3/2]^{\circ}$	3/2
218.571	3.16e+07	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{13}(^2F^{\circ}_{7/2})5d^2(^3F)$		3/2
222.446	4.79e+07	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{13}(^2F^{\circ}_{5/2})5d6s(^3D)$		3/2
289.138	3.42e+07	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{13}(^2F^{\circ}_{7/2})5d6s(^1D)$	$1[3/2]^{\circ}$	3/2
297.056	2.61e+07	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{13}(^2F^{\circ}_{7/2})5d6s(^3D)$	$3[3/2]^{\circ}$	1/2
347.73	*	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{13}(^2F^{\circ}_{7/2})5d6s(^3D)$	$3[3/2]$	3/2
328.937	1.62e+08	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{14}6p$	2P ^o	3/2
369.419	1.23e+08	$4f^{14}6s$	2S	1/2	$4f^{14}6p$	2P ^o	1/2

表 2.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 中的电偶极矩跃迁 (下能级为 $^2S_{1/2}$)。波长为空气中的波长。

参考文献^[101] 章节 4.1.4, 可以计算 δ_0 , δ_1 和 $|\Omega_R|$ 的数值。不在这里重复该过程的计算, 仅补充说明一点, 该文献只考虑了 $^2P_{1/2}$ 和 $^2P_{3/2}$ 能级, 而实际上能

够满足该拉曼过程的电偶极矩跃迁有更多, 可以在 NIST 提供的资料中找到^[105]。表2.1提供了一个从下能级 $^2S_{1/2}$ 到上能级的电偶极矩跃迁参数表。根据这个表格, 可以对文献^[101] 章节 4.1.4 中的结果进行修正, 结果如图所示。

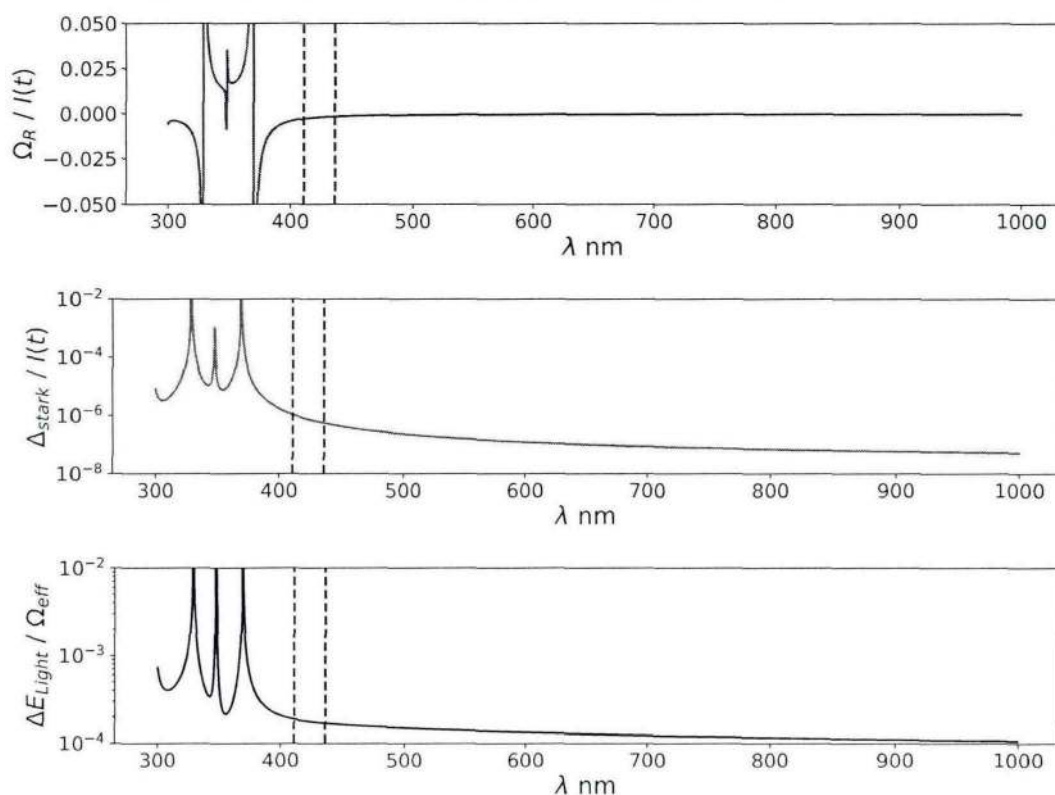


图 2.8 拉比频率、AC Stark 频移及其比例与波长关系。可见在 355 nm 和 375 nm 处不仅具有较强的拉比频率, 而且 AC Stark 频移也相对较低, 因此这两个波长的激光常用于拉曼操作。大于 400 nm 的激光则随着波长的增加而具有越来越弱的作用强度。注意, 此图中没有包含更高阶的跃迁, 例如波长 435.5 nm 在 $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2D_{3/2}$ 和波长为 411 nm 在 $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2D_{5/2}$ 发生的电四极矩跃迁 (图中黑色虚线所指位置)。

利用上述结果可以做一个简单的参数估计。例如 355 nm 的拉比频率为 $|\Omega_{355}| = 0.0179633I(t)$, 580 nm 的拉比频率为 $|\Omega_{580}| = 0.000492I(t)$, 则 $|\Omega_{580}|/|\Omega_{355}| = 0.027$, 意味着达到相同的作用强度, 580 nm 的光强需要是 355 nm 的 37 倍, 这在实验上增加了使用长波长激光来实现拉曼操作的难度。

2.2.5 微波与离子相互作用

由于 $^{171}\text{Yb}^+$ 中的超精细结构能级劈裂为 12.6 GHz, 除了使用上述的激光来实现受激拉曼跃迁, 最简单的办法是使用微波来实现。这里以此说明如何实现量子比特的旋转操作。按照习惯, 这里定义二能级系统为 $|0\rangle \equiv ^2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ 和 $|1\rangle \equiv ^2S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$, 可以用矩阵表示为 $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。任

意量子态都可以写作二者的叠加态, 即 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, 其中 α 和 β 满足 $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ 。定义 Pauli 算符

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

满足 $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$, $\sigma_z = -i\sigma_x\sigma_y$, $\sigma_y = i\sigma_x\sigma_z$, 和 $\sigma_x = -i\sigma_y\sigma_z$, 其中 $\mathbb{I}$ 表示单位矩阵。 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 为 σ_z 的两个本征态, 即

$$\begin{aligned} \sigma_z|0\rangle &= |0\rangle \\ \sigma_z|1\rangle &= -|1\rangle \end{aligned} \quad (2.58)$$

原子的静态哈密顿量为

$$H_{atom} = -\sum \hbar\omega_{10}|m\rangle\langle m| \quad (2.59)$$

其中, $\omega_{10} = \omega_1 - \omega_0$ 与磁场的相互作用哈密顿量为

$$H_{int} = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (2.60)$$

其中, 磁偶极矩为

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \sum_{mn} |m\rangle\langle n| \langle m| \vec{\mu} |n\rangle \\ &= \vec{\epsilon}\mu_{01}|0\rangle\langle 1| + \vec{\epsilon}\mu_{10}|1\rangle\langle 0| \end{aligned} \quad (2.61)$$

其中

$$\mu_{01} = \mu_{10}^* \quad (2.62)$$

磁场强度

$$\vec{B} = \vec{n}B \cos(\Phi(t) + \phi_0) \quad (2.63)$$

其中, $\Phi(t) = \omega_{10}t + F(t)$, $F(t)$ 为相位调制函数, ϕ_0 为微波初始相位。因此

$$\begin{aligned} H_{int} &= (\vec{\epsilon}\mu_{01}|0\rangle\langle 1| + \vec{\epsilon}\mu_{10}|1\rangle\langle 0|)\vec{n}B \cos(\Phi(t) + \phi_0) \\ &= \hbar \begin{bmatrix} 0 & \Omega \cos(\Phi(t) + \phi_0) \\ \Omega^* \cos(\Phi(t) + \phi_0) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.64)$$

其中, $\Omega = \vec{\epsilon}\vec{n}\mu_{01}B/\hbar$, $\Omega^* = \vec{\epsilon}\vec{n}\mu_{10}B/\hbar$ 为拉比频率。选择旋转坐标系

$$\begin{aligned} U &= e^{-i\Phi(t)\sigma_z/2} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i\Phi(t)/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi(t)/2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.65)$$

则变换后的哈密顿量为

$$\tilde{H} = U H U^\dagger - i\hbar U \dot{U}^\dagger \quad (2.66)$$

其中

$$U H U^\dagger = -\hbar \begin{bmatrix} \frac{\omega_{10}}{2} & \Omega \cos(\Phi(t) + \phi_0) e^{-i\Phi(t)} \\ \Omega^* \cos(\Phi(t) + \phi_0) e^{i\Phi(t)} & -\frac{\omega_{10}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

由于 $\cos(\Phi(t) + \phi_0) = (e^{-i\Phi(t) - \phi_0} + e^{i\Phi(t) + \phi_0})/2$, 利用旋波近似省略掉上式中频率为 $2\Phi(t)$ 的项而只保留低频项, 则有

$$U H U^\dagger = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \omega_{10} & \Omega e^{i\phi_0} \\ \Omega^* e^{-i\phi_0} & -\omega_{10} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

因此

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \omega_{10} - \dot{\Phi}(t) & \Omega e^{i\phi_0} \\ \Omega^* e^{-i\phi_0} & -\omega_{10} + \dot{\Phi}(t) \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

使用 Pauli 算符表示为

$$\tilde{H} = \frac{\hbar}{2} [-\Omega \sigma_x + (\dot{\Phi}(t) - \omega_{10}) \sigma_z] \quad (2.70)$$

将 $\Phi(t) = \omega_{10}t + F(t)$ 代入上式, 得到

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar}{2} [\Omega \cos(\phi_0) \sigma_x + \Omega \sin(\phi_0) \sigma_y - f(t) \sigma_z] \quad (2.71)$$

其中, $f(t) = \dot{F}(t)$ 。当 $F(t)$ 为 0 时, 上述哈密顿量对应的旋转操作为,

$$\begin{aligned} U_0(t) &= e^{-i\tilde{H}t/\hbar} \\ &= e^{\frac{i}{2}[\cos(\phi_0)\sigma_x + \sin(\phi_0)\sigma_y]\Omega t} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & ie^{i\phi_0} \sin(\theta/2) \\ ie^{i\phi_0} \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.72)$$

其中, $\theta = \Omega t$ 。在 Bloch 球上, 该矩阵对应的旋转轴为 $\mathbf{n} = (\cos(\phi_0), \sin(\phi_0), 0)$, 旋转角度为 $\theta = \Omega t$ 。使用上述旋转操作, 可以将初始态 $|0\rangle$ 制备到任意的 $|\psi\rangle$,

$$U_0(t)|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ ie^{i\phi_0} \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

因此可以实现态制备。同理, 也可以将任意的 $|\psi\rangle$ 旋转到 $|0\rangle$ 或者 $|1\rangle$ 来完成态测量。在实际的测量中, 由于这里只能区分暗态 $|0\rangle$ 和亮态 $|1\rangle$, 因此对某个投影算符 $|\psi\rangle\langle\psi|$ 的测量需要将其旋转到 $|0\rangle$ 或者 $|1\rangle$ 再进行探测。经过多次试验所得到的概率 $P_{|\psi\rangle}$ 即为该投影算符的测量值。

2.3 Paul 离子阱

只用静电场无法实现将带电粒子束缚在三维空间中。这是由于自由空间中静电场的散度为 0，即 $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla U = -\nabla^2 U = 0$ ，电场不存在三维的极小值或者极大值点。因此带电粒子受力 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ 始终在某个方向不为 0，无法被稳定束缚。这也被称为恩肖定理 (Earnshaw's theorem)。但如果使用交变的电场，则有可能实现对带电粒子的束缚。这种使用交变电场和静电场束缚离子的设备被称为 Paul 型离子阱或者射频离子阱，由 Wolfgang Paul 于 1953 年发明^[7-8]。另一种能够束缚带电粒子阱叫做 Penning 阱，使用均匀的静磁场和交流电场束缚离子。该阱由 Hans Georg Dehmelt 于 1950 年代发明，并以发明真空规的 Frans Michel Penning 的名字来命名该型号的离子阱。Paul 阱和 Penning 阱随后在质谱领域中得到了广泛的应用^[6]，并在后来为人们研究微观粒子提供了束缚手段。因此 Wolfgang Paul 和 Hans Georg Dehmelt 分享了 1989 年的 Nobel 物理学奖^[106]。随后 David J. Wineland 等人在理论提出，并随后在实验上实现对单个离子的激光冷却^[107]，在 1995 年，Cirac Juan I. 和 Peter Zoller 提出使用离子阱系统用于量子计算的想法^[108]，开启了人们对使用离子阱来研究量子信息的大门。目前，全世界已经有 100 多个实验室使用离子阱来做各种研究^[88]。

本文所研究的离子阱为 Paul 阱。Paul 阱的结构经过多年的演化，电极形状从最初的双曲面面形^[7] 变为更容易制作的线性四极杆阱^[9]，而后变为控制更精确的线性刀片阱^[10-11] 和具有更多复杂电极结构的多层芯片阱^[12]。这些尺寸较大的三维离子阱都需要机械加工和手工组装，因此制造上有一定的难度。随着微纳加工技术的发展，使用光刻技术实现的小型化离子阱越来越受到关注，因此出现了具有复杂表面结构的二维表面阱^[13]。

2.3.1 Mathieu 方程

一维条件下，离子被囚禁于一个简谐势 $U(x) = ax^2 + bx + c$ 种。式中的一阶项 bx 可以通过改变势阱中心位置的方法消除，即 $U(x) = a(x - x_0)^2 + c$ 。而常数项可以通过改变势能参考点来消掉。在势阱中心，忽略高阶项之后，势阱总可以为如下形式， $U(x) = ax^2$ 。只在四极杆 (Quadrupole) 上施加静电场 (Static electric field, DC field)^①，形成的电势可以写为

$$\Phi_{DC} = \frac{U_{DC}}{2}(\alpha_{DC}x^2 + \beta_{DC}y^2 + \gamma_{DC}z^2) \quad (2.74)$$

其中， U_{DC} 为 DC 施加的电压。由于 $\nabla^2 U = 0$ 要求

$$\alpha_{DC} + \beta_{DC} + \gamma_{DC} = 0 \quad (2.75)$$

^① 这里 DC 原指直流电，但由于习惯，本文将静电场称为 DC。

则至少有一个方向的系数非正数，这意味该方向不能提供束缚作用。因此单纯使用静电场是无法实现带电粒子的三维束缚的。射频场（Radio frequency field, RF field）产生的含时四极势表示为

$$\Phi_{RF} = \frac{U_{RF}}{2}(\alpha_{RF}x^2 + \beta_{RF}y^2 + \gamma_{RF}z^2)\cos(\Omega_{RF}t) \quad (2.76)$$

其中， U_{RF} 为 RF 的电压， Ω_{RF} 为射频角频率，同样需要满足

$$\alpha_{RF} + \beta_{RF} + \gamma_{RF} = 0 \quad (2.77)$$

本文只考虑线性离子阱，RF 在轴线上（本文定义轴线为 Z 方向）是均匀的，因此取 $\gamma_{RF} = 0$ ， $\alpha_{RF} = -\beta_{RF}$ 。此时，初始时刻 X 方向有束缚作用而 Y 方向有排斥作用，但在半个周期 $\frac{\pi}{\Omega}$ 之后，X 方向有排斥作用而 Y 方向有束缚作用。因此离子在径向可以一直受到束缚。轴向的束缚由 DC 来提供，即 $\gamma_{DC} = -(\alpha_{DC} + \beta_{DC}) > 0$ 。虽然 DC 产生的径向（本文定义径向为 X，Y 方向）是排斥离子的，但只要 RF 产生的径向束缚更强，离子仍然可以被稳定束缚。因此，总的电势写为

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2}(U_{DC}\alpha_{DC} + U_{RF}\alpha_{RF}\cos(\Omega_{RF}t))x^2 \\ & + \frac{1}{2}(U_{DC}\beta_{DC} + U_{RF}\beta_{RF}\cos(\Omega_{RF}t))y^2 + \frac{1}{2}U_{DC}\gamma_{DC}z^2 \end{aligned} \quad (2.78)$$

可以将上述电势分成 X，Y 和 Z 三个维度来分别考虑，以 X 方向为例，

$$\Phi_x = \frac{1}{2}(U_{DC}\alpha_{DC} + U_{RF}\alpha_{RF}\cos(\Omega_{RF}t))x^2 \quad (2.79)$$

根据牛顿运动方程 $F = ma$ ，对于处于该电场的正电荷 q ，有

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{qE}{m} \\ &= -\frac{Ze}{m} \frac{d\Phi_x}{dx} \\ &= -\frac{Ze}{m}(U_{DC}\alpha_{DC} + U_{RF}\alpha_{RF}\cos(\Omega_{RF}t))x \end{aligned} \quad (2.80)$$

其中， Z 为离子所带电荷数， m 为离子质量， e 为单位正电荷 $1.602 \times 10^{-19} \text{C}$ 。这与 Mathieu 方程

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + [a_x - 2q_x \cos(2\xi)]x = 0 \quad (2.81)$$

形式一致，只需要做如下替换

$$\xi = \frac{\Omega_{RF}t}{2}, \quad a_x = \frac{4ZeU_{DC}\alpha_{DC}}{m\Omega_{RF}^2}, \quad q_x = \frac{2ZeU_{RF}\alpha_{RF}}{m\Omega_{RF}^2} \quad (2.82)$$

上述方程在一定条件下具有通用的稳定解，更多的分析参考文献^[12,98]。但在这里只考虑一阶近似的情况，要求 $|a_x|, q_x^2 \ll 1$ ，即可得到粒子运动的一阶近似解

$$x(t) \approx 2A_x \cos\left(\beta_x \frac{\Omega_{RF}t}{2}\right) \left[1 - \frac{q_x}{2} \cos(\Omega_{RF}t)\right] \quad (2.83)$$

其中, $\beta_x \approx \sqrt{a_x + q_x^2/2}$, A_x 为常数, 依赖于初始的边界条件^[98]。上述结果表明, 离子在一维势阱中的运动可以分为两部分, 频率为 $\omega_{\text{secular}} = \beta_x \frac{\Omega_{\text{RF}}}{2} \ll \Omega_{\text{RF}}$, 幅度为 $2A$ 的久期运动 (Secular motion) 和频率为 Ω_{RF} , 幅度为 $q_x A$ 的与 RF 场反相的微运动 (Micromotion)。其中当 $a_x \ll q_x^2$ 时, 久期运动频率可以写为

$$\omega_{\text{secular}} = \frac{ZeU_{\text{RF}}\alpha_{\text{RF}}}{\sqrt{2m}\Omega_{\text{RF}}} \quad (2.84)$$

如果离子被束缚在势阱中心附近, 且微运动的幅度要远小于久期运动, 则可以进一步忽略微运动的部分。此时离子只剩下幅度较大频率较低的久期运动, 可视为在简谐势阱中的简谐运动。Y 轴可以作同样的处理。因此在径向上, 离子可以被稳定束缚。

轴线方向的情况比较简单, 可以直接由

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{ZeU_{\text{DC}}\gamma_{\text{DC}}}{m} z = 0 \quad (2.85)$$

得到轴线运动频率

$$\omega_z = \sqrt{\frac{ZeU_{\text{DC}}\gamma_{\text{DC}}}{m}} \quad (2.86)$$

和运动函数

$$z(t) = A_z \cos(\omega_z t) \quad (2.87)$$

其中, A_z 为运动幅度。

如果轴向束缚较弱而径向束缚强, 则可以使得多个离子在轴线上排列成一行。由于库仑相互作用, 这些离子将按照一定的间隔排列。这为使用激光来独立地操作各个离子提供了便利。通常将 DC 电极分为若干段, 独立控制电压则可以实现轴线上的不同势阱, 能够对离子的位置进行精确操控。关于多离子的内容, 参考本章第 4 节。

2.3.2 离子阱赝势

上一节给出了离子阱中离子的动力学运动轨迹。但在实际分析中, 使用赝势 (Pseudo-potential) 的方法能够给出更快捷更直观的结果。只考虑径向的 X 方向, 根据牛顿第二定律

$$m\ddot{x} = ZeE(x) \cos(\Omega_{\text{RF}} t) \quad (2.88)$$

其中, $E(x)$ 为 x 点的电场强度。 $E(x)$ 在离子当前的位置 x_0 作 Taylor 展开,

$$E(x) = E(x_0) + E'(x_0)(x - x_0) + \dots \quad (2.89)$$

并只保留一阶近似, 其中 $E'(x_0)$ 为电场强度在 x_0 处的梯度。假设离子的运动可以写为 $x(t) = s(t) + u(t)$, 其中 $s(t)$ 为低频项, $u(t)$ 为高频项, 满足

$$\dot{s}(t) \ll \dot{u}(t) \quad (2.90)$$

因此有

$$m\ddot{x} = Ze(E(x_0) + E'(x_0)(x - x_0)) \cos(\Omega_{RF}t) \quad (2.91)$$

在 RF 的一个周期 $\frac{2\pi}{\Omega_{RF}}$ 内, 离子只运动了很小的距离, 因此低频项 $s(t)$ 可以看作静止, 而有 $m\ddot{x} \approx m\ddot{u}(t)$, 因此

$$m\ddot{u}(t) \approx ZeE(x_0) \cos(\Omega_{RF}t) \quad (2.92)$$

积分可以得到

$$x - x_0 \approx u(t) - u(t_0) = -\frac{ZeE(x_0)}{m\Omega_{RF}^2} \cos(\Omega_{RF}t) \quad (2.93)$$

带入式2.91, 有

$$m\ddot{x} = Ze(E(x_0) - \frac{(Ze)^2 E(x_0)}{m\Omega_{RF}^2} E'(x_0) \cos(\Omega_{RF}t)) \cos(\Omega_{RF}t) \quad (2.94)$$

所以在一个周期内, 离子受到的平均电场力为

$$\begin{aligned} \langle F(t) \rangle &= \langle m\ddot{x} \rangle = \langle ZeE(x_0) \cos(\Omega_{RF}t) \rangle \\ &\quad - \left\langle \frac{(Ze)^2 E(x_0)}{m\Omega_{RF}^2} E'(x_0) \cos^2(\Omega_{RF}t) \right\rangle_{T=\frac{2\pi}{\Omega_{RF}}} \end{aligned} \quad (2.95)$$

其中, 右侧第一项为 0, $\langle F(t) \rangle$ 表示对 $F(t)$ 在一个周期内求平均, 即 $\langle F(t) \rangle = \frac{1}{T} \int^T F(t) dt$. 所以

$$\begin{aligned} \langle F(t) \rangle &= - \left\langle \frac{(Ze)^2}{2m\Omega_{RF}^2} \frac{dE^2(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} \cos^2(\Omega_{RF}t) \right\rangle_{T=\frac{2\pi}{\Omega_{RF}}} \\ &= - \frac{(Ze)^2}{4m\Omega_{RF}^2} \frac{dE^2(x_0)}{dx} \end{aligned} \quad (2.96)$$

此时, 该平均力定义了一个势场

$$\Phi_{pseudo}(x) = \frac{ZeE^2(x)}{4m\Omega_{RF}^2} \quad (2.97)$$

满足

$$F(x) = -Ze\nabla\Phi_{pseudo}(x) = -Ze \frac{d\Phi_{pseudo}(x)}{dx} \quad (2.98)$$

由于 $\Phi_{pseudo}(x)$ 是对射频场时间平均的效果, 所以被称为赝势 (Pseudo-potential), 单位 V。赝势实际上是一种有质动力势 (Ponderomotive potential), 其中带电粒子受到的力的方向指向电场强度变弱的地方, 而且与所带电荷的正负无关。因此带正电的粒子和带负电的粒子都将被束缚在电场强度最弱的地方。将上述结果扩展到三维的情况,

$$\Phi_{pseudo}(\vec{r}) = \frac{Ze\vec{E}^2(\vec{r})}{4m\Omega_{RF}^2} \quad (2.99)$$

其中, $\vec{E}^2(\vec{r}) = E^2(x) + E^2(y) + E^2(z)$ 。可见离子将被束缚在三维空间中电场强度最弱的地方。对于一维线性阱来说, 这就是离子阱的轴线。

在大于 $\frac{2\pi}{\Omega_{RF}}$ 的时间尺度上, 离子的运动轨迹为 $\vec{r}(t) = \vec{s}(t)$, 其哈密顿量可以写为

$$H(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t) + \Phi_{pseudo}(\vec{r}) \quad (2.100)$$

其中, 右侧第一项为幅度大频率低的久期运动的动能, 而第二项赝势能实际上起源于幅度小频率高的微运动的平均动能^[12]。

举例说明, 射频电极产生的含时电势可以表示为

$$\Phi_{RF} = \frac{U_{RF}}{2}(\alpha_{RF}x^2 - \beta_{RF}y^2)\cos(\Omega_{RF}t) \quad (2.101)$$

其中, α_{RF} 和 β_{RF} 均为正数。则

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r})\cos(\Omega_{RF}t) &= -\nabla\left(\frac{U_{RF}}{2}(\alpha_{RF}x^2 - \beta_{RF}y^2)\right)\cos(\Omega_{RF}t) \\ &= -U_{RF}(\alpha_{RF}x\vec{i} - \beta_{RF}y\vec{j})\cos(\Omega_{RF}t) \end{aligned} \quad (2.102)$$

其中, $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 分别表示 X 和 Y 方向的单位向量。因此径向的赝势为

$$\Phi_{pseudo}(\vec{r}) = \frac{ZeU_{RF}^2}{4m\Omega_{RF}^2}(\alpha_{RF}^2x^2 + \beta_{RF}^2y^2) \quad (2.103)$$

令 $\alpha_{RF} = \beta_{RF} = \frac{\kappa}{R^2}$, 其中 R 为离子与电极距离, κ 为电压效率因子, 对于双曲面电极 $\kappa = 1$ 。得到

$$\Phi_{pseudo}(\vec{r}) = \frac{Ze\kappa^2U_{RF}^2}{4mR^4\Omega_{RF}^2}(x^2 + y^2) \quad (2.104)$$

离子所受慢变的平均力为

$$F(x) = -Ze\nabla\Phi_{pseudo}(x) = -Ze\frac{Ze\kappa^2U_{RF}^2}{2mR^4\Omega_{RF}^2}x \quad (2.105)$$

$$F(y) = -Ze\nabla\Phi_{pseudo}(y) = -Ze\frac{Ze\kappa^2U_{RF}^2}{2mR^4\Omega_{RF}^2}y \quad (2.106)$$

再次根据牛顿运动定律, 离子在该势阱中的 X 方向运动方程为

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{(Ze)^2\kappa^2U_{RF}^2}{2mR^4\Omega_{RF}^2}x \quad (2.107)$$

则可以解得离子在赝势中的径向运动频率为

$$\omega_{x,y} = \frac{Ze\kappa U_{RF}}{\sqrt{2}mR^2\Omega_{RF}} \quad (2.108)$$

与使用 Mathieu 方程解得的式2.84相同。

实验上, 较高的久期运动频率(远小于 RF 频率)有益于离子的冷却和长离子链的稳定束缚。因此需要尽可能提高离子的久期运动频率。一方面, 可以减小离子与电极的距离 R , 但这也可能会带来反常加热的问题^[109-110,14], 以及产生较强的杂散光。另一方面, 对于质量和电荷已经确定了离子, 可以增加 RF 电压或者降低射频频率来加深势阱。但要注意, 根据式2.82, 这样也会增加 q 而导致束缚的不稳定。一般地, 要求 $q \leq 0.4$ 且 $a \ll q$ 。而实际上, U_{RF} 也受到电极材料击穿电压的限制。因此如何在各个参数间取得平衡, 需要结合实际地分析。

2.3.3 离子阱数值分析

实际工作中的离子阱具有复杂的结构, 难以对其进行理论分析。因此采用数值模拟的方法是十分必要的。尤其是在离子阱的设计时, 计算不同结构参数下的离子阱性能将对设计提供重要的指导。

使用计算机辅助设计软件 (CAD), 可以建立离子阱的三维模型。使用有限元软件 Comsol 可以计算该装置在空间中产生的电场分布。使用计算软件可以得到总的电场分布, 并计算离子的运动状态。为了能够在所有电极上独立施加电压, 分别计算其中一个电极施加 1 V, 而其他电极施加 0 V 时的电场分布 $\vec{E}_i(x, y, z)$ 和电势分布 $\Phi_i(x, y, z)$, 其中 $i = 1, 2, 3, \dots$ 表示第 i 个电极。由于数值计算的是离散的格点 $x_j, y_j, z_j | j = 1, 2, 3, \dots$, 上述结果可以使用多项式插值或拟合的方法来扩展到连续的空间。在 RF 电极和 DC 电极上施加不同的电压 U_{RF1} 和 $\{U_{DC1}, U_{DC2}, U_{DC3}, \dots\}$ 并将 RF 的函数添加含时项 $\cos(\Omega_{RF}t)$, 即可得到总电场

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{U_{RF}}{1V} \times \vec{E}_{RF}(x, y, z) \cos(\Omega_{RF}t) + \sum_i \frac{U_{DCi}}{1V} \times \vec{E}_{DCi}(x, y, z) \quad (2.109)$$

此时使用牛顿第二定律便可以对单离子的运动状态做模拟, 即数值求解 $m\ddot{\vec{r}} = Ze\vec{E}(x, y, z, t)$ 。对于多离子, 还需要考虑各个离子间的库仑相互作用。假设 t 时刻 N 个离子的位置为 $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N\}$, 则第 n 个离子所受到的库仑力为其他所有离子对其作用力之和, 即 $\vec{F}_n(\vec{r}_n) = \sum_{i \neq n} \frac{Z^2 e^2 (\vec{r}_n - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_n - \vec{r}_i|^3}$, 其中 $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 为真空介电常数, $|\vec{r}_n - \vec{r}_i|$ 表示矢量的模。因此离子的运动方程为

$$m\ddot{\vec{r}}_n = Ze\vec{E}(\vec{r}_n, t) + \vec{F}_n(\vec{r}_n) \quad (2.110)$$

如果此时进一步考虑由于离子与多普勒冷却光产生的光子反冲力 $\vec{F}_{recoil}(\vec{r}_n)$, 则

$$m\ddot{\vec{r}}_n = Ze\vec{E}(\vec{r}_n, t) + \vec{F}_n(\vec{r}_n) + \vec{F}_{recoil}(\vec{r}_n) \quad (2.111)$$

可用于模拟多离子的多普勒冷却过程。

N	$u_n = z_n/l$				
2	± 0.62996052				
3	$\pm 1.07721735 \quad 0$				
4	$\pm 1.43680199 \quad \pm 0.45437928$				
5	$\pm 1.74290321 \quad \pm 0.82210076 \quad 0$				
6	$\pm 2.01227468 \quad \pm 1.13612534 \quad \pm 0.36992063$				
7	$\pm 2.25454360 \quad \pm 1.41291727 \quad \pm 0.68694339 \quad 0$				
8	$\pm 2.47582028 \quad \pm 1.66206164 \quad \pm 0.96700764 \quad \pm 0.31802142$				
9	$\pm 2.68025792 \quad \pm 1.88969881 \quad \pm 1.21947415 \quad \pm 0.59957607 \quad 0$				
10	$\pm 2.87082508 \quad \pm 2.10003116 \quad \pm 1.45038141 \quad \pm 0.85377883 \quad \pm 0.28210366$				

表 2.2 简谐势阱中多离子的无量纲离子坐标 $u_n = z_n/l$ 随离子数变化。

上述的模拟过程由于包含了 $\cos(\Omega_{\text{RF}}t)$ 项, 计算的结果能够反映离子的久期运动和微运动。但是计算的时间间隔应远小于射频周期, 这导致计算量很大。使用赝势则能够实现静态电势的求解, 大大减小计算量。RF 产生的单位赝势可以使用式 2.99 计算, 因此总电势表示为

$$\Phi_{\text{total}}(\vec{r}) = \frac{U_{\text{RF}}}{1\text{V}} \times \frac{Ze|\vec{E}_{\text{RF}}(\vec{r})|^2}{4m\Omega_{\text{RF}}^2} + \sum_{i=1} \frac{U_{\text{DC}i}}{1\text{V}} \times \Phi_{\text{DC}i}(\vec{r}) \quad (2.112)$$

离子受到的电场力因此可以写为 $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\Phi_{\text{total}}(\vec{r})$, 也可以表示为 $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{U_{\text{RF}}}{1\text{V}} \times \nabla\Phi_{\text{pseudo}}(\vec{r}) + \sum_i \frac{U_{\text{DC}i}}{1\text{V}} \times \vec{E}_{\text{DC}i}(x, y, z)$ 。再次考虑库仑相互作用力, 则仍然可以使用牛顿运动方程求解得到多离子的运动轨迹和运动频率。

对于多离子来说, 径向的束缚足够强而轴向的束缚较弱, 使得离子都处于轴线上形成一维离子晶体。因此这里关心的是沿着轴线的离子间距和振动频率。固然可以使用上面的数值模拟直接求解, 但问题可以进一步简化而使求解容易得多。只考虑轴线上的势阱 $\Phi_{\text{axial}}(z)$ 。对于束缚 N 离子的简谐势 $\Phi_{\text{axial}}(z_n) = \frac{1}{2}m\omega^2 z_n^2$, 可以求得第 n 个离子在其中的受力是

$$F(z_n) = -m\omega^2 z_n + \sum_{i \neq n} \frac{Z^2 e^2 (z_n - z_i)}{4\pi\epsilon_0 |z_n - z_i|^3} \quad (2.113)$$

N 个离子的平衡位置可以通过方程组

$$\{F(z_n) = 0, n = 1, 2, 3, \dots, N\} \quad (2.114)$$

来求解, 即离子受到的库仑力恰好与其受到的电场力平衡。定义轴向势阱的特征

长度 $l^3 = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m \omega^2}$ 和无量纲的离子坐标 $u_n = z_n/l^{[111]}$, 则上式可以化简为

$$u_n - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{(u_n - u_m)^2} + \sum_{m=n+1}^N \frac{1}{(u_n - u_m)^2} = 0 \quad (2.115)$$

该方程组可以使用数值求解, $N=2$ 到 $N=10$ 的结果如表2.2。

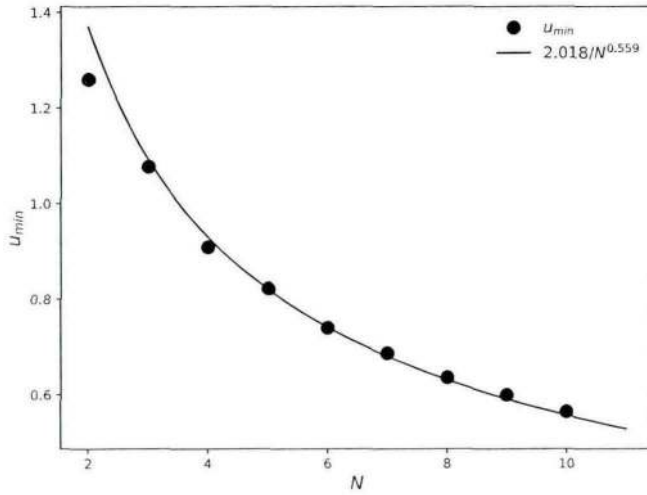


图 2.9 简谐势中离子最小间距 u_{min} 随离子数变化符合 $2.018/N^{0.559}$ 的规律。

无量纲离子坐标 $u_n = z_n/l$ 呈现出中间间距小, 两侧间距大的趋势。而且最小的间距 u_{min} 随离子数变化符合 $2.018/N^{0.559}$ 的规律, 如图2.9所示。因此简谐势阱中, 离子的间距是不均匀的, 而且随着离子数目的增加, 中间的间距越来越小, 这对单离子寻址造成了困难。当轴向运动频率大于某个值时 $\omega_{x,y}/\omega_z > 0.77N/\sqrt{\log N}$, 还会出现从中间错位的 zigzag 相变^[112,23,113]。实验上, 我们希望离子的间距是均匀的且不随着粒子数目增加而改变, 因此需要使用非简谐势——轴向四次方电势 (Quartic axial potential)^[113,54], 即

$$\Phi_{axial}(z_n) = \frac{1}{2}\alpha_2 z_n^2 + \frac{1}{4}\alpha_4 z_n^4 \quad (2.116)$$

其中, $\alpha_2 = m\omega_z^2$ 。此时式2.115应修改为

$$u_n + \beta u_n^3 - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{(u_n - u_m)^2} + \sum_{m=n+1}^N \frac{1}{(u_n - u_m)^2} = 0 \quad (2.117)$$

其中, $\beta = \alpha_4 l^2 / \alpha_2$ 是待优化的无量纲数。通过寻找最优的 β , 可以实现离子间距的最均匀化参数 $\sigma_{\Delta z} / \overline{\Delta z}$ 最小, 其中 Δz ($\overline{\Delta z}$) 表示离子间距 (平均值), $\sigma_{\Delta z}$ 表示 Δz 的方差。该过程可以通过数值方法快速求解。一旦最优解 $\beta_{optimal}$ 被找到, Δz 则只与 ω_z 有关。选择合适的轴向频率, 即可确定整个轴向势阱和离子平衡位置

$\{z_i, i = 1, 2, 3, \dots, N\}$ 。该势阱 $\Phi_{axial}(z_n)$ 可以使用 $\Phi_{DC}(z_n) = \sum_{i=1} U_{DCi} \Phi_{DCi}(z_n)$ 来拟合, 即可获得 DC 上需要施加的电压值 $\{U_{DCi}\}$, 从而获得整个轴线附近三维空间的电势分布。

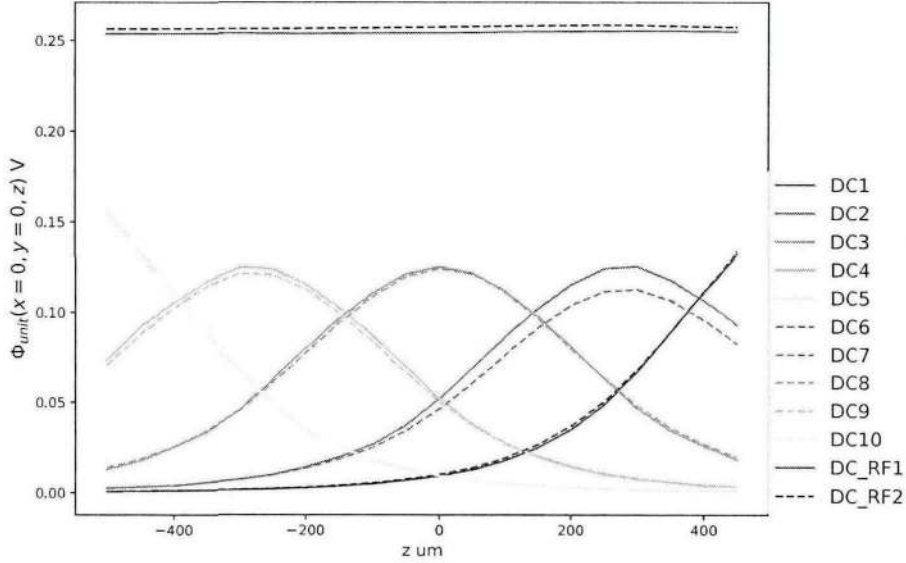


图 2.10 各个电极施加 1V 其余接地时在轴线上的电势。可见相对放置的电极所产生的电势相似。其中我们在模型中故意设置了约 $10 \mu\text{m}$ 的错位, 因此两侧 DC 的结果不完全对称。我们使用的是双圈螺旋谐振腔, 能够独立在两个 RF 电极上面加偏置电压, 因此最上面的两根 RF 的电势也将参与势阱的分析。注意到这两条电势不随 z 改变, 但它们能够用于旋转主轴。

不管是使用前面介绍的多离子三维受力平衡, 还是如上述只考虑一维轴向电势, 一旦总势阱和多离子的轴向平衡位置 $\{\vec{r}_n, n = 1, 2, 3, \dots, N\}$ 确定了, 使用 Hessian 矩阵 $\mathcal{H}(x, y, z)$ 即可求得 N 个离子在平衡位置的运动频率和运动模式。Hessian 矩阵为

$$\mathcal{H}_N(\vec{r}_n) \equiv Ze \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial u_{3N} \partial u_1} & \frac{\partial^2}{\partial u_{3N} \partial u_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial u_{3N}^2} \end{bmatrix} \Phi(\vec{r}_n) \quad (2.118)$$

其中, 为了方便表示, 将 N 个离子的平衡位置记为

$$\{\vec{r}_n\} = x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n = \{u_1, u_2, \dots, u_{3N}\} \quad (2.119)$$

上式在 $N=1$ 时的形式是

$$H_1(x, y, z) \equiv Ze \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \Phi(x, y, z) \quad (2.120)$$

其中, $\Phi(x, y, z)$ 为总电势。离子的运动频率和 $H_N(\vec{r}_n)$ 的本征值有如下关系

$$\lambda_i = m\omega_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, 3N \quad (2.121)$$

其中, 当 $N=1$ 时, 即可得到单离子的三个主轴运动频率。这里要注意的是, $H_1(x, y, z)$ 通常不是一个对角矩阵, 因此单离子的运动模式也不一定沿着实验室坐标系 XYZ , 而是沿着 $H_1(x, y, z)$ 的三个本征向量 $\{\vec{h}_x, \vec{h}_y, \vec{h}_z\}$ 方向。 $\{\vec{h}_x, \vec{h}_y, \vec{h}_z\}$ 被称为运动主轴 (Normal axes)。通过改变电压可以改变主轴的方向, 来实现不同的目的。对于 N 个离子来说, $H_N(\vec{r}_n)$ 的 $3N$ 个本征向量 $\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_{3N}\}$ 则表示 N 个离子的共同运动模式。例如, $\vec{h} = [1, 1, \dots, 1]$ 则表示所有离子同向运动的质心模等等^[114]。下一节将介绍数值模拟的一个实例。

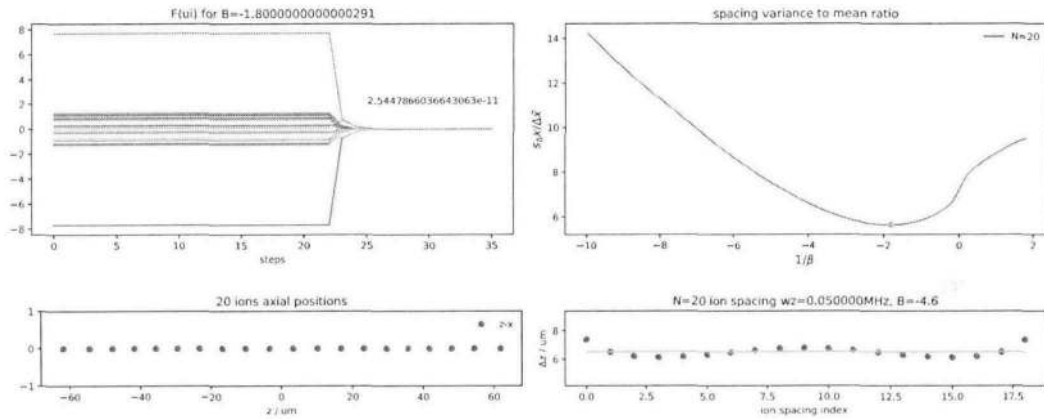


图 2.11 计算 20 个离子平衡位置。左上图为式 2.117 求解的收敛图, 可见该问题可以被迅速求解。右上图表示根据最均匀化参数 $\sigma_{\Delta z}/\sqrt{\Delta z}$ 的最小值来寻找最优的 $\beta = \alpha_4 l^2 / \alpha_2 = 1/B$, 即图中的圆点所示位置。左下图表示轴向运动频率为 $(2\pi)50\text{kHz}$ 时 20 个离子的平衡位置, 可以见到离子间距十分均匀。右下图表示离子间距均值为 $6\mu\text{m}$ 左右, 且分布均匀偏离小于 $1\mu\text{m}$ 。

2.3.4 一维离子晶体的运动模式

多个离子的间距控制需要构建合适的四次方 (Quartic) 电势式 2.116。如图 2.10 所示, 将所有 DC 施加 1V 时在轴线上的电势分布作为向量基矢, 来对需要的电势进行拟合优化。从图 2.10 中可以看到, 相对放置的电极所产生的电势基本相同, 如 DC1 和 DC6, DC2 和 DC7。根据式 2.117 求解得到多离子轴向平衡

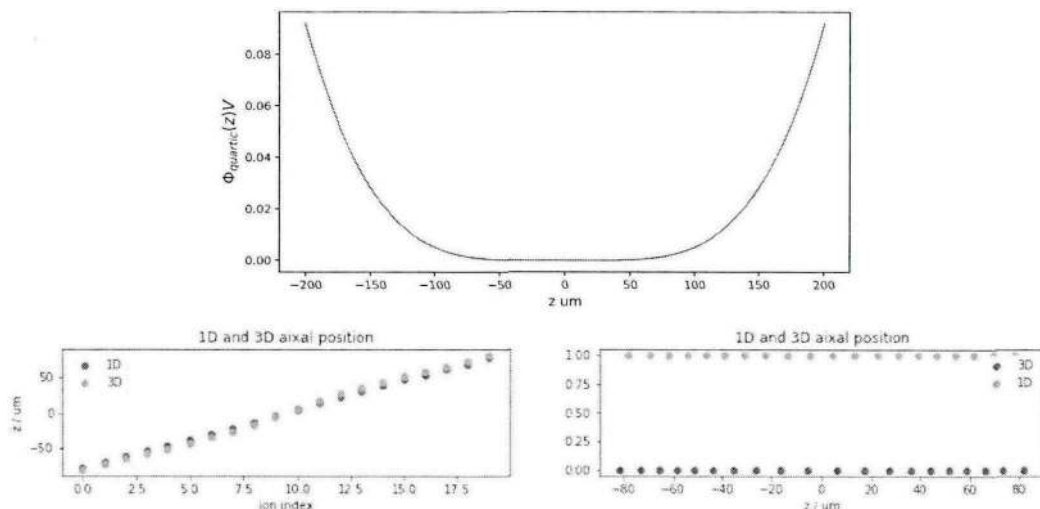


图 2.12 四次方轴向电势和离子平衡位置。上图：图2.11所对应的轴向电势，具有较为平坦的底部。下图：20个离子平衡位置。其中1D表示使用式2.117计算的结果，3D表示使用式2.113计算的结果。相同电压下，一维和三维受力平衡位置十分接近。

位置，并带入轴向质心模运动频率，即可计算离子在轴向的分布^[54]。可以计算得到20个离子在轴向上的均匀分布，如图2.11所示。因此，轴向电势已被确定，如图2.12所示，为底部平坦的 quartic 电势，可以表示为 $\Phi_{quartic}(z) = \alpha_2 z^2/2 + \alpha_4 z^4/4$ ，其中 $\alpha_2 = -1.749180 \times 10^5 \text{ V/m}^2$ ， $\alpha_4 = 2.383511 \times 10^{14} \text{ V/m}^4$ 分别为平方项的系数和四次方项的系数。使用图2.10中的电势来优化，即可得到12个偏置电压。

如图2.13所示为四次多项式势阱的电势分布图三个切面。在径向 XY 平面，该势阱为二次函数电势，而在 XZ 和 YZ 平面，该势阱沿着轴向 Z 方向伸展，具有一个较为平坦的底部。

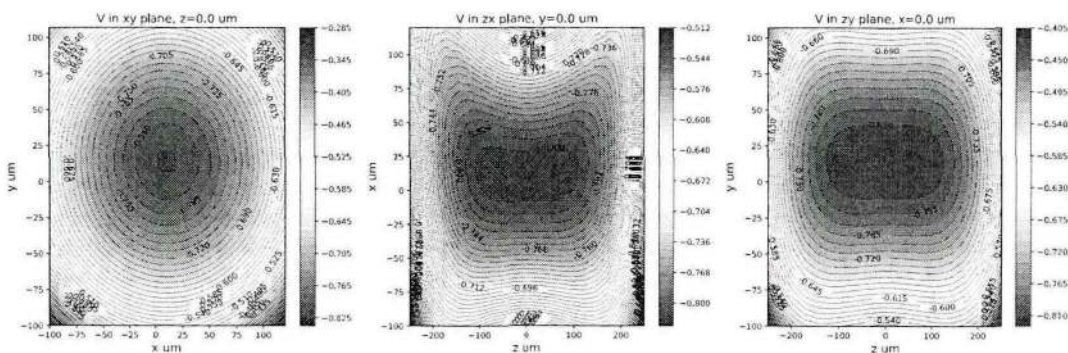


图 2.13 四次多项式势阱的三维分布图。左图为 XY 平面 ($z=0$)，中图为 XZ 平面 ($y=0$)，右图为 YZ 平面 ($x=0$)。

此时，可以进一步地分析三维势阱中离子的平衡位置，即求解离子的三维受力平衡。得到的结果与一维的接近，如图2.12所示，为多离子的平衡位置。然后可以由式2.118和式2.121确定各个离子的运动频率和运动模式。如图2.14所示，

可以明显地看到轴向运动频率与径向运动频率分别组成了三个频率区间。径向质心模的运动频率为径向所有运动模式中最高，轴向质心模运动频率为所有轴向运动模式的最低值^[115]。在图2.14中，列举了部分径向运动模式。

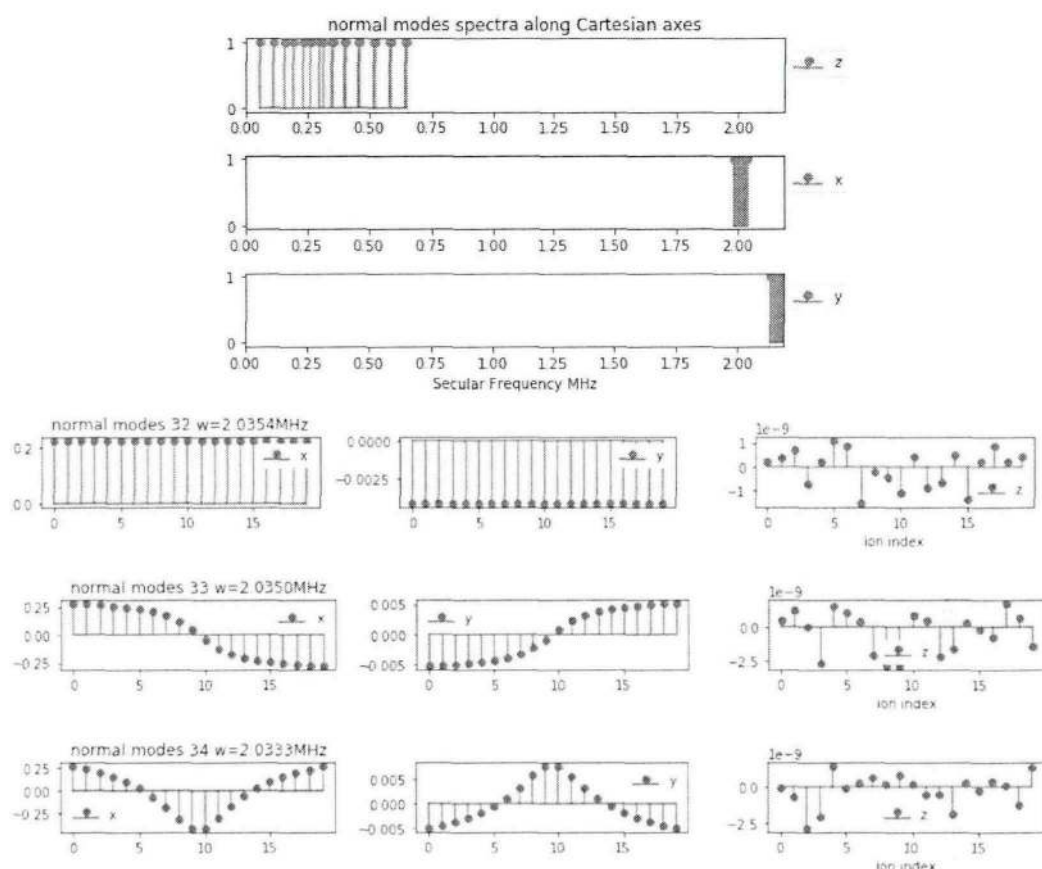


图 2.14 多离子运动频率和运动模式。上图为 20 离子的运动频率能谱。下图：20 离子的部分运动模式示例。每一行代表一种运动频率的运动模式在 X, Y 和 Z 方向的分量。图中第 n 条竖线表示该模式在第 n 个离子上的分量。竖线长度代表该离子在这个运动模式下的运动分量。竖线的正负表示运动的方向。其中，第一行是 X 方向质心模，其频率为径向所有运动模式中最高。

2.3.5 离子冷却模拟

除了上述使用赝势来分析多离子的运动状态，还可以使用牛顿运动方程求解多离子的运动轨迹随时间的变化，如图2.15所示。图中，单个离子受到三束多普勒冷却光的冷却，失谐分别为 -200.0 MHz 、 -100.0 MHz 和 -50.0 MHz ，指向为 $\vec{k} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ 方向，因此在 XYZ 三个方向都可以起到冷却的作用。在每个时间间隔内，该冷却激光有一定的概率被离子吸收一个光子，并随机地向各个方向自发辐射出一个光子。该过程的动量变化直接作用在离子上。由于多普勒效应的存在，当离子与激光波矢反向运动时更容易吸收光子，因此在多次平均后，离

子受到了激光的多普勒冷却。从图中可以看到, 经过 0.5 ms 后, 该离子的运动幅度从 $5\ \mu\text{m}$ 降至 $2\ \mu\text{m}$ 左右。进一步冷却则可以降低到更低幅度, 直至多普勒冷却极限。对离子的运动轨迹进行傅里叶变换, 可以得到如图2.15所示的离子的运动频率。由于这里使用的不是赝势, 而是含时电场对离子的作用, 得到的频率中不仅包括 $2\pi \times 1.49\ \text{MHz}$ 和 $2\pi \times 1.62\ \text{MHz}$ 的久期运动频率, 还包括频率为 $2\pi \times 14.45\ \text{MHz}$ 的微运动, 与 RF 频率相同。但是, 这样也造成计算量较大。如果使用赝势来代替含时的径向电势, 则能够大大降低对计算时间间隔的要求。如果考虑离子之间的库仑作用力, 即可模拟多离子的运动。

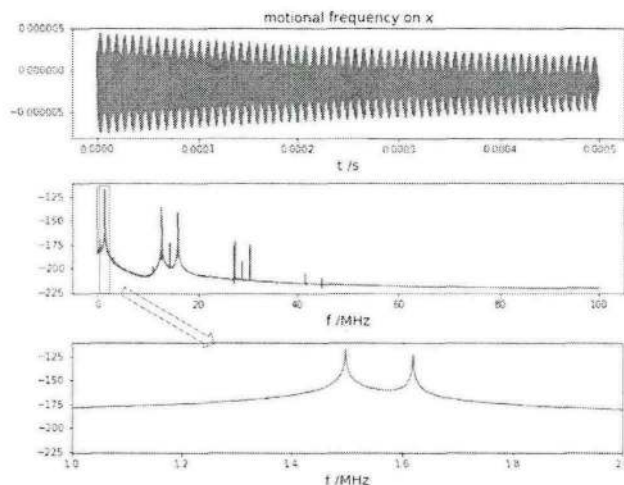


图 2.15 单离子的运动轨迹。图一表示离子从初始位置经历 0.5 ms 冷却的 X 坐标, 图二表示对离子的 X 坐标进行傅里叶变换, 得到离子的运动频率, 图三为图二的展开图。可见离子具有 $(2\pi)1.49\ \text{MHz}$ 和 $(2\pi)1.62\ \text{MHz}$ 两个径向久期运动频率。还可以看到频率为 $(2\pi)14.45\ \text{MHz}$ 的微运动, 与 RF 频率相同。

第3章 高通光刀片阱的设计

随着激光和计算机等领域的快速发展,人们已经有能力将微观粒子冷却到极低的温度,微观世界的量子特性逐渐被人们所了解和掌控。尤其是在冷原子或者冷离子系统中,人们实现了一系列重要的突破。过去几十年来,人们已经实现了微观粒子的激光冷却^[116,99,97-98],使用磁光阱(Magneto-optical trap, MOT)来束缚冷原子团^[117-118],使用光晶格(Optical lattice)或者光镊(optical tweezers, OTs)来束缚单个原子阵列^[32-33,36-39],以及使用激光来进行量子比特的操作^[30]等等。这些技术大大地提升了人们在量子层面上精确控制微观粒子与光相互作用的能力。近年来,在一个混合系统(Hybrid system)中同时捕获冷原子和冷离子,并研究其相互作用越来越受到人们的重视^[56-58]。这种结合了复杂激光操作工具和电子控制技术的复合系统也将使得人们有能力进行更为复杂的原子-分子-光学(Atomic, molecular, and optical, AMO)研究,比如冷原子和冷离子的碰撞问题^[59-61,57,62],使用纯光将离子束缚在光晶格或者光镊中来避免微运动的影响^[41,119-120,44],使用光镊实现离子的可扩展量子操作^[46],以及分子离子的协同冷却^[121]等等。因此,为了给量子计算和量子化学模拟等方面提供必要的平台,设计一种能够容纳这些光学要求的复合型离子阱装置尤其重要。

在当前的复合系统中,一个紧迫的困难就在于如何将冷原子常使用的强大的激光技术,例如光镊,和本已十分复杂的离子阱相结合,建造一种提供足够通光性的装置。光镊是一种强聚焦的光偶极阱,常使用高数值孔径($NA>0.6$)的物镜将其光斑尺寸聚焦到一微米左右。在离子阱中使用光镊将带来很多好处。第一,能够实现单个离子的纯光囚禁^[40-42],避免了由于射频场微运动造成的加热问题^[43-44]。第二,可以使用光镊束缚单个原子,并与电场囚禁的单个离子相互作用,这有利于实现可控的量子级别的化学反应。第三,使用光镊可以调控离子晶体的运动模式,实现可以一维长离子链或者二维离子晶体的可扩展量子门^[46-48]。尤其对于第三点来说,其方案的实现必须依赖可编程光镊操作,而且光阱束缚要达到与电场囚禁接近的强度。这对于目前的系统来说,都是极为困难的。因此,设计一个具备多个高数值孔径通光面的离子阱是十分必要的。而且在系统的设计之初就应该考虑到如何最大化系统的通光性。传统上,金属真空腔体常被用于冷原子或者离子系统^[11,122,101]。由于其成熟的加工工艺能够实现客户定制,优良的机械性能保证其不易破损和变形,可以设置多个可通光窗口用于打光,使用CF法兰密闭真空,且在高温烘烤后具有极低的放气率,因此与超高真空(ultra-high-vacuum, UHV)环境兼容,金属真空腔体天然地成为离子阱装置的首选。然而,金属真空腔体本身并不透明,通光窗口的使用也会占用较大的体

积,因此很大程度上限制了装置的通光性。常用的金属真空腔体可以在单个或者两个面上具有较大的数值孔径,但在其他方向的数值孔径却无法做大,这对于需要多种激光操作的离子-原子复合系统造成了很大的限制。

冷原子技术的发展证明,玻璃真空腔能够支持复杂的 AMO 实验^[123-124]。在玻璃真空腔中使用 MOT 制备冷原子系综,使用光晶格或者光镊束缚单个冷原子阵列都已经是很成熟的技术^[37,118]。因此,将离子阱集成到玻璃真空腔中,同时保证高通光性是制备复合系统的可靠途径。但是,如何设计离子阱的结构来匹配玻璃真空腔仍然具有挑战。本文就将着重介绍一种放置于玻璃真空腔的高通光的分段刀片式离子阱的搭建工作。该离子阱的特点是,势阱中心距离真空腔外界只有 15 mm 的距离,在四周允许同时使用两个数值孔径 (Numerical aperture, NA) 最大为 0.32 的物镜和两个 NA 最大为 0.66 的物镜,并且在斜入射方向保留了足够的空间用于冷却光和泵浦光,在玻璃腔内还保留足够的空间用于实现 MOT 和光晶格。本装置为未来的冷原子实验提供了足够的光学操作空间。接下来将详细介绍该阱的设计和搭建。

3.1 刀片阱设计理念

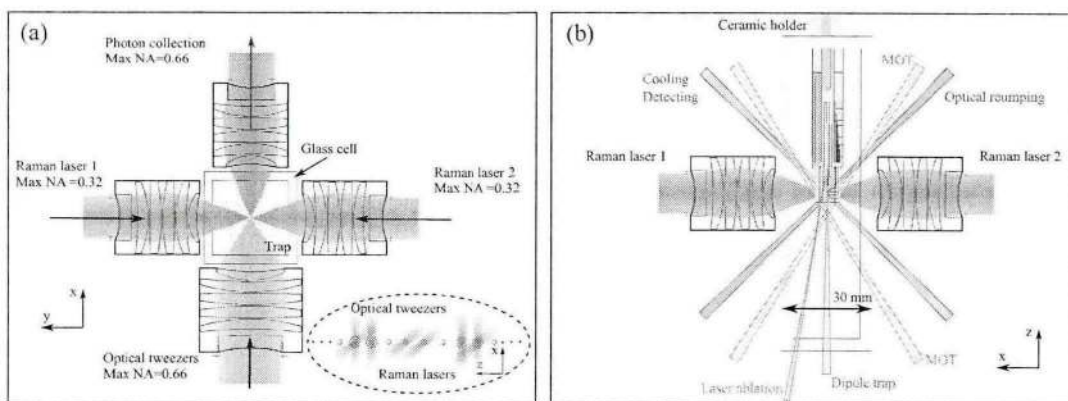


图 3.1 高通光离子阱的应用。(a) 本装置的四个高通光孔径,其中一个 $NA=0.66$ 的方向可以用于光镊操控离子链的运动模式,另外两个 $NA=0.32$ 的方向可以用于拉曼光进行离子寻址和量子逻辑门的操作。另一个 $NA=0.66$ 的窗口用于荧光收集。(b) 本装置适用于含有多种元素的混合系统。离子阱前侧预留的空间可以用于制备 MOT,并使用光偶极阱将原子系统移动到离子处,与离子相互作用。两侧高度汇聚的拉曼光可以实现离子量子态的操控,实现需要精确控制的量子模拟。

为了建造一个高通光的离子阱,我们最主要的思路就是将其放置于一个长方体型的玻璃真空腔中。选择使用分段式的刀片阱,因为刀片阱在离子阱系统中已经被广泛使用^[125-127,54],具备容易制造和束缚能力强的优点。分段式的刀

片, 能够提供多个控制电压, 可以很好地补偿离子的微运动, 并控制离子的位置和运动频率。刀片阱还具有良好的通光性, 在四个方向都具有较大的数值孔径。刀片的角度可以根据需要来调节。我们的实验要是设置两侧数值孔径分别为 $NA=0.66$ 和 $NA=0.32$ 。所用玻璃腔的特点是体积小、全透明, 具有紧凑型。玻璃腔的结构和尺寸不能影响刀片阱的通光性。所用玻璃腔为一个长方体, 其外部尺寸为 $30\text{ mm} \times 30\text{ mm} \times 100\text{ mm}$, 四周玻璃壁厚 4 mm , 因此内部尺寸为 $22\text{ mm} \times 22\text{ mm} \times 92\text{ mm}$ 。离子阱的中心距离玻璃腔外表面只有 15 mm , 这个距离适用于 $NA0.6$ 至 $NA0.7$ 的高数值孔径紫外物镜的工作距离^[29]。如图3.1 (a) 所示, 大 NA 的窗口可以被用于光镊和荧光收集, 较小 NA 的窗口可以用于相对方向入射的拉曼激光。这种配置符合文献^[45-46,48]中提出的光镊辅助量子门对离子阱装置的要求。本装置还为先进的冷原子实验提供了具有充足通光性能的平台。如图3.1 (b) 所示, 在 45° 斜入射方向或者与离子阱轴线有一定夹角的方向, 保留了足够的空间用于其他激光, 如冷却光、泵浦光以及原子所需要的 MOT 光、偶极阱光。离子阱前侧预留的空间可以用于制备 MOT, 并使用光偶极阱将原子系统移动到离子处, 转移到光镊中并与离子相互作用。两侧高度汇聚的拉曼光可以实现离子量子态的操控。

想要将刀片阱放置于玻璃腔中, 最大的难点在于如何巧妙地设计刀片的尺寸和固定方式, 以及合理安排其他辅助性的部件, 如超高真空环境、电子电路、以及原子源。如图3.2, 刀片阱由四个刀片组成, 结构紧凑, 安装方便, 固定于一个陶瓷支柱的顶部。该陶瓷支柱和其他的部件都固定在不锈钢真空腔上。在陶瓷支柱的头部固定有 3-4 个金属管, 管子的头部夹有铯元素的金属薄片。使用 532 nm 的脉冲激光器经玻璃腔的头部小窗口将原子从薄片上加热为蒸气并喷出, 在阱中心该蒸气经过双光子离子化过程成为离子^[128]。

3.2 刀片阱尺寸设计

3.2.1 刀片形状

刀片阱必须具有紧凑的结构和小巧的尺寸, 才能够放置于玻璃真空腔内。刀片阱如图3.3所示, 由四个表面镀金的刀片组装而成。四个刀片安装在底座上, 两个 DC 电极相对放置, 两个 RF 刀片相对放置。RF 刀片与 DC 刀片具有相同的形状和材料。其横截面为五边形, 由一个边长为 2 mm 的正方形, 和一个顶角 30° 的等腰三角形构成。刀片总高 12 mm , 刀刃曲率半径 $15\text{--}30\text{ }\mu\text{m}$ 。其中 DC 刀片的表面分成五段, 五段电极的中心位于刀片上侧 9 mm 处, 中间三段宽度为 $250\text{ }\mu\text{m}$, 每段中间间隔 $20\text{ }\mu\text{m}$ 宽的绝缘槽。刀刃处的分段电极经过侧面与刀背连接,

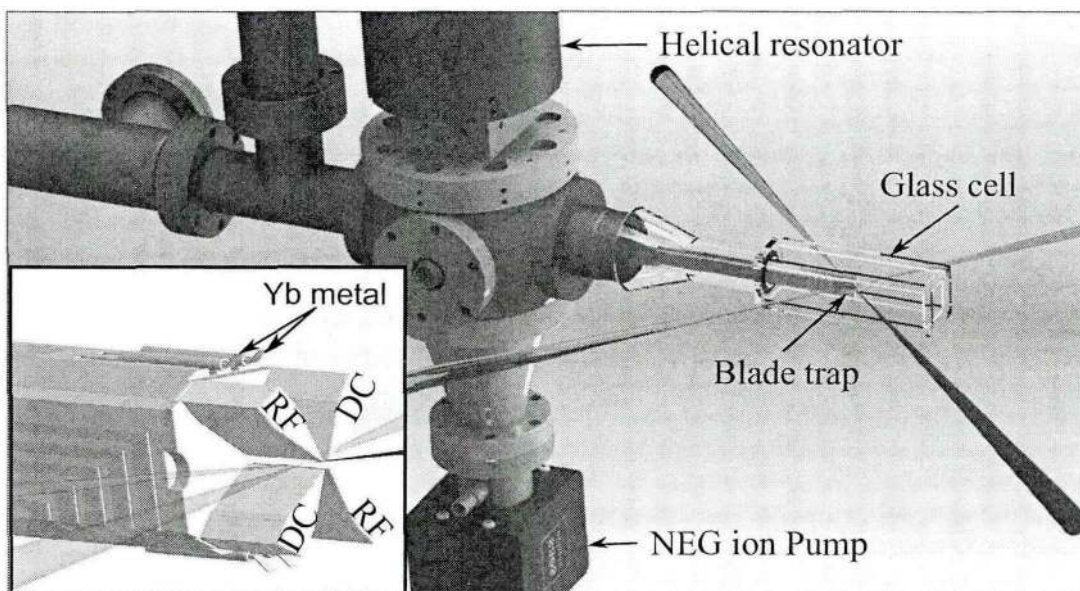


图 3.2 刀片阱示意图。刀片安装在一个陶瓷支柱上，并被放置于玻璃真空腔的中心位置。玻璃腔正前面入射的脉冲激光照射到同位素靶材，激发的原子蒸气在离子阱中心被离子化并被势场捕获。玻璃腔固定于一个不锈钢金属腔上。该不锈钢金属腔具有六个侧面，还分别固定有一个螺旋谐振腔（Helical resonator）用于提供 RF 高频高电压、一个吸附剂泵（SAES D200）用于维持真空、一个装有 12 针的真空馈通（Feedthrough）用于 DC 供电、一个 CF 盲板和一个三通不锈钢 CF 转接管。该转接管上接有一个热离子真空规（Agilent UHV-24P）和直角金属阀门。内嵌图展示的是刀片阱的细节，线性离子阱由四个刀片组成，一对 RF 刀片和一对分段的 DC 刀片。四个刀片通过两层硅片固定在陶瓷支柱上，陶瓷支柱上粘有镀金的柔性电路板（FPC）用于电路连接，刀片使用引线键合（Wirebonding）连接到 FPC 上。

刀背上的五个独立电极区域用于引线键合。

3.2.2 刀片角度和间距

在设计刀片尺寸时，利用上一节介绍的数值模拟方法被对刀片结构进行优化。一些需要考虑的参数为：刀片的大小，DC 分段电极的宽度，刀片之间的间距和夹角。受限于玻璃腔瓶颈处的直径为 17 mm，因此整个装置的最大直径不应超过该尺寸，才能确保刀片顺利放入玻璃腔。同时过小的刀片页会带来加工和制作上的困难，尤其是背部用于引线键合的区域，每根 DC 宽度应大于 $300\ \mu\text{m}$ ，才能够使用多根（5 根以上）引线，确保连接的牢靠并且不会造成断路和短路。刀片的厚度不能过薄，从而导致无法在硅片上稳定安装或影响对齐精度。最终确定刀背厚度为 2 mm，刀刃角度为 30° 。由于需要在一个方向构成 NA 0.6（NA 0.7）的通光口径，因此角度应大于 73° （ 88° ）。最终设置了两个刀片相邻表面夹角为 82.6° 和 37.4° ，对应数值孔径分别为 0.66 和 0.32。

为了在频域上区分 XY 方向的运动模式，需要破坏 XY 势阱的对称性。因此，

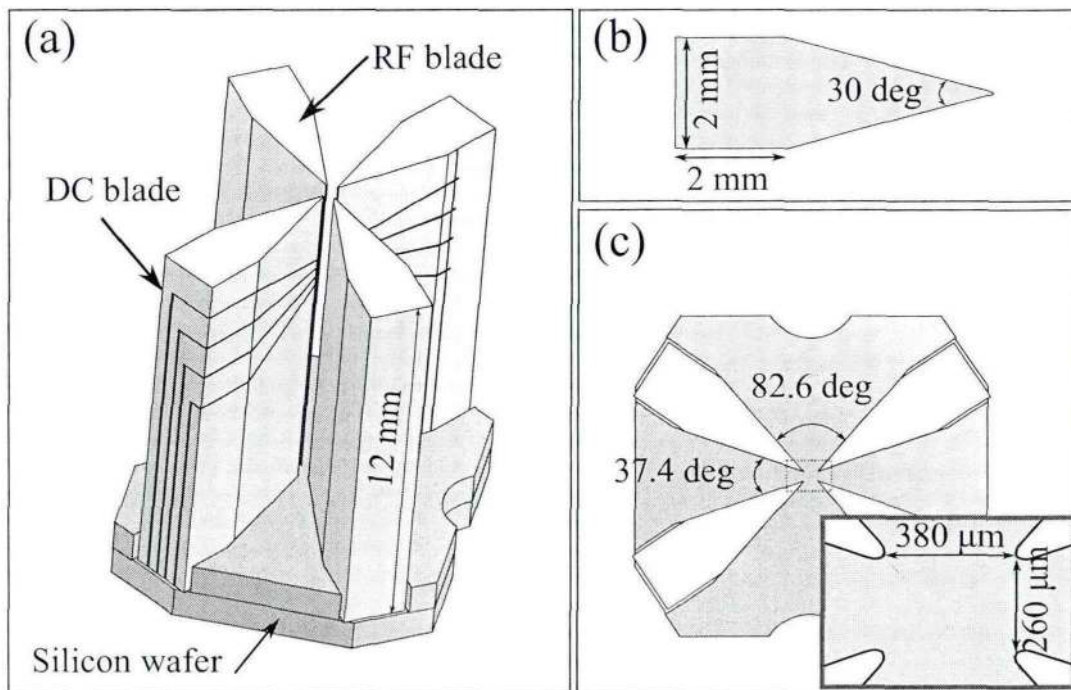


图 3.3 分段阱组装图。(a) 刀片组由四个高度为 12 mm 的刀片组成。该刀片使用二氧化硅打磨抛光而成，表面镀有 $8\ \mu\text{m}$ 的金层用于导电。RF 刀片和 DC 刀片形状和材料一致，但 DC 刀片上设置有五段 DC 电极。刀片固定于绝缘的双层硅片底座上，该底座由上层带有四个槽的硅片和下层表面抛光的硅片粘合而成。离子阱的中心距离刀片底面 9 mm，因此整体偏上。这是为了防止激光通过时照射到硅片上。(b) 刀片的上下面。这两个表面主要用于制作过程中的固定和夹取，因此不镀金。(c) 硅片底座。两层硅片底座由化学键和方法固定在一起。四个定位槽与刀片底部具有相同的形状，刀片可以直接放置其中并用胶水固定。该结构使得刀刃间距为 $260\ \mu\text{m} \times 380\ \mu\text{m}$ （如红框内的图所示），刀片之间的夹角分别为 82.6° 和 37.4° ，构成数值孔径为 $\text{NA}=0.66$ 和 $\text{NA}=0.32$ 。

将刀片沿着非正方形对角线方向摆放，使得刀刃围成一个长方形。首先需要确定刀刃间距。根据式 2.108，可推出电压效率因子 κ 为 $\sqrt{2m\omega_{x,y}}R^2\Omega_{RF}/(ZeU_{RF})$ ， $\alpha_{RF} = \beta_{RF} = \frac{\kappa}{R^2}$ ，其中 R 为离子到刀刃的距离。由于刀片角度和刀片形状已经确定，可以通过数值模拟计算 α_{RF} 随离子到电极距离 R 的关系，并得到电压效率因子 $\kappa \approx 0.785$ ，如图 3.4 所示。由式 2.82 和式 2.84 可得，如果要求 $q < 0.4$ ， $\omega_{x,y} \geq \omega_r$ ，则要求

$$\Omega_{RF} > 7.07\omega_r \quad (3.1)$$

以及

$$\frac{10mR^2\omega_r^2}{Ze\kappa} \leq U_{RF} < \frac{0.2mR^2\Omega_{RF}^2}{Ze\kappa} \quad (3.2)$$

一方面 R 不应过小，否则离子容易受到反常加热效应的影响^[14]，因此 $R > 200\ \mu\text{m}$ 是一个适合的条件。过大的 R 要求更大的 U_{RF} ，这要考虑到电路击穿电压的限制，

还要考虑输入射频功率以及电压增益的限制。例如,当 $R = 300 \mu\text{m}$, $\omega_r \approx 2\pi \times 2.0 \text{ MHz}$ 时,要求 $\Omega_{RF} > (2\pi)14.14 \text{ MHz}$ 且 $U_{RF} > 320 \text{ V}$ 。当 $R = 230 \mu\text{m}$, $\omega_r \approx 2\pi \times 2.0 \text{ MHz}$ 时,要求 $U_{RF} \geq 188 \text{ V}$ 。显然后者更容易实现。综合上述数值模拟的结果,最终选择刀刃间距 $260 \mu\text{m} \times 380 \mu\text{m}$, 对应 $R = 230 \mu\text{m}$ 。

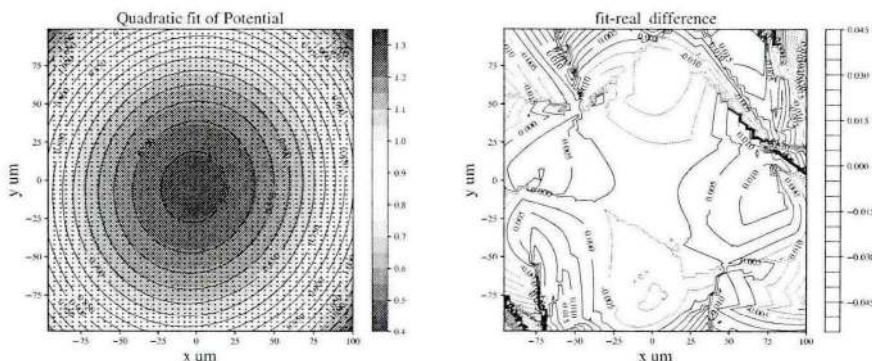


图 3.4 $z=0$ 处单个 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的径向势阱。左图中黑点表示数值模拟的数据点, 上色背景为数据点绘制的势阱分布, 黑色曲线表示等势线 $\Phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2$ 拟合。右侧为使用 $\Phi(x, y)$ 拟合后与原势阱之差。由 $\Phi(x, y)$ 可以得到势阱中心位置: $x_0 = -2.000 \mu\text{m}$, $y_0 = -4.314 \mu\text{m}$, 主轴角度: 73.473° 和 16.527° , 单离子的主轴运动频率分别为: $\omega_1 = (2\pi)1.035 \text{ MHz}$, $\omega_2 = (2\pi)1.141 \text{ MHz}$ 。图中右侧为使用 $\Phi(x, y)$ 拟合后与原势阱之差。可见在势阱中心附近, $\Phi(x, y)$ 能够很大程度上表示势阱。而在更远的地方 ($50 \mu\text{m}$ 之外), 高阶项逐渐显现。势阱的主轴可以通过调节 DC 电压旋转到想要的方向。

3.2.3 DC 电极宽度

DC 电极的宽度也需要进行优化。对于多离子的分离、合并操作, 需要使用上一节式 2.116 的含有四次方部分的势阱。通过改变 α_2 项的大小, 可以控制势阱从单一势阱 ($\alpha_2 > 0$, $\alpha_4 > 0$) 经过纯四次方势阱 ($\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 > 0$) 最终变为双势阱 ($\alpha_2 < 0$, $\alpha_4 > 0$), 完成离子的分离。离子的合并为上述过程的逆过程。在 $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 > 0$ 时, 轴向势阱的离子运动频率 ω_z 完全由 α_4 决定, 此时较小的 α_4 会导致较弱的轴向束缚, 并导致离子的不稳定, 因此需要保证 α_4 足够大。 α_4 与电极的宽度 D 和离子与电极距离 R 有关^[129]。由于离子与电极距离 R 已经确定, 因此需要通过数值模拟, 得到不同电极宽度 D 对应的 α_4 和轴向离子运动频率 $\omega_{z, \text{quartic}}$, 并得到 $\omega_{z, \text{quartic}}$ 最大时对应的电极宽度 D 。如下图 3.5 所示, 可以看到在 $D = 175 \mu\text{m}$ 时, $\omega_{z, \text{quartic}}$ 达到最大值。但看到即使电极宽度变为 $280 \mu\text{m}$, $\omega_{z, \text{quartic}}$ 也只降低 12%。因此, 最终设置中间三段电极宽度为 $D = 250 \mu\text{m}$ 。

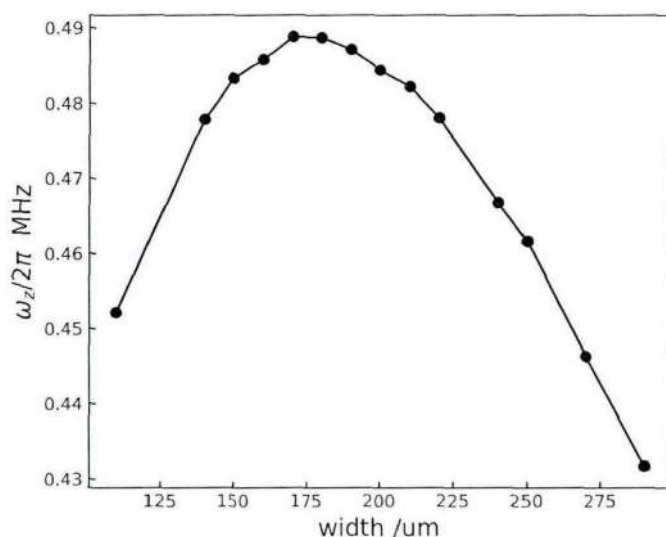


图 3.5 DC 刀片宽度扫描。设置电压为 DC1, DC5, DC6, DC10=2 V, DC2, DC4, DC7, DC9=-2 V, 扫描 DC3=DC8, 使得 α_4 最大, 并计算此时的 $\omega_{z,quartic}$ 。

3.3 刀片阱的制作

前面介绍了刀片阱的设计理念, 本节将要介绍刀片阱所用部件的加工制作, 包括刀片、硅片固定板、玻璃真空腔、陶瓷支柱、陶瓷夹具、以及滤波电路板的制作等等。

3.3.1 刀片加工

本文所介绍的离子阱的核心部件是镀金的刀片。该刀片是一个五棱柱, 底面是一个正方形和顶角 30° 的等腰三角形。该刀片的材料是熔融石英, 具有良好的表面加工特性。通过打磨和抛光, 表面能够做到几纳米级别的粗糙度。本工作所用的刀片由钱忠华设计, 并联系福州逐日光电科技有限公司加工 (参数为: 光洁度 40~20, 面型 $<\lambda/4$ @632.8 nm, 两个底面平行度 <1 分, 崩边 <0.1 mm)。机械打磨的刀片虽然具有光滑的表面, 但在刀刃处不可避免地出现崩边。这些崩边的尺寸在 $1\text{--}20\ \mu\text{m}$, 会造成电极所产生的电势在轴线上的不均匀性, 且会造成不必要的散射光。因此, 使用 CO_2 激光将刀刃作退火处理 (由李睿睿完成)。刀刃部分经激光加热后迅速融化, 而后在表面张力的作用下收缩并形成极其光滑的表面。这种方法在回音壁腔中常被用于提升腔的 Q 值^[130]。操作光路如图 3.6 (a) 所示。该装置也被用于我们组的光纤 Fabry-Pérot 腔的加工。图 3.6(b-g) 还展示了加工前后刀刃质量, 可以看到有明显的提升。在热回流处理之后, 刀刃表面变为均匀的光滑的凸面。但是由于使用 CO_2 激光功率偏高, 导致有部分石英材料被

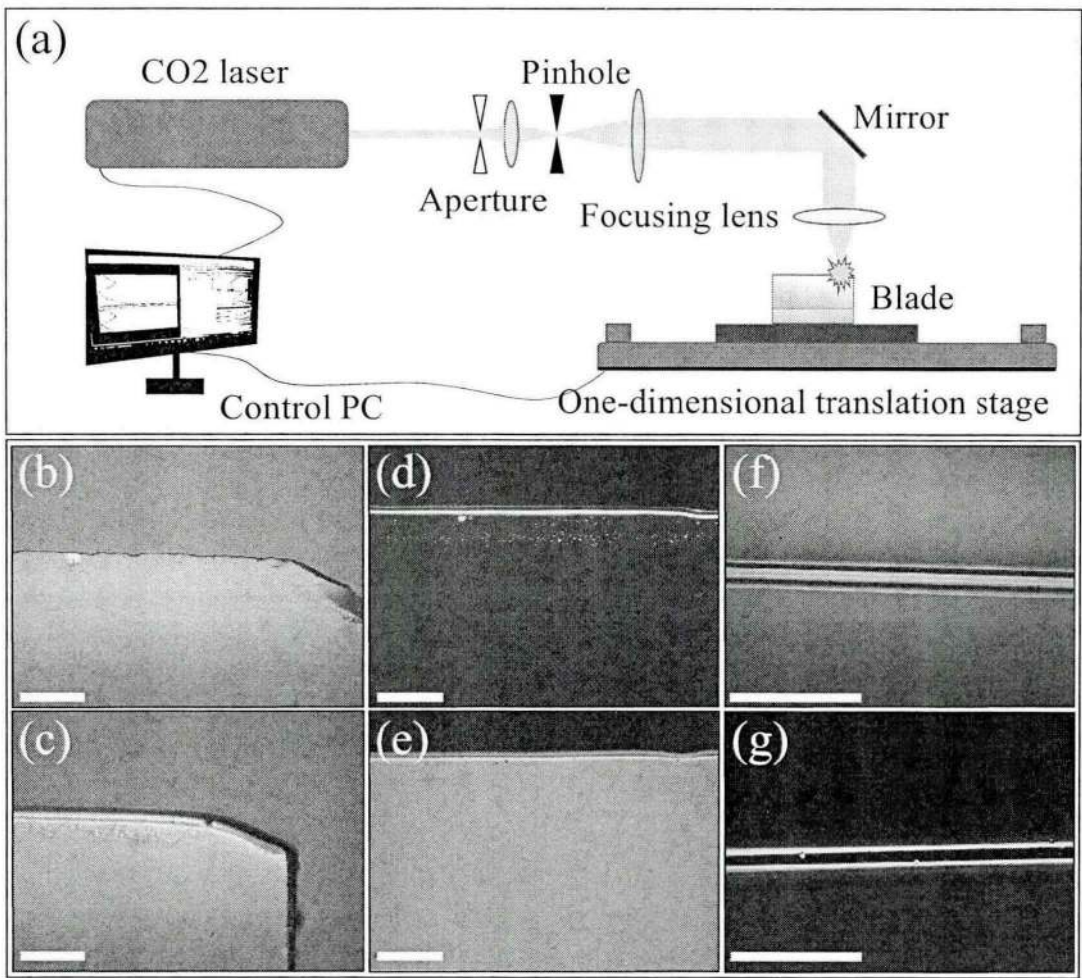


图 3.6 使用 CO₂ 激光处理刀刃。(a) 激光光路。刀片被固定在一个一维电动平移台上。CO₂ 激光光束（光斑半径 100 μm）被聚焦到刀刃上。(b) - (c) 刀片处理前和处理后的对比。可见原来由于机械抛光留下的 10 μm 左右的刀刃破损，在激光加工后消失不见。刀刃变得均匀光滑。(d) 暗场下观察到的由于激光功率过大造成二氧化硅颗粒溅射到刀刃附近。这些颗粒在氢氟酸溶液浸泡后即可脱落。(e) 电化学镀金之后的刀片斜面，观察不到玻璃颗粒。(f) - (g) 刀刃在镀金前后的对比。在镀金后，刀刃的表面质量良好。图中的白线刻度尺表示 100 μm。

溅射到刀刃附近，形成了 1 μm 到 5 μm 的颗粒。在一开始我们认为这些颗粒是由污染导致的，但经过多种清洗后无果，才意识到这些颗粒是二氧化硅。于是将刀片浸泡于 20 % 的氢氟酸溶液两分钟，即可有效去除这些颗粒。在以后的加工中，使用小功率的 CO₂ 激光将可以避免这个问题。

玻璃刀片的镀金是重要一环。由于在室温下，在金子上频率为 20 MHz 的射频信号的趋肤深度为 16.7 μm，薄于该深度的金层会导致 RF 信号的损耗，而较厚的金层加工难度较大，因此选择将金层厚度定为 8 μm。在镀金之前，所有的刀片都被彻底的清洗。首先将刀片放置于特氟龙夹具上，依次使用丙酮、异丙醇、去离子水在超声浴池中分别清洗五分钟。然后将其浸没于 20 % 的氢氟酸溶

液，超声清洗 2 分钟去除表面玻璃颗粒。使用去离子水清洗数遍后使用干燥的压缩氮气吹干。再将其浸没于食人鱼溶液中，加热至 90°C ，清洗一个小时。随后使用大量去离子水冲洗，并再次经过丙酮、异丙醇、去离子水分别清洗五分钟，用干燥氮气吹干。这些刀片随后被转移到独立的支架上，并放于托盘中，在磁控溅射镀膜机中镀膜。分三次在刀片的五个侧面镀 20 nm 的钛层作为结合层和 100 nm 的金层作为种子层。然后使用电化学镀金将厚度增加到 $8\text{ }\mu\text{m}$ 。图3.6(d-g)展示了镀金前后刀片表面的质量。

镀金之后，使用激光切割将表面金层分为五段。激光切割使用 355 nm 的激光，位移精度 $\pm 1\text{ }\mu\text{m}$ ，最小的切割宽度为 $15\text{ }\mu\text{m}$ 。切割深度应大于 $10\text{ }\mu\text{m}$ 以确保金层被全部切穿，否则将引起短路。需要将五个表面都进行切割，并且要保证切割的轨迹重合，至少其对齐精度要小于切槽宽度。激光切割会导致表面的污染，但多数都是金属或者二氧化硅粉末，因此使用超声清洗即可有效去除，如图3.7所示。但是在刀刃附近，仍能看到较大的凸起物和残留。这些可以使用稀释后的氢氟酸进一步处理（本装置没有做氢氟酸处理）。图3.8展示了切割后的刀片照片。DC3 的中心距离刀片底部 9 mm，距离顶部 3 mm。DC2，DC3，DC4 三段电极 $250\text{ }\mu\text{m}$ 宽，DC1 和 DC5 的宽度非对称。在刀片的背部，五段电极走线具有 $390\text{ }\mu\text{m}$ 的宽度，这将用于刀片和滤波板的引线键合。在刀片的上下两侧，分别切割出一圈隔离槽，将上下底面的多于金层与刀片主体隔离开。这是为了减小底部硅片对电压的损耗和影响^[131-132]。

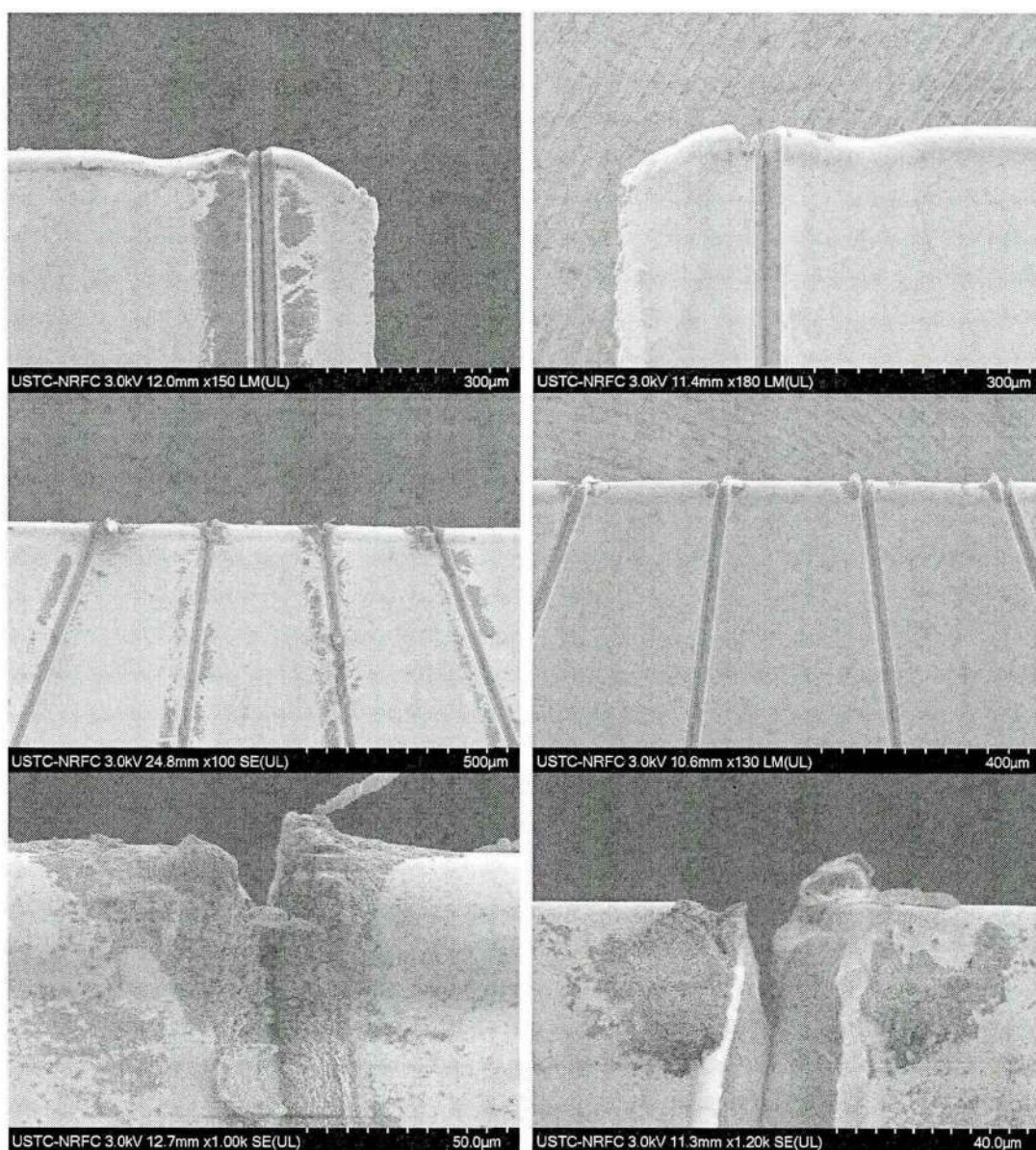


图 3.7 镀金并激光切割厚的 DC 刀片。使用 SEM 扫面表面质量，左图为激光切割后，表面具有很多粉末状残留物。右图为清洗之后，除了刀刃附近的少许残留，其他大部分的粉末被去除。左侧最下面的一幅图显示，没有清洗的刀片分割槽被金属碎屑填充，容易引起两侧电极的短路。在清洗之后，两侧电极明显分开，但是在刀刃附近，仍能看到较大的凸起物和残留。这些可以使用稀释后的氢氟酸进一步处理。

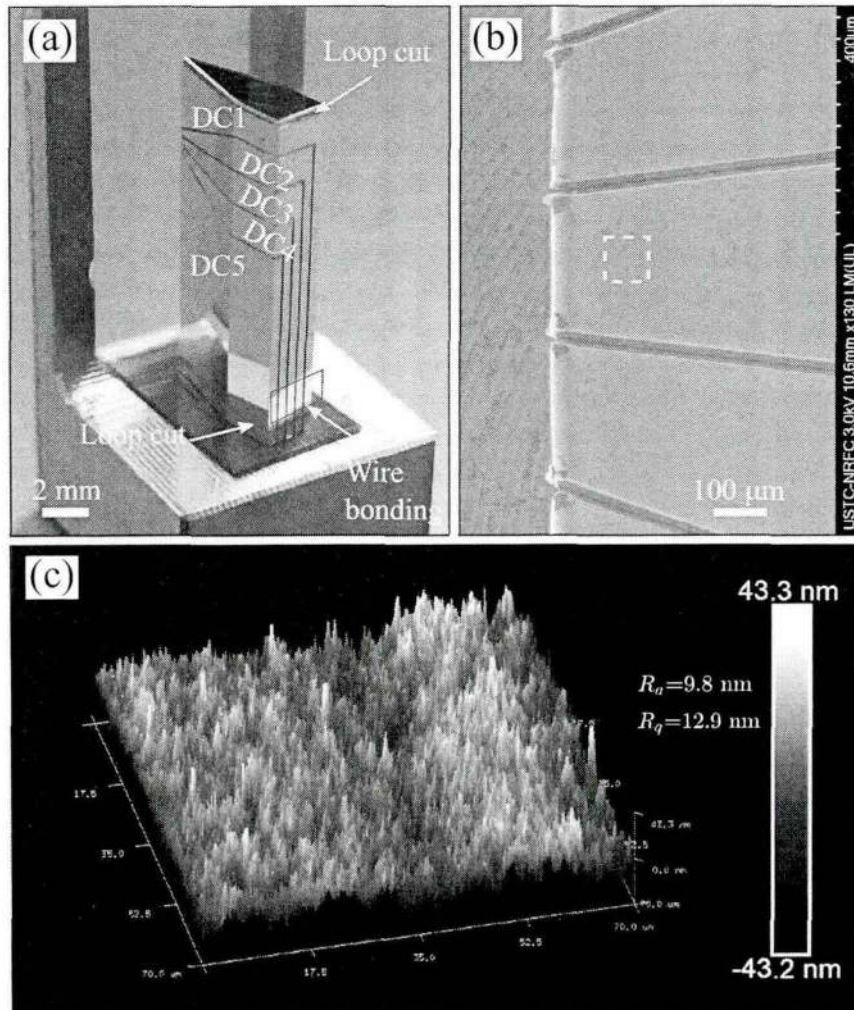


图 3.8 DC 刀片表面。(a) 完成制作的 DC 刀片。五个侧面的金层被激光切割成五段电极。其中 DC2, DC3, DC4 宽度为 $250\ \mu\text{m}$ ，中间绝缘槽宽度为 $20\ \mu\text{m}$ 。红框内的部分将会被用于引线键合，每段宽度 $390\ \mu\text{m}$ 。(b) 刀刃附近 SEM 图片，可以看到一些激光切割残留。白色虚线框内的部分使用原子力显微镜扫描，表征表面粗糙度。(c) 原子力显微镜结果显示在 $70\ \mu\text{m} \times 70\ \mu\text{m}$ 的区域内，表面的起伏最大范围为 $\pm 43.2\ \text{nm}$ ，轮廓算术平均偏差 $R_a = 9.8\ \text{nm}$ ，相对于轮廓平均线偏差的均方根值 $R_q = 12.6\ \text{nm}$ 。

3.3.2 硅片固定基板

刀片的固定装置不能超过玻璃腔的最小直径 $17\ \text{mm}$ ，因此不能使用外围固定支架（例如常用的 machinable glass-ceramic, MACOR）。我选用刀片单侧固定方法，利用双层硅片固定基板，刀片底部固定于其中的槽内。使用八英寸的单晶硅硅片，厚度为 $500\ \mu\text{m}$ ，双面抛光，并具有 $300\ \text{nm}$ 厚的氧化膜。使用激光切割刻出图3.3所示的刀片安装槽阵列。该安装槽的形状与刀片的底部一致。将该硅片和另一个完整的硅片使用稀释后的水玻璃粘在一起，经过一周的脱水过程可

以形成牢固的硅氧烷键 (hydroxide catalysis bonds)。这种化学键具有强大的结合力, 即使在 $300\text{ }^{\circ}\text{C}$ 都不会被破坏。实际上将之加热到 $370\text{ }^{\circ}\text{C}$, 才观察到了硅片的破损。常用真空烘烤的温度为 $220\text{ }^{\circ}\text{C}$, 不会破坏该结构。在引力波探测中, 这种化学键也被用于探测器的固定^[133]。当两个硅片完成脱水后, 使用激光切割将其切割成大小约 $10\text{ mm}\times 11\text{ mm}$ 的小块, 每块的四个长边设置直径 3 mm 的半圆用于通光, 四个短边与刀片背部平行, 用于放置刀片。清洗之后, 该硅片将用于刀片安装。为了增加底座的绝缘性, 该单晶硅的体电阻为 $\sim 10^4\text{ }\Omega\cdot\text{cm}$, 且表面设置了 300 nm 的氧化膜。但是, 未来最好使用具有更低损耗因子的玻璃类的基底, 来减小 RF 的损耗^[131]。我们尝试了在硅片和陶瓷之间使用这种方法, 但由于不同材料的热膨胀率不同, 在加热到 $220\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时即观察到断裂。因此在刀片和硅片的固定以及硅片和陶瓷支柱的固定上使用了胶合的方式。

3.3.3 玻璃真空腔

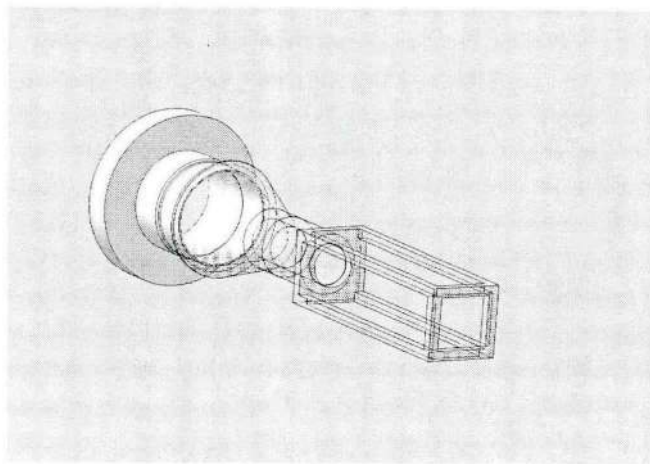


图 3.9 连接到 CF 法兰上的玻璃真空腔。

玻璃真空腔使用硼硅酸盐玻璃 (Pyrex, Corning) 制成, 具有低膨胀率、耐高温、高强度、高硬度和高透光率等优点。腔体由六块玻璃使用原子键合方法制成 (Akatsuki Tech), 能够兼容超高真空环境和高达 $250\text{ }^{\circ}\text{C}$ 的高温。腔体尺寸为 $30\text{ mm}\times 30\text{ mm}\times 100\text{ mm}$, 其厚度为 4 mm , 因此内部尺寸为 $22\text{ mm}\times 22\text{ mm}\times 92\text{ mm}$ 。腔体的四个侧面镀有 $355\sim 500\text{ nm}$ 高透膜, 其中竖直方向为 0° 入射优化, 水平方向为 45° 入射优化。对于 369 nm 激光和 532 nm 的激光, 各个侧面的透过率都大于 95% 。玻璃腔底部开口与一根玻璃转接管键合, 其中一部分 (45 mm 长) 的内径为 17 mm , 会限制真空导气率。玻璃转接管另一端经过扩径后使用玻璃金属键合方法与一个金属 CF 法兰相连, 用于将整个玻璃腔固定在后端的不锈钢真空腔上, 如图 3.9 所示。

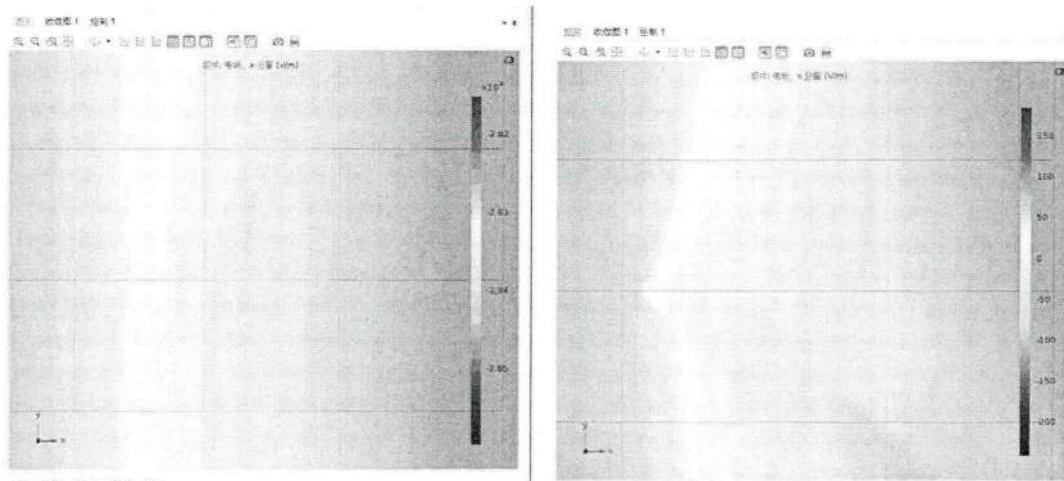


图 3.10 玻璃腔表面电荷引起的杂散电场。在玻璃腔的一侧设置 $100 \text{ e}/\mu\text{m}^2$ 的电荷密度，分别模拟在没有刀片屏蔽（左）和有刀片屏蔽（右）时离子所在位置杂散电场大小。左侧中心值为 $2.83 \times 10^4 \text{ V/m}$ ，而设置刀片接地后，中心电场只剩下小于 20 V/m 。

由于光电效应，材料在激光的照射下会发出电子，而绝缘体则由于电荷无法快速移动产生积累电荷。玻璃腔使用的 PYREX 玻璃的表面逸出功约为 4.6 eV ^[134-135]，且对于 300 nm 以下的波长，该玻璃有较强的吸收。因此玻璃腔表面会产生一定的电荷积累，并有可能影响势阱的稳定性^[136]。然而，由于刀片阱的四个刀片为导体，且将势阱中心包围，能够对外界杂散电场起到良好的屏蔽的作用。使用 COMSOL 数值模拟的方法可以计算该屏蔽效果。在玻璃腔的一侧设置 $100 \text{ e}/\mu\text{m}^2$ 的电荷密度^[137]，分别模拟在没有刀片屏蔽（左）和有刀片屏蔽（右）时离子阱中心杂散电场大小。左侧中心值为 $2.83 \times 10^4 \text{ V/m}$ ，而设置刀片接地后，中心电场只剩下小于 20 V/m 。因此，由玻璃腔充电带来的杂散电场被刀片屏蔽后减弱了三个量级。而剩下的电场强度，不会对离子产生较大的影响，使用 DC 可以较好地补偿^[138]。另一方面，玻璃表面的电荷最终仍然会缓慢地转移。一部分是由于潮湿空气的中和作用，一部分是经过玻璃表面或者体内导到金属接地部位。块状材料的电阻为 $R_v = \rho_v l / S$ ，其中 l 为样品长度（cm）， S 为横截面积（ cm^2 ）， ρ_v 为体电阻系数（ $\Omega \cdot \text{cm}$ ）。材料的面电阻为 $R_s = \sigma_s l / d$ ，其中 σ_s 为表面电阻系数， l 为材料长度， d 为宽度。Pyrex 玻璃的体电阻系数为 $\rho_v = 1 \times 10^{15} \Omega \cdot \text{cm}$ ，面电阻系数为 $\sigma_s = 5 \times 10^{13} \Omega$ ^[139]。因此，对于 $l \approx 20 \text{ cm}$ ， $S \approx 5 \text{ cm}^2$ ， $d \approx 10 \text{ cm}$ 的玻璃腔以及玻璃转接管而言，其外表面电阻约为 $1 \times 10^{14} \Omega$ ，体电阻约为 $4 \times 10^{15} \Omega$ 。同时，玻璃腔外表面对相邻金属真空腔的金属面可以看作是一个电容，约为 10 pF 。则表面 RC 电路的时间常数定义为 $\tau_s = RC \approx 1000 \text{ s}$ ，体电阻和电容的时间常数为 $\tau_v = RC \approx 11 \text{ h}$ 。因此，为了减小该时间常数，就要减小表面电阻，我

们在玻璃腔的外表面使用 $25\ \mu\text{m}$ 的铝线和铜胶带，围绕长方体腔缠绕了 18 圈间距 $5\ \text{mm}$ 的细丝网，该金属网与金属腔体相连接地。使用铜胶带将铝线紧紧贴在玻璃表面。在接触良好的情况下，玻璃腔外表面对地距离大大缩短，表面电阻将会下降，因此表面时间常数也将下降，这有利于表面电荷的转移。

3.3.4 陶瓷支柱和滤波板

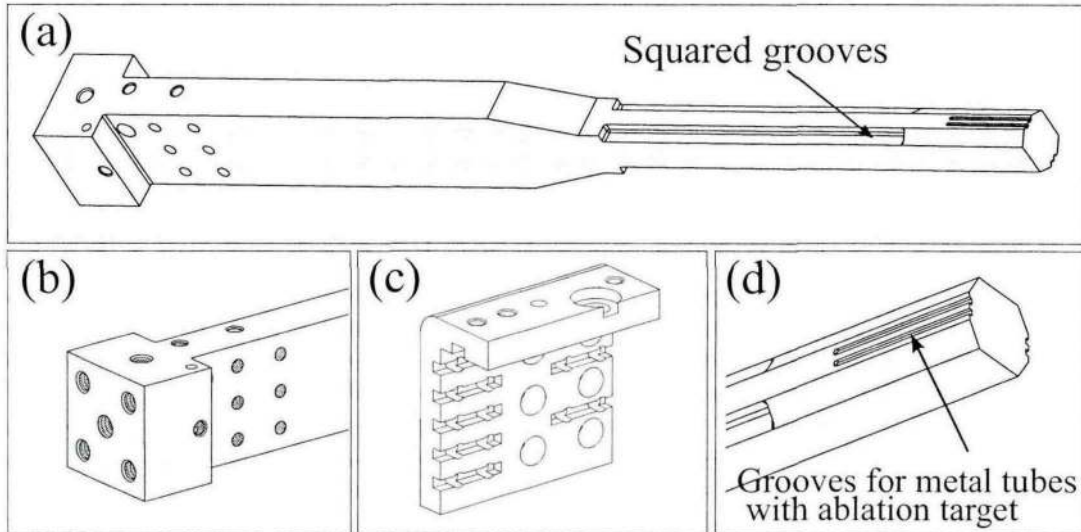


图 3.11 陶瓷支柱和压线板。(a) 支柱的头部用于固定刀片组，并设置有用于固定不锈钢管的细槽 (d)，该不锈钢管夹有 Yb 材料，用于激光剥蚀原子。(b) 支柱的柱身和柱基设置有螺纹孔，用于固定导线以及将支柱固定于不锈钢腔体上。(c) 用于压线的陶瓷压线板。

刀片组固定在硅片固定基板上后，被放在一根 25cm 长的陶瓷支柱上放入玻璃真空腔内。该陶瓷支柱使用 $99\% \text{Al}_2\text{O}_3$ 陶瓷，具有极高的硬度和高达 $\sim 10^{14}\ \Omega\cdot\text{cm}$ 的体电阻，以及 $\sim 10^{-4}$ 的射频损耗 (Loss tangent)。如图 3.11 (a) 所示，该陶瓷支柱共分为四个部分：一个八棱柱形的柱头，一个细长的柱腰，一个长方体的柱身和一个长方体的柱基。其中，柱头与硅片基板形状相同，因此有四个小侧面与刀背平行，有利于引线键合操作。图 3.11 (d) 中柱头上还设置有四个 $0.8\ \text{mm}$ 宽 $10\ \text{mm}$ 长的 U 型槽，用于将四根不锈钢管固定在头部。该不锈钢管的一端夹有 Yb 材料，其表面法线指向势阱中心，用于激光剥蚀 (Laser ablation) 从样品表面激发出原子蒸气，随后在势阱中心处离子化。 $75\ \text{mm}$ 长的柱腰处设置有四个截面尺寸为 $3.5\ \text{mm} \times 2.0\ \text{mm}$ 的空槽，用于增加玻璃管最细处的导气率，从而增加对真空腔的抽气速率。图 3.11 (b) 中长方体的柱身和柱基上设置有多条螺纹孔，将用于将导线与滤波板连接以及将陶瓷支柱牢固固定于不锈钢金属腔上。

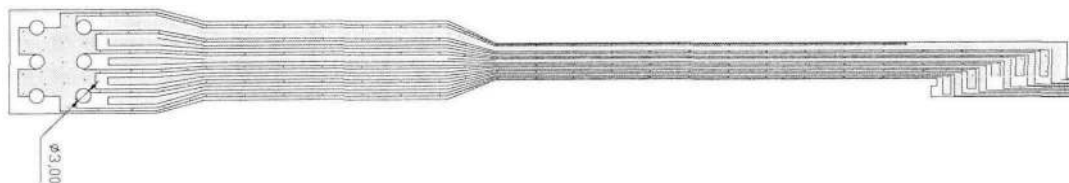


图 3.12 FPC 滤波板上层线路。DC 线被地线包围且底部还有一层铺铜地平面。图中金色部分表示上表面有电路部分，红色小点表示将上下层的地线相连接的过孔。

如图3.11(c)所示，一对陶瓷压线板被用于连接来自真空馈通的导线和滤波板上的导线。该 L 型压线板的一个面用于固定 RF 导线，其上的一个通孔用于将压线板固定在陶瓷支柱上。压线板的另一侧面具有六个通孔，其中三个用于将压线板固定到陶瓷支柱上，另外三个通孔用于将陶瓷支柱经过不锈钢夹具固定在不锈钢真空腔上。这一侧的内部设置有 7 根 U 型槽，每个槽上设置有两个 M3 的螺纹孔。导线插入该 U 型槽中，使用基米螺丝将其压紧在滤波电路板的导线上。滤波板使用的是柔性电路板（FPC）。我最初的想法是使用陶瓷金属化技术，在陶瓷表面刻上一定厚度的铜线。但是由于所用陶瓷为 99 % 氧化铝陶瓷，与陶瓷金属化所需陶瓷（96 %）不同，最终没有使用该方案。相比之下，FPC 具有诸多优点。首先其易于加工制作，制作周期短，易于设计迭代。第二 FPC 的加工工艺精细，能够制作宽度低至 $100\ \mu\text{m}$ 的导线且保持良好的质量。第三，使用的 FPC 具有双层铺铜面，且具备过孔等工艺。第四，该材料使用压延法制备，不使用胶水，因此能够超高真空兼容。基于上述优点，我最终选择了 FPC 制作滤波电路板，如图3.12所示。该电路板分为三层，第一层是 $35\ \mu\text{m}$ 厚的铜电极层，其上电极表面具有 $100\ \text{nm}$ 的金层，中间层为 $25\ \mu\text{m}$ 的聚酰亚胺薄膜，第三层为厚度为 $35\ \mu\text{m}$ 且镀金的接地层。接地层能够有效增加 DC 电路对地电容，减小 DC 滤波回路的电感，因此有助于减小 RF 信号在 DC 上感应的噪音。另外，接地层和上层电路覆盖了 95 % 的聚酰亚胺薄膜表面，有助于降低该材料表面的放气率。使用真空胶水（SPI#05106C-AB）将 FPC 粘在陶瓷支柱上，经过 $200\ ^\circ\text{C}$ 加热 1 小时，即可将其固定。在靠近柱头的区域设置有焊接电容的地方。每一条 DC 都经过一个 $870\ \text{pF}$ 的电容接地，因此可以将 RF 电极感应到 DC 电极上的噪音过滤。RF 电极使用一根 $20\ \text{cm}$ 长 $\times 3\ \text{mm}$ 宽 $\times 200\ \mu\text{m}$ 厚的银箔，同样使用真空胶水固定在陶瓷柱上。该银箔表面使用磁控溅射镀膜镀有 $100\ \text{nm}$ 厚的金层，有助于引线键合。使用数值模拟，得到该导线与地线之间的寄生电容约为 $16\ \text{pF}$ ，因此会增加刀片阱的电容，从而降低螺旋谐振腔能够达到的 Q 值。在未来可以选用多根镀银导线缠绕而成的绝缘线缆，在保证表面积较大的同时，能够将寄生电容降低至 $5\ \text{pF}$ 以内。陶瓷支柱的四周共有两个 RF 电极和两个 DC 滤波 FPC，都使用陶

瓷压线板固定在陶瓷支柱上，从真空馈通引出的导线被压在陶瓷压线板的凹槽内，与 FPC 和 RF 银箔连接。

3.3.5 组装

下面介绍刀片阱的组装。

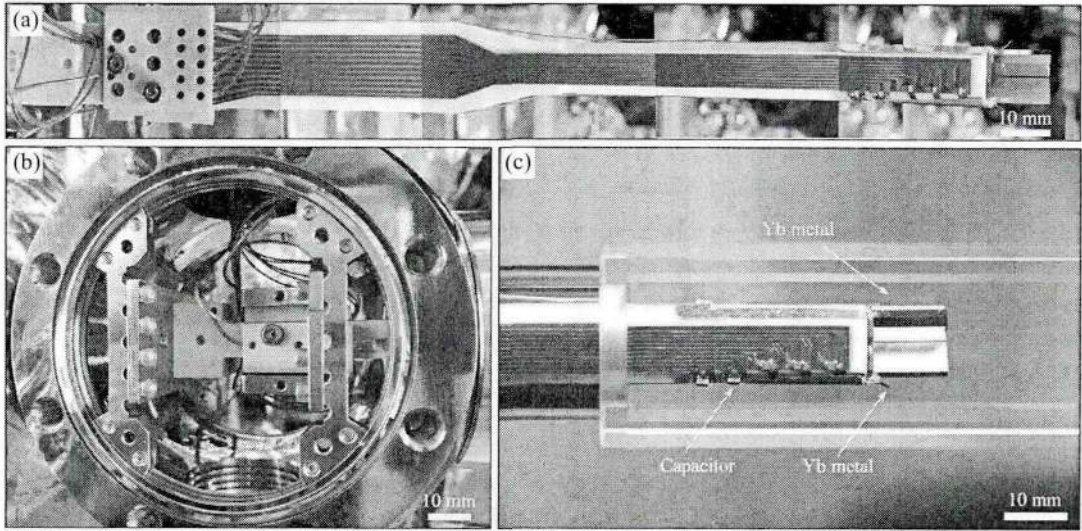


图 3.13 刀片阱组装。(a) 组装完成的阱，还没有装入真空腔（该图片由多组图片组合而成）。刀片已经固定在陶瓷支柱的顶部，使用引线键合与固定在支柱侧面的 FPC 滤波板连接。FPC 上可以看到五个 870 pF 的电容，用于 DC 的滤波。在左侧，导线已经被陶瓷压板固定在 FPC 上。(b) 装入不锈钢真空腔。陶瓷支柱被两侧以及底部的共计三个不锈钢夹具固定到 4.5 英寸的不锈钢真空腔上。(c) 装入玻璃真空腔的刀片阱。可以看到滤波电容和三组 Yb 靶材。

在组装之前，所有部件都被丙酮和超声浴彻底清洗，并用铝箔纸包裹。在实验室内，使用层流罩提供负压环境，以减少落尘。不锈钢真空腔、真空规、真空管道、阀门和内部的螺丝等金属件先被组装起来进行预烘烤。将该空腔连接到涡轮分子泵上，加热到 250 °C 烘烤一周。建议烘烤温度为 400 °C 以上，但由于我们使用了错误型号的温度探头，最终实际只加热到了约 250 °C。但已经观察到金属表面变色，出现了氧化痕迹。图3.13所示的装置安装步骤如下：

1. 硅片基板放置于显微镜下，使用针管蘸取超高真空胶水 (SPI#05106C-AB) 均匀涂抹在四个固定槽中。将刀片放于槽内，在胶水变干之前，有 5-10 分钟的时间对齐四个刀片。由于刀片底部和硅片槽的表面平整度很高，刀片能够较容易地对齐。然后，刀片组和硅片被放置于 10^{-4} torr 的真空环境中在 2 小时内加热到 200 °C 进行烘烤。真空环境有利于排出胶水内的气泡。观察到烘烤导致的位移在 5 μm 以内。
2. 将陶瓷电容 (0603D102J101PXH, Novacap) 用胶水粘在 FPC 合适的位置，

在空气中加热到 200 °C 持续 1 小时。将 RF 的银箔导线和 DC 的 FPC 滤波板粘在陶瓷支柱上，放置于真空环境内加热 2 小时固定。

3. 将自然丰度的 Yb 靶材切成小片，夹在直径 0.8 mm 长度 15 mm 的不锈钢管一端。将三个（最多四个）不锈钢管放置于陶瓷柱头部的凹槽内。将粘好的刀片组和硅片用真空胶水粘到陶瓷支柱头部。调整 Yb 靶材的表面朝向阱中心。整体放置于真空内加热到 200 °C。在加热期间，保持陶瓷支柱竖直，防止刀片组整体滑动。在实验时陶瓷支柱具有约 10° 的倾角，导致最终硅片向一侧位移了 0.8 mm。
4. 使用引线键合机将电容与 FPC 板连接。每个电容的每端使用不少于 2 根引线（25 μm 直径的铝线或者金线）。再将所有刀片与 FPC 和银箔相连，每个 DC 电极的引线不少于 5 根，每个 RF 电极的引线不少于 15 根。
5. 使用陶瓷压线板将电线固定在陶瓷支柱上的电路上。使用短电线将左右两侧 FPC 滤波板的地连接起来，并将 FPC 的地平面与不锈钢金属腔在内部相连确保接地良好。电线通过 12 针 PEEK 连接器接到真空馈通上，包括两根地线和 10 根 DC 导线。
6. 将陶瓷支柱穿过不锈钢真空腔的一个 CF35 法兰，使用不锈钢夹具固定到不锈钢真空腔上。使用一维导轨缓慢地将玻璃真空腔法兰套在陶瓷支柱上，并固定在不锈钢真空腔上。
7. 连接其他真空装置，连接真空泵，开始抽真空。

3.3.6 真空制备

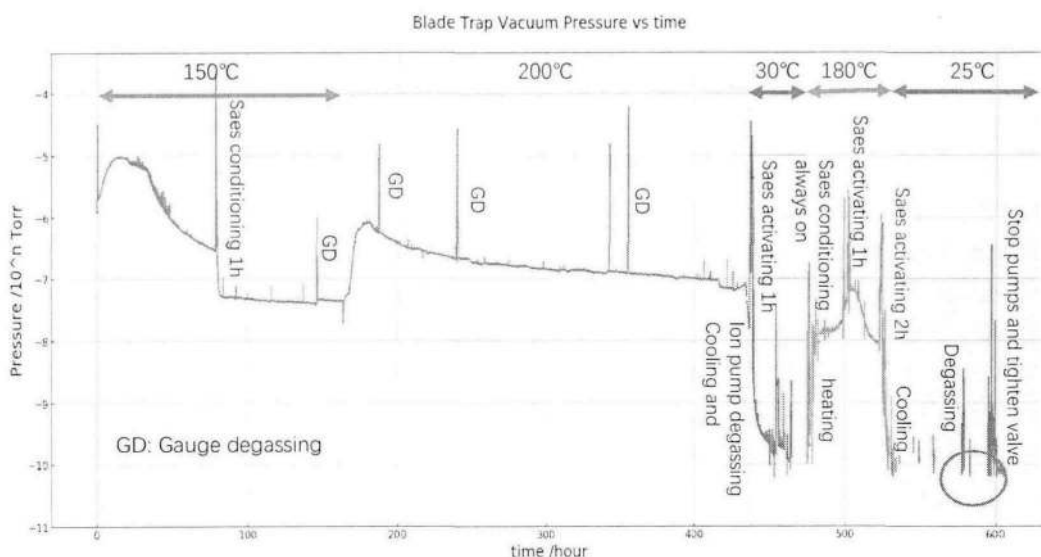


图 3.14 真空制备时离子规示数。在封闭阀门之前，真空规示数在 1×10^{-10} torr 附近。

NEXTORR D 200-5
Typical Current vs Pressure Curves (for N₂)

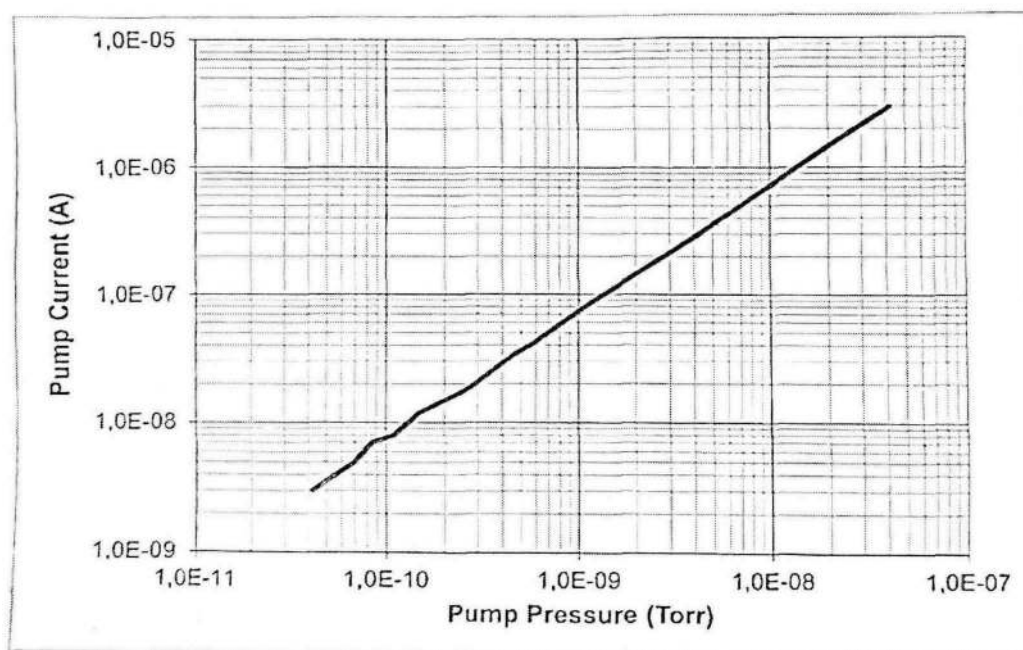


图 3.15 SAES 公司提供的离子泵电流与氮气气压关系曲线。

我们关心的一个问题是这个装置的真空能否达到要求。前面提到的玻璃真空腔的最细部分的直径只有 17 mm，其中陶瓷支柱又占据了约三分之一的横截面积。这会导致气导率的降低，从而降低抽速。所以陶瓷支柱已经设置了四个凹槽，但理论算出在该处最大的抽速大约只有 5 L/s。具有较大面积的 FPC 是主要的放气源。所以在 FPC 两侧都覆盖金属，这有助于降低放气率。所用的超高真空兼容胶水也会放气，因此在固化时将其放置于真空环境，以排出其中的气体。在固定陶瓷支柱时使用的螺丝将会导致部分气体被封闭在陶瓷支柱的螺丝孔内，这些气体具有漫长的放气速率，因此使用了中间钻孔的螺丝，使得封闭在其中的气体能够快速排出。

在不锈钢真空腔上安装了一个 200 L/s 的 NEX Torr D200-5 型非蒸发型吸附剂泵 (Non-evaporable getter pump, NEG)。该泵对于氢气具有 100-200 L/s 的抽速，而且对氧气、氮气、水蒸气等都具有较高抽速。但是对于惰性气体，尤其是氦气的抽速为零。因此该泵还附加了一个对氦气有 6 L/s 抽速的小型离子泵。真空腔经一个金属直角阀门连接到 100 L/s 的涡轮分子泵 (Hi Cube 800, Pfeiffer

Vacuum) 上, 其后接一个小型分子泵和机械泵组成的前级真空泵。关于各种真空泵, 可以参考文献^[140]。整个真空腔使用加热带被加热到 220°C 维持 25 天, 其间 NEG 泵被激活四五次。在冷却到室温后, 关闭阀门。在此期间的真空规示数如图 3.14。在刚关闭阀门并刚冷却到室温后, 使用离子规测量到的真空为 1.0×10^{-10} torr ($1 \text{ torr} = 133.322368 \text{ Pa}$), NEG 泵所带的离子泵电流示数为 1-2 nA, 这都表明真空并没有到达预期, 1.0×10^{-11} torr。由于打开和关闭真空规会导致离子泵示数上升到 1-3 nA。关闭真空规, 在一天后离子泵的示数降低为 0 nA。短暂地打开真空规, 能够测到真空为 8.6×10^{-11} torr, 但之后离子泵电流便又处于 1 nA 左右。这可能是由于在开启真空规时, 真空规加热周围管壁(真空规网罩与周围管壁距离仅 2 mm), 于是会导致表面放气加剧, 从而影响自身读数和离子泵的电流。记录离子泵的电流并计算其每 10 秒的平均电流, 与真空规的读数对比发现, 当真空规示数为 1×10^{-10} torr 时, 离子泵平均电流为 0.53 nA, 而关闭真空规后, 离子泵平均电流小于 0.05 nA。因此可以推断, 在不锈钢金属腔内, 气压应小于 1×10^{-10} torr。如图 3.16 所示, 使用 $P_{\text{ionpump}} = 14 * \frac{\bar{I}(\text{A})}{75}$ 可以将离子泵的电流与真空规的气压很好地匹配起来。其中 $P_{N_2} = \frac{\bar{I}(\text{A})}{75}$ 为 SAES 提供的该离子泵对氮气的电流-气压关系曲线, 如图 3.15 所示。而系数 14 为拟合的比例系数, 可能是由于离子规和离子泵所处位置的真空度不同导致的。也就是说离子泵被吸附剂包裹, 周围具有更好的真空。当然, 这只能作为一个粗略的估计, 实际的气压可以使用离子链受到背景气体碰撞实验来测量^[54]。

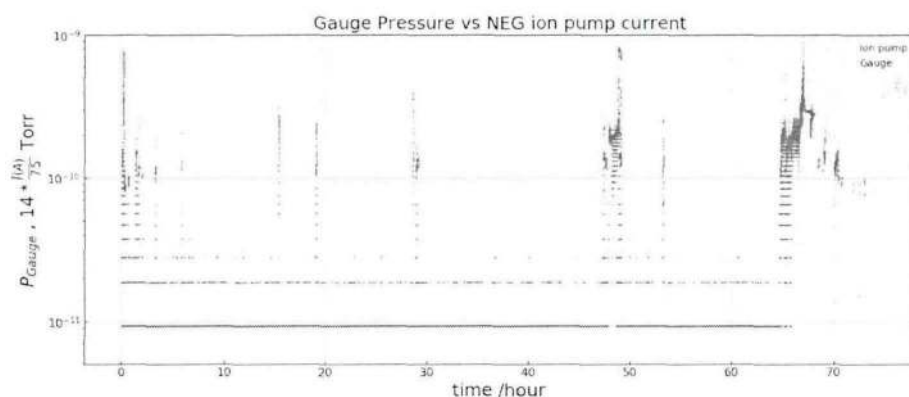


图 3.16 离子泵平均电流与真空规示数对比。封闭阀门后的三天内, 记录 SAES-D200 的离子泵电流 I , 并计算 10 s 内的平均电流 $\bar{I}$ (工作电压 5000 V)。在开启离子规时, 离子规示数如红点所示上升到 1×10^{-10} torr ($1 \text{ torr} = 133.322368 \text{ Pa}$) 时, 离子泵平均电流(右侧纵坐标)上升到 0.53 nA。关闭离子规时, 离子泵的平均电流降低为 0.05 nA。从图中可以得到 $P_{\text{gauge}} \sim 14 \times \frac{\bar{I}(\text{A})}{75}$ 的关系。

3.3.7 光学平台

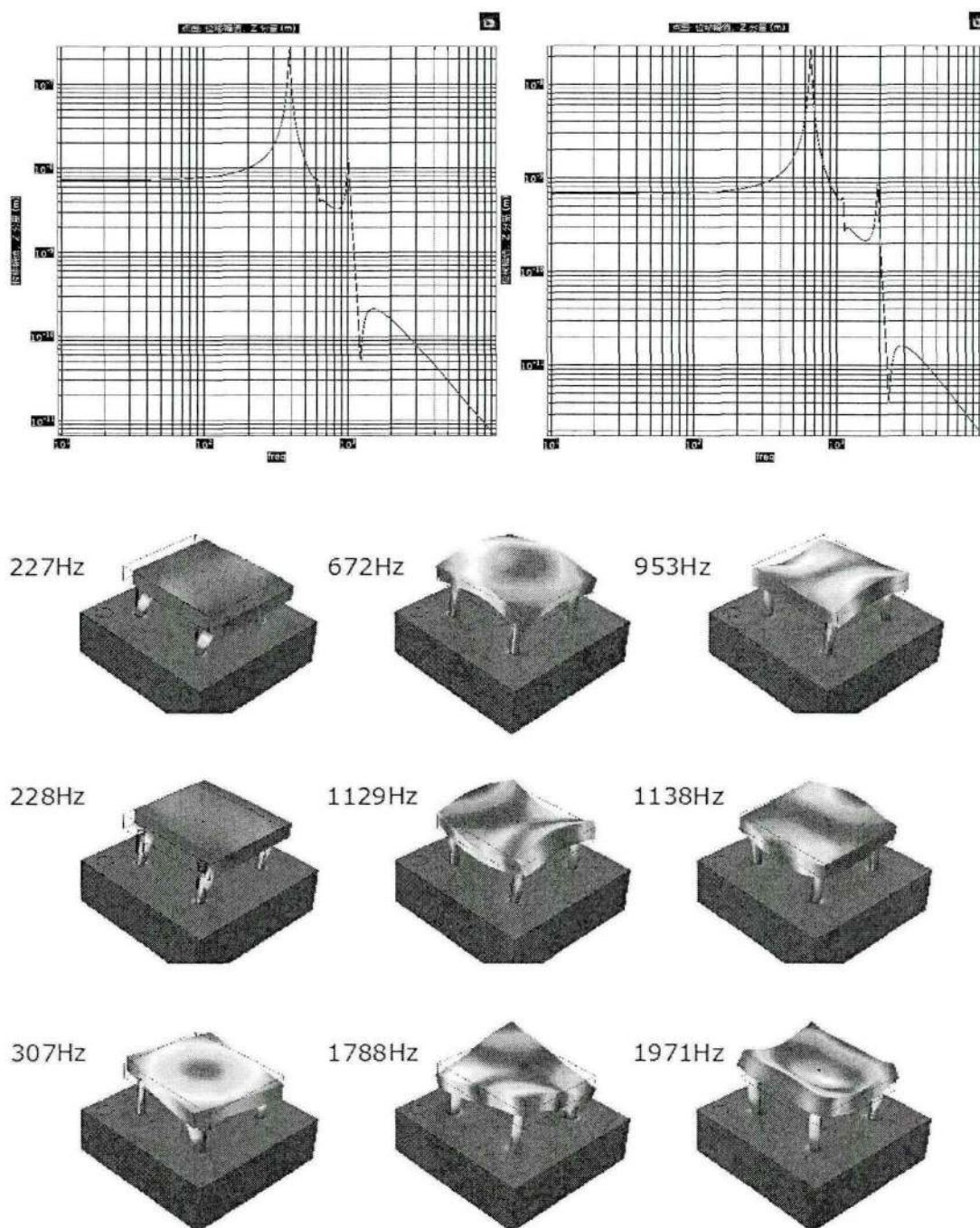


图 3.17 上图：四角固支的花岗石平台的竖直方向（Z 轴）振动幅度频率响应曲线。左图为 3cm 厚，右图为 10cm 厚的台子。下图：10cm 厚平台的振型。由于第一和第二幅图中只显示 Z 轴的位移，低频的三个模式并没有影响，因此在图中没有共振峰。

在真空制备完成后，整个装置被固定在一个花岗岩光学平台上。该平台的尺寸为 $60\text{ cm} \times 70\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ ，由四根长 20 cm 直径 3.8 cm 的支柱支撑并固定在

3 m×1.8 m×0.3 m 的光学平台 (Newport) 上。该石板下表面和上表面各自铺设一层 2 mm 厚的坡莫合金, 将在未来组装成一层磁屏蔽罩, 有利于增加量子比特的相干时间^[141]。石板的最上层为一层 19 mm 厚的铝面包板, 用于固定光学器件。花岗岩平台具有比金属平台更低的热膨胀系数, 且不带有磁性, 表面变形小。

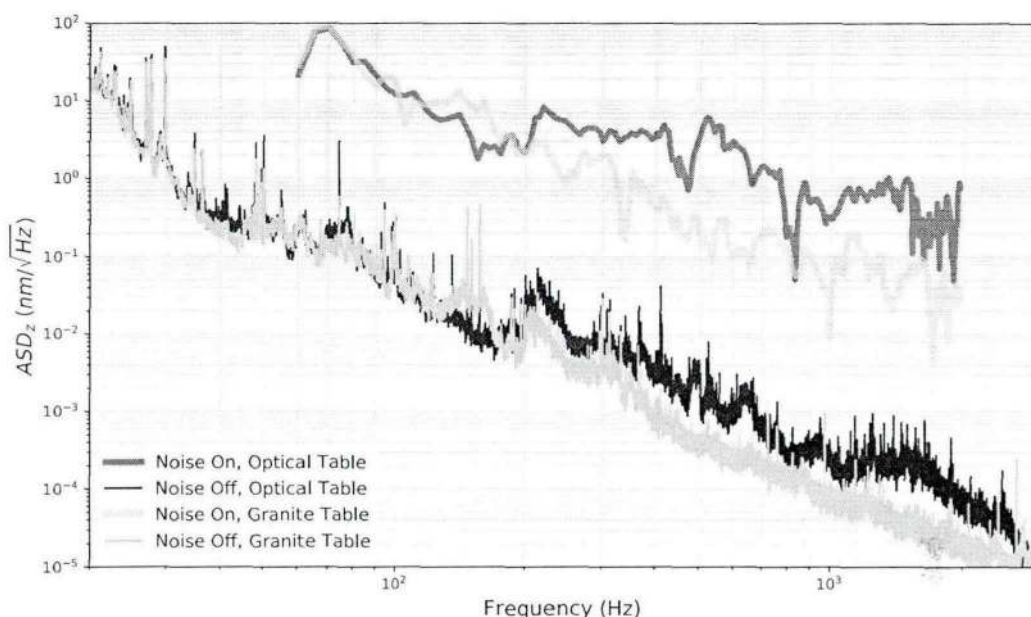


图 3.18 光学平台和花岗岩平台的振幅谱密度 (Displacement amplitude spectral densities, ASD)。其中, 点 1 (蓝线) 位于光学平台上, 花岗岩平台旁边。点 2 (黄线) 位于花岗岩平台上。振动源关闭时 (下侧细线), 两个点的 ASD 相当, 仍能看出花岗岩平台整体低于光学平台。振动源开启时 (粗线), 扫描振动频率, 并取其每个振动频率对应的峰值 ASD。此时花岗岩平台表现出比光学平台更低的峰值 ASD。尤其在 200 Hz 以后, 光学平台的振动愈加明显而花岗岩平台基本保持平稳趋势。

光学平台的一个作用是提供稳定的实验平面, 隔绝外界的振动噪音。实验室的振动来源于地铁、公交、行人和其他自然环境, 也来源于实验室内的仪器设备。使用气浮的光学平台能够帮助减小环境振动噪音。而在光学平台上的振动, 则会由光学平台传递到花岗岩平台上, 进而导致激光相对离子的位移。为了衡量该抖动的形式, 我们进行了数值模拟和实验检测。首先, 在 COMSOL 中模拟该平台的振动模式, 即振型。在大理石表面施加 1 N 的作用力, 计算其上表面中心点的振动幅度随频率的变化。如图 3.17 所示, 相比于 3 cm 厚的平板, 10 cm 厚的平板具有更高的固有振动频率和更小的振动幅度。因此, 使用厚的平板有利于减小振动。10 cm 厚的平台具有若干个固有频率, 如 670 Hz 和 1900 Hz 附近。图中还展示了 10 cm 平台的振型与频率, 其中我们关注的是会引起竖直方向 (Z 轴) 位移的振动模式。

使用加速度计 (CT1050LC, 灵敏度 500 mV/g, Chengtec) 分别测量光学平台

台面和花岗岩平台台面在无激励和有激励时的振动响应。外部激励通过在光学平台中心位置固定一个共振扬声器（最大功率 8 W）实现，其中扬声器关闭对应无激励，即日常工作时的场景；而扬声器打开时，则为有外部激励。使用 Welch 方法计算加速度信号的能量谱密度（Power spectral density, PSD），并由此计算振幅谱密度（Displacement amplitude spectral densities, ASD），其中 $ASD = PSD/(2\pi f)^4$ ，单位为 nm^2/Hz ，在图中展示的为 $\sqrt{ASD}$ ，单位为 $\text{nm}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。从图3.18可以看出（细线部分），两个台面的振动本底是大致相同的。二者在小于 200 Hz 的区域都有一些振动峰。这些振动来自于实验室内的仪器设备，以及大地传导的振动。而在 200 Hz 以后，花岗岩台面的 ASD 整体略低于光学平台台面。在有外界激励时，将共振扬声器固定在距离两点 2 m 处，扫描输入信号的频率，即可产生变化频率的振动激励信号。对于每个频率，持续激励 400 ms，使用采样率 20 kHz 的数据采集卡得到此期间的加速度数据，使用 Welch 方法得到该频率对应的 PSD 峰值，并计算其对应的 ASD。从 50 Hz 到 2000 Hz 扫描信号的频率，即可得到所有频率对应的 ASD 响应，如图3.18中的粗线部分。在外界激励开启时，对于 100 Hz 以内的频率，二者具有相同的 ASD 响应；在 100 Hz 到 200 Hz 的频率范围内，花岗岩平台的响应略大于光学平台；在 200 Hz 以后，则光学平台的响应大于花岗岩平台，且差异越来越大。对于 100 Hz 到 200 Hz 的频率范围，虽然花岗岩平台展现出比光学平台略大的振动响应。但是这个模式为花岗岩平台整体的共模振动，并不会影响花岗岩平台上光路的相对变化。而高于这个范围的频率，花岗岩平台则展现出一定的隔振能力。因此，花岗岩平台的振动特性满足实验要求。

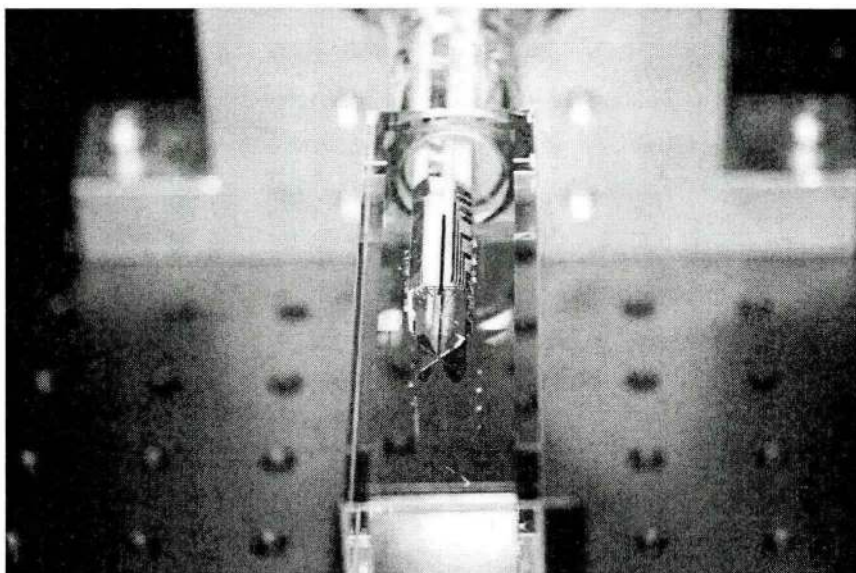


图 3.19 安装好的刀片阱。照片由李睿睿拍摄。

最终安装完毕的离子阱如下图3.19。接下来一章，将介绍离子阱的测试。

第4章 刀片阱的测试

本章主要介绍新型高通光刀片阱的测试工作，包括激光光路的设计和搭建、激光频率的稳定、成像系统、电子控制，以及捕获离子和测试。

4.1 螺旋谐振腔

为了给 RF 电极提供高达上百伏和几十兆赫兹的射频信号，需要使用谐振电路来匹配信号源和离子阱的阻抗，并且放大信号源的信号。谐振电路分为两个部分，共振电路和阻抗匹配电路。离子阱本身可以作为一个 RF 对地的电容 C_i ，因此谐振电路可以使用串联 LC 电路来实现，其中 L 为高 Q 值电感，C 为 C_i ，一般为 5-50 pF。共振时 L 和 C 的阻抗值相等，符号相反，因此总电抗为 0。此时 $\omega_0 L - 1/\omega_0 C_i = 0$ ，因此共振频率为 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_i}$ 。由于系统不可避免地含有电阻 R_i ，包括共振电感和离子阱本身的电阻，以及损耗产生的等效电阻，因此整个电路得 Q 值为

$$Q = \omega_0 L / R_i = \frac{1}{R_i} \sqrt{\frac{L}{C_i}} = \frac{1}{\omega_0 R_i C_i} \quad (4.1)$$

最终的电压增益 G 正比于 Q [142]。可见，要想以较小的输入功率得到较大的 RF 电压，一定需要高的 Q 值。得到高 Q 值谐振，必须减小线路的电阻。

为了更好地将电源的功率传输到阱上，并且减小反射功率，需要使用阻抗匹配线路将电路的等效阻抗与信号源的阻抗匹配起来。只有当信号源与传输线的阻抗相等时，信号才能够最好地传输。在共振时，共振电路部分的阻抗只剩下 R_i 。一般来说， R_i 为几个欧姆，小于信号源阻抗 50 Ω 或 75 Ω 。因此需要将负载阻抗升高。常使用 L 型匹配线路，并联一个匹配电感 L_m 将共振频率时电路阻抗的实部提升为源阻抗，再串联一个电容 C_m ，将剩余的阻抗虚部抵消为零。

实际上，在离子阱中常用的谐振器件为螺旋谐振腔 (Helical resonator) [143]。螺旋谐振腔也可被视为一个共振电路和一个阻抗匹配电路。其中共振电路由一个大金属线圈构成的电感 L_h ，以及 $C = C_i + C_h$ 组成 LC 谐振电路，其中 C_h 表示螺旋谐振腔引入的电容。而阻抗匹配使用一个小线圈与大线圈的互感实现。通过调节小线圈的尺寸和位置，能够非常好地实现阻抗匹配。螺旋谐振腔的 Q 值可以做到上千，电压增益也可以做到几十到上百倍。因此，螺旋谐振腔不仅能够起到电压增益的作用，还是一个非常好的滤波器。当不接负载时，螺旋谐振腔的共振频率主要由金属线圈的伸直总长度 l_c 决定，其共振频率可以使用四分之一波长同轴谐振腔的公式来计算，即 $f_0 = c/4l_c$ ，其中 c 表示光速。这表明共振电磁波的波长为同轴导线长度的四倍。接入负载后，需要使用 LC 电路来分析，例

如文献^[143]中将螺旋谐振腔等效为一个电路，并给出了计算的方法。

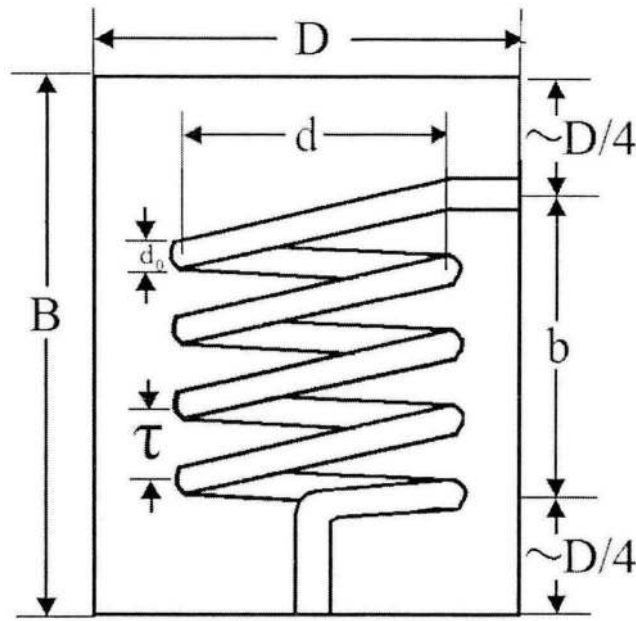


图 4.1 螺旋谐振腔尺寸。图片来自文献^[143]。

螺旋谐振腔的 Q 值可以逆向使用定向耦合器来测量，即信号源经放大后接入耦合器的输出端，耦合器的输入端接入螺旋谐振腔，被螺旋谐振腔反射的功率再次经过定向耦合器，并按照固定比例进入耦合端口。改变频率，并记录耦合端口的信号功率，能够得到反射功率随频率变化的曲线^[143]。则 Q 值可以表示为 $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_p} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_v}$ ，其中 $\Delta\omega$ 表示反射功率的 -3 dB 带宽， $\Delta\omega_v$ 表示反射电压最大值 $1/\sqrt{2}$ 处的全宽^[144,142]。实验上测得单线圈的共振频率为 $2\pi \times 23$ MHz，接近设计参数。但是其 Q 值只有 20，意味着电压增益也不会很高。因此，我制作了第二个螺旋谐振腔。其具有两个线圈，能够同时给两个 RF 电极施加 RF 信号和偏置电压，因此更符合实验要求。两个谐振腔的参数见 4.1。第二个谐振腔增加了线圈数至 12 圈，共振频率为 $2\pi \times 14.45$ MHz，但 Q 值也只有 30。更高的 Ω_{RF} 会导致更低的势阱深度和更低的运动频率，但低的 Ω_{RF} 会导致束缚不稳定（Mathieu 方程中的参数 q 正比于 $1/\Omega_{RF}^2$ ）。离子稳定束缚的经验范围为 $\omega_{axial} < \Omega_{RF}/5 = 2\pi \times 3$ MHz，这对离子的运动频率提出了上限，即 RF 的电压不能过高，同时也降低了对螺旋谐振腔电压增益的要求。第二个螺旋谐振腔如图 4.2 所示，在连接到阱上时，真空馈通的两根没有连接的导线为地线，将会被固定到螺旋谐振腔下盖的螺纹孔处完成接地。谐振腔内部的两个线圈在末端用 $1\mu\text{F}$ 电容连接，以降低二者相位差引起的加热^[145]。定向耦合器的测量表明，输入功率 24 dBm，反射功率为 -1.5 dBm，则 99.7 % 的功率被输入到阱内。实验上第二个谐振腔能够正常束

缚多个离子，因此并没有进一步更改设计。未来可以制作一个频率更高一些的螺旋谐振腔，并具备更高的 Q 值和电压增益。

参数	1 号	2 号
线圈数	单线圈	双线圈
材料	黄铜	黄铜
D	100	100
d	50	55
τ	10	10
d_0	5	2.5
b	75	110
B	125	125
估计 C_l (pF)	33*	27
估计 R_l (Ω)	0.2*	6*
空载实测 $\omega_0/2\pi$ (MHz)	80	42
空载实测 Q	100	266
接阱理论 $\omega_{theory}/2\pi$ (MHz)	$2\pi \times 22$	$2\pi \times 14$
接阱实测 $\omega_{measure}/2\pi$ (MHz)	$2\pi \times 23$	$2\pi \times 14.4$
接阱理论 Q_{theory}	210	60
接阱实测 $Q_{measure}$	20	28
接阱理论 G_{theory}	400	-
$G_{measure}$	-	13.16

表 4.1 两组螺旋谐振腔的参数。* 表示设计时使用的阱的电容和电阻的估计值。尺寸单位全部为 mm。

为了理解 Q 值不高的原因，我们仔细分析了该离子阱的内部参数，即 C_l ， L_l 和 R_l 。由于只能在外侧进行分析，我采用了三种方法。第一，通过 COMSOL 数值模拟，得到由于 FPC 引入的电容为 15 pF，RF 电极对地电容为 2 pF，由于真空馈通和电线引入的电容为 10 pF，因此总电容为 27 pF 左右。第二，使用 LCR 测试仪测得电容为 35 pF（测量频率 10 kHz）。第三，使用网络分析仪测量 Smith 圆图，得到的结果如图 4.3 所示。可见 RF 电路在 $\omega_r = 2\pi \times 84$ MHz 处共振，而在 $\omega_{rf} = 2\pi \times 14.45$ MHz 处的电抗为 -392 Ω ，阻抗为 393.1 Ω 。因此可以得到 $1/\sqrt{L_l C_l} = \omega_r$ 和 $\omega_{rf} L_l - 1/\omega_{rf} C_l = -392$ ，可以解得 $L_l = 131.2$ nH， $C_l = 27.4$ pF。使用其他频率的阻抗能够得到接近的结果。因此，上述三种测量结果给出了一致的结论，即 $C_l = 27 \sim 30$ pF， $L_l = 131.2$ nH， R_l 为 6 Ω 。其中电阻可以从



图 4.2 螺旋谐振腔。左图：螺旋谐振腔的外壳、上盖和下盖。右图：2 号双线圈谐振腔内部图。

图4.3中得到， $R = 0.12 \times 50 = 6 \Omega$ 。同样，从式4.1也可以计算出等效串联电阻为 6.6Ω 。该电阻大于实际测量到的在直流情况下的结果 (小于 1Ω)。一个可能的解释是线路中的损耗较大，造成了较大的等效电阻。硅片固定基板由两层单晶硅制成，硅片的损耗因子 (Loss tangent) 约为 0.01 的量级^[132,146-147]。底部硅片的表面只具有 300 nm 的氧化层，而上基板的凹槽侧面经激光切割后硅基底直接暴露在外，因此 RF 电极的底部有 $11 \text{ mm} \times 0.5 \text{ mm}$ 的表面与上层硅片近距离接触而产生损耗。

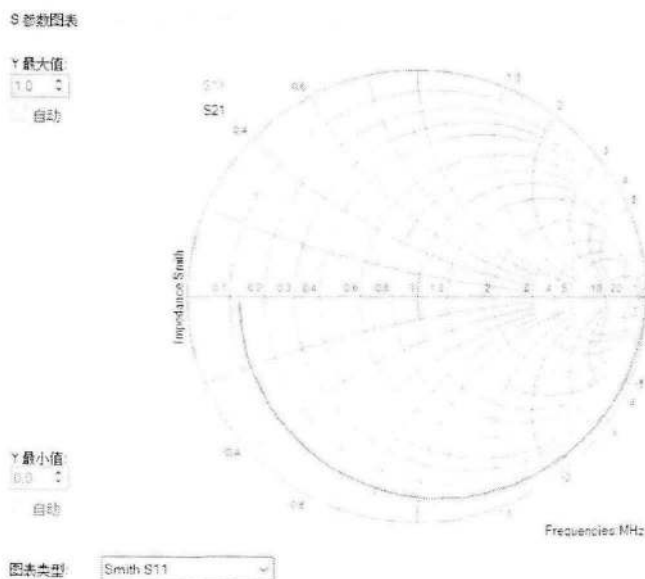


图 4.3 从真空馈通处测量到的 RF 电极 Smith 图。

将上述 C_i , L_i 和 R_i 的数值带入螺旋谐振腔的模拟程序，能够得到如图4.4的

结果。其中可以修改的变量为线圈所用铜线的直径 d_0 和线圈之间间距与直径比 τ/d_0 ，目前的 d_0 和 τ/d_0 为图中的红星所在位置。可见，想要继续提高共振频率或者提高 Q 值都将使得另一个参数变小。因此当前的工作点是比较均衡的结果。

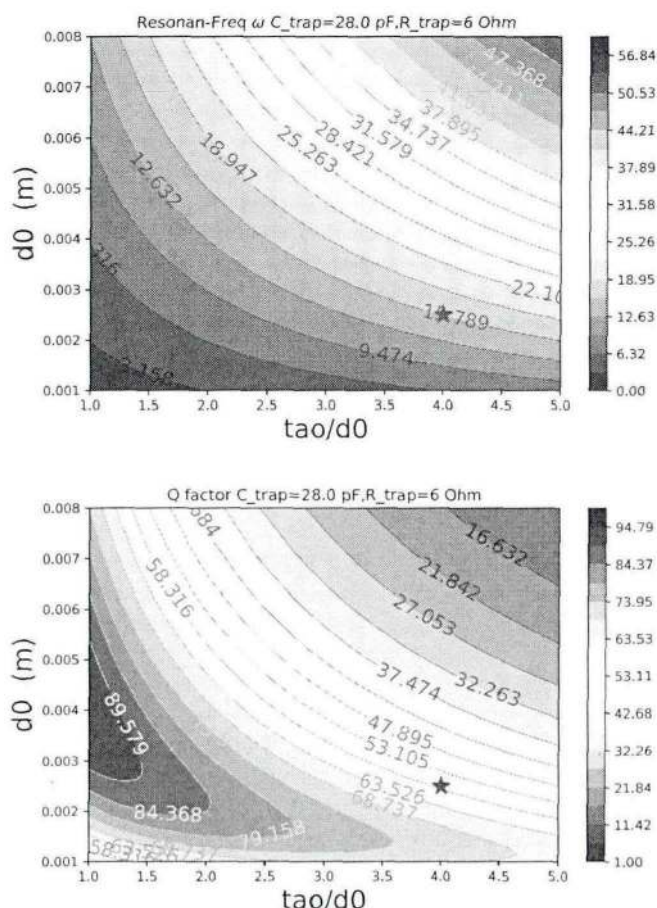


图 4.4 螺旋谐振腔的 Q 值和共振频率随线圈尺寸的关系。其中， $C_l = 27 \text{ pF}$ ， $L_l = 131.2 \text{ nH}$ ， $R_l = 6 \Omega$ 。目前的 d_0 和 τ/d_0 为图中的红星所在位置。

实际的电压增益可以使用电容分压来测量^[148]，也可以根据测量得到的离子运动频率和势阱数值模拟相结合来分析。首先校准放大器的输入功率 P_{in} 和输出功率 P_{out} 的关系。使用微波功率计测量，并拟合得到 $P_{out}(\text{dBm}) = 0.930P_{in}(\text{dBm}) + 44.224$ 。可见，信号源输出的功率 P_{in} 经过 7% 的电缆损耗和插入损耗后（-0.315 dB，来源于线路中的三条 SMA 线），经过放大器（ZHL-5W-1+，Mini circuit）的增益为 44.2 dB，而后输出到螺旋谐振腔的输入端口。根据第一种方法，使用一个分压比 500 : 1 电容分压器，将其输入端接到 RF 的真空馈通和螺旋谐振腔连接处，经同轴线将输出端接到示波器上。射频输入功率 2 W 时，测到的信号幅度为 420 mV，对应 210 V 的电压，因此电压增益约为 $G = 15$ 。我们也使用了第二种方法。在囚禁单离子后，在 DC3 上施加一个 $V=100 \text{ mV}$ 射频信号，扫描该信号的频率（见 4.5 节）。当射频信号与离子的运动频率相等时，离子会被明显加热而发生

大范围的运动。通过观察离子的成像，即可得到三个方向的运动频率。改变螺旋谐振腔输入电压 U_{in} ，即可改变这三个运动频率，进而得到 U_{in} 与频率的关系。如图4.5所示，得到 $\omega_{x,y}/(2\pi \text{ MHz}) \approx 0.154U_{in}$ 。另一方面，使用之前介绍的数值模拟，可以根据运动频率反推在刀片上的电压 U_{RF} ，得到 $\omega_{x,y}/(2\pi \text{ MHz}) \approx 0.0117U_{RF}$ 。因此螺旋谐振腔的电压增益即可表示为：

$$G = \frac{U_{RF}}{U_{in}} = \frac{0.154}{0.0117} = 13.16 \quad (4.2)$$

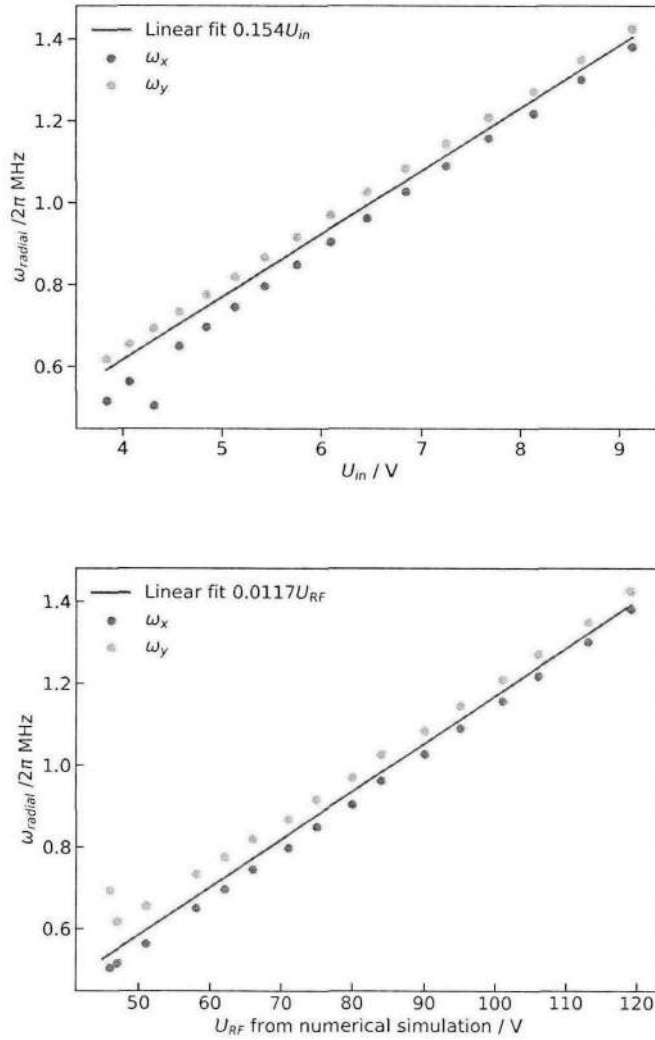


图 4.5 螺旋谐振腔校准。左图横坐标表示螺旋谐振腔输入端电压 U_{in} ，纵坐标表示离子径向运动频率，拟合为 $\omega_{x,y}/(2\pi \text{ MHz}) \approx 0.154U_{in}$ 。右图为数值模拟的理论输出电压 U_{RF} 和离子径向运动频率的关系，拟合为 $\omega_{x,y}/(2\pi \text{ MHz}) \approx 0.0117U_{RF}$ 。因此谐振腔的电压增益为 $G = 0.154/0.0117 = 13.16$ 倍。

4.2 直流电压源与滤波

使用 16 通道 $\pm 14\text{ V}$ 的稳压电源 (BS Series, Stahl) 提供 DC 电极上的电压, 其分辨率可达 $50\text{ }\mu\text{V}$ 。该电源本身具有低通滤波器, 但我们仍然制作了一个 10 通道的低通滤波板, 进一步降低噪音。主要的元件为截止频率 0.5 MHz 的滤波元件 (L pF-B0R3+, Minicircuit)。为了进一步提升高频的滤波能力, 串联了四个 RC 低通滤波器, 其频响曲线如图 4.6 所示。整个滤波器被封闭在一个金属盒内, 隔绝实验室环境中的电磁场噪音。实测的 -3 dB 频率为 50 kHz , 在大于 1 MHz 时衰减 80 dB 以上。

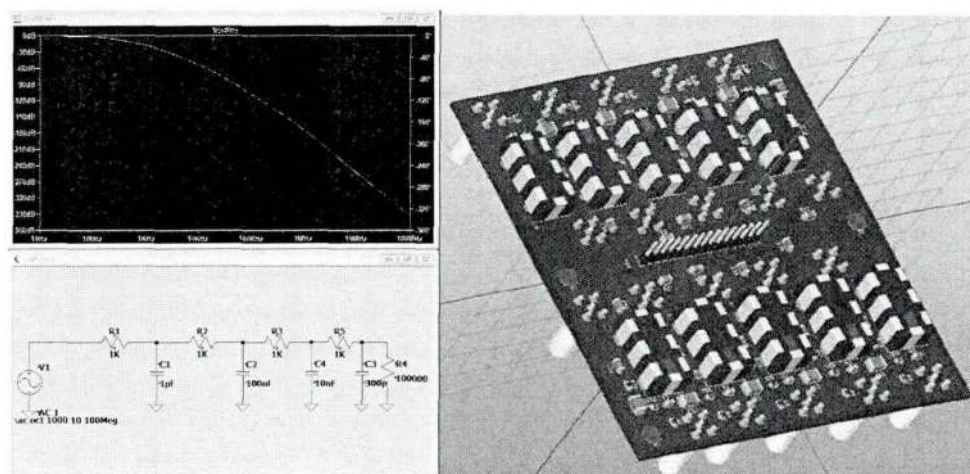


图 4.6 十路四阶 RC 低通滤波器。

4.3 激光与光路

本节介绍所用激光的稳频和光路的搭建。

4.3.1 369.5nm 激光稳频

实验上使用的激光器全部是来自 Toptica 的半导体激光器 (DL PRO HP, Toptica) 和控制器 (DLC PRO, Toptica), 具有小巧稳定的特点。所用 369.5 nm 激光器的短时间自然线宽为 150 kHz , 输出功率为 7 mW 。激光器的长期频率稳定性受到外界温度、振动和系统本身噪音的影响, 会一直变化, 超出所要求的范围。因此需要使用被动或者主动的方法将其稳定到某个特定频率, 称之为激光稳频。被动稳频包括使用温度膨胀系数更低的材料、隔振、控温等措施, 或者使用频率稳定性已经非常好的种子光注入锁定^[149-150]。常用的主动稳频技术大都使用电子反馈电路, 将测量到的激光频率与参考频率的差值降低到最小。例如使用超稳法布里玻罗 (Fabry-Pérot) 腔的 PDH (Pound-Drever-Hall) 稳频技术^[151-152]、饱和吸收谱技术^[153-155]、波长计稳频^[156] 等等。其中饱和吸收谱技术的优点是方

便简单,成本低廉,但是对激光波长有着严格的限制。PDH 稳频技术将激光稳定在超稳的参考腔上,可以满足不同波长的激光器的稳频需求,因此受到广泛应用。使用电光调制器(Electro-optical modulator, EOM)对激光产生相位调制,产生载波、与载波同相和反相的两个边带。含有这三个成分的激光经超稳 FP 腔的作用,可在光电探测和解调后生成所需误差信号。对于红外波段而言,现有的 EOM 能够满足大部分的稳频应用,尤其是红外波段的宽带波导型 EOM,可以实现比较宽频率的调制,提升了 PDH 技术的灵活性。对于紫外波段而言,当前的 EOM 往往是共振式以降低射频功率的要求,其中心频率不可大范围改变。由于 EOM 为偏振敏感型和温度敏感型的非线性晶体,可能由于入射光偏振对轴精度不够或温度漂移而产生剩余相位和剩余幅度调制噪声^[157-158]。这将导致 EOM 所调制出的边带不等幅度或者相位关系不固定,造成最终的误差信号出现漂移和形变。因此,EOM 对温度的要求很严格,需要额外的温控。这增加了系统复杂度和不稳定性。此外,EOM 的价格很高,增加了实验成本。因此,我们设计了一种使用声光调制器(Acousto-optic modulators, AOM)来替换 EOM 的激光稳频技术。尤其在紫外波段,AOM 的价格通常只有 EOM 的 1/5。现有几种使用 AOM 做激光稳频的方案。例如,文献^[159-160]使用 DC+RF 驱动电压控制振荡器(Voltage-controlled oscillator, VCO)产生三个频率的射频信号,加载到 AOM 产生三束一级衍射光,调制光经过原子蒸气腔室,获得吸收谱信号。其缺点是原子吸收谱方法只能用于特定波长,不具有普适性。例如,文献^[160]使用特殊设计的 AOM^[161],工作在拉曼-Nath 衍射区域,结合共焦腔获得 PDH 误差信号。缺点是这种 AOM 的工作频率只有几十 MHz,中心频率调节范围小,而且该产品只适用于特定波段^[162]。我们使用了一种具有普适性的低成本 PDH 稳频方法。使用 AD9959 四通道直接数字合成器(Direct Digital Synthesis, DDS)来产生三路射频信号,同时作用在 AOM 上即可模拟 EOM 产生三路相位调制的一级衍射激光,经过 FP 超稳腔后探测和解调即可获得 PDH 误差信号。我们后来注意到文献^[163-164]中使用了多通道 DDS 作为信号源来驱动 EOM,实现激光调制和剩余幅度调制的抑制。而本文所用的 AOM 方案与之相比,具有成本低廉、操作简单等优点。

实验上使用的 AD9959 开发板具有四路 0-200 MHz 的通道,如果将低通滤波器去掉(移除 0Ω 电阻 R22-R29),即可工作在更高频率。为了实现与 EOM 相位调制产生的三个频率激光,实验上使用其中的三路端口输出驱动信号 $f_0 = 200$ MHz 和 $f_+ = 210$ MHz,和 $f_- = 190$ MHz,其中 f_+ 频率与另外两路具有 180° 相位差,一起施加到 AOM 后即可产生三个频率分量的一级衍射光。与 EOM 不同的是,这里的三个激光的功率、频率和相位都独立可调。但同时由于 AOM 的衍射角度与频率有关,这三个光束会有很小的角度差。例如对于实验上所用的

AOM (TEM-200-50-369, Brimrose), 布拉格衍射角为 8 mrad , 则三个频率一级衍射光之间的角度为 $\pm 0.4 \text{ mrad}$ 。入射 AOM 的激光为直径约 $280 \mu\text{m}$, 发散全角约 1 mrad 的弱发散光, AOM 一级光衍射效率可达 70% 以上, 而实际使用时根据需求设置效率为 25% 左右。在 AOM 后 20 cm 处将一级衍射光耦合进单模保偏光纤, 零级光用于冷却、泵浦和探测光。三个频率分量有一部分是重合在一起的, 使用 $f=4.5 \text{ mm}$ 的非球面耦合透镜可获得 30% 的光纤耦合效率。通过调整三个射频功率, 设置进入光纤的三个频率光的光强之比为 $I_0: I_+: I_- = 2: 1: 1$ 。

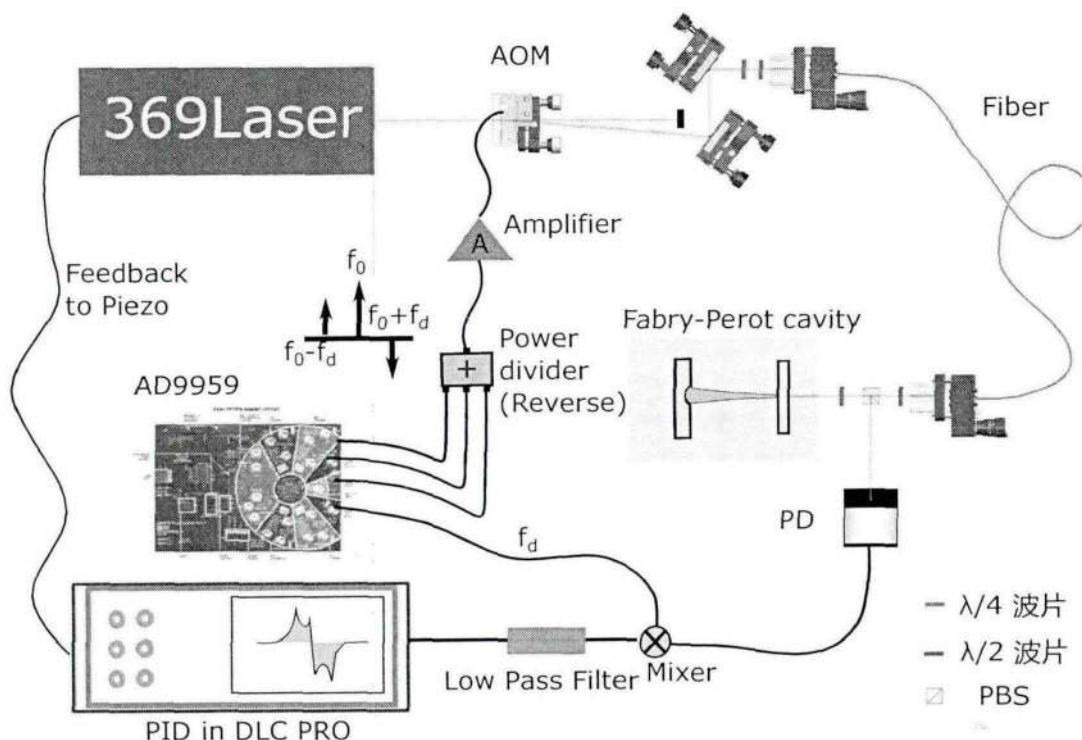


图 4.7 369 稳频光路。AD9959 的三路信号分别输出 $f_0 = 200 \text{ MHz}$ 和 $f_+ = 210 \text{ MHz}$, $f_- = 190 \text{ MHz}$, 其中 ω_+ 频率与另外两路具有相反的相位。三路信号经过合路器（逆用功分器）变为一路信号，经放大后驱动 AOM。AOM 的一级衍射光因此包含三个频率分量，与使用 EOM 对激光相位调制的结果一致。经过 FP 腔后的反射光经 PD 探测后与 AD9959 的第四路解调信号 $f_d = 10 \text{ MHz}$ 混频，低通滤波后即可得到误差信号。DLC PRO 中的 PID 控制器根据误差信号即可输出反馈信号，通过控制激光中的压电来调节激光频率，最终实现稳频。

该激光经过光纤送往超稳腔平台。一个 $30 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ 内部尺寸的真空腔内含有三根超稳腔，并使用非蒸发式吸附剂泵维持真空。三根超稳腔分别由 9.8 cm 长的 ULE 空心柱、一片平面反射镜和一片曲率半径为 10 cm 的凹面镜组成，其自由光谱范围（Free spectral range, FSR）为 1.5 GHz 。其中两个超稳腔分别用于 369 nm 和 399 nm ，其平面镜和凹面镜在 369 nm 和 399 nm 处的透过率分别为 98.0% 和 97.5% ，精细度分别为 155 和 124，对应反射峰半高全宽

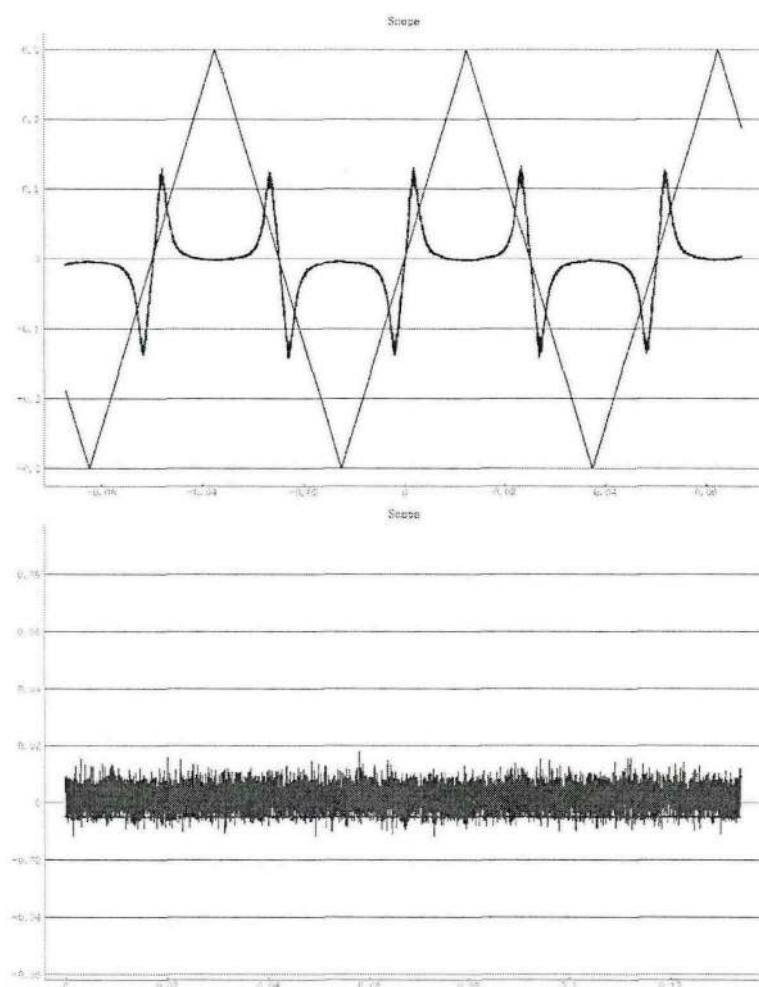


图 4.8 扫描和锁定时的误差信号。左图：扫描激光频率得到的误差信号，三角波为 20 Hz 的扫描信号，其中 $f_d = 10$ MHz。右图：锁定时的误差信号，此时激光频率扫描关闭，PID 实时反馈。误差信号被压缩至左图的十分之一，因此其线宽应小于 1 MHz。

分别为 9.68 MHz 和 12.10 MHz。另外一个超稳腔的两个反射镜在 935 nm 的透过率为 99.5 %。所有反射镜使用真空胶水 (SPI#05106C-AB) 粘在超低热膨胀率 (Ultra-Low Expansion, ULE) 玻璃支柱上，并烘烤至 200 °C 固化。使用如图 4.7 所示的方法，当上述激光与超稳腔耦合后，由于 FP 腔对不同频率的光具有不同的响应，其反射光中各频率相位会受到腔的调制，因此反射光在光电探测器上的拍频信号反映出激光频率与腔共振频率的频率差信息。使用 AD9959 第四路输出 $f_d = 10$ MHz 与该拍频信号混频，并经过低通滤波器保留直流信号，称之为误差信号。则只有当载波频率与腔共振时该误差信号才为零，而失谐时误差信号不为零，且红失谐和蓝失谐时误差信号分别为正负（或负正，取决于解调信号的相位）。PDH 稳频技术的优点就在于，所产生的误差信号在较大范围内（对于小信号调制 $\sim 2f_d$ ）都是线性的，且在更大范围内都可以保持稳频能力的。实验上使用 DLC PRO 自带的数字稳频功能，将误差信号输入，通过调节合适的 PID 参

数,可以反馈激光器的电流和压电,实现稳频。实验中的扫描激光频率时的误差信号和锁定时的误差信号如图4.8所示。

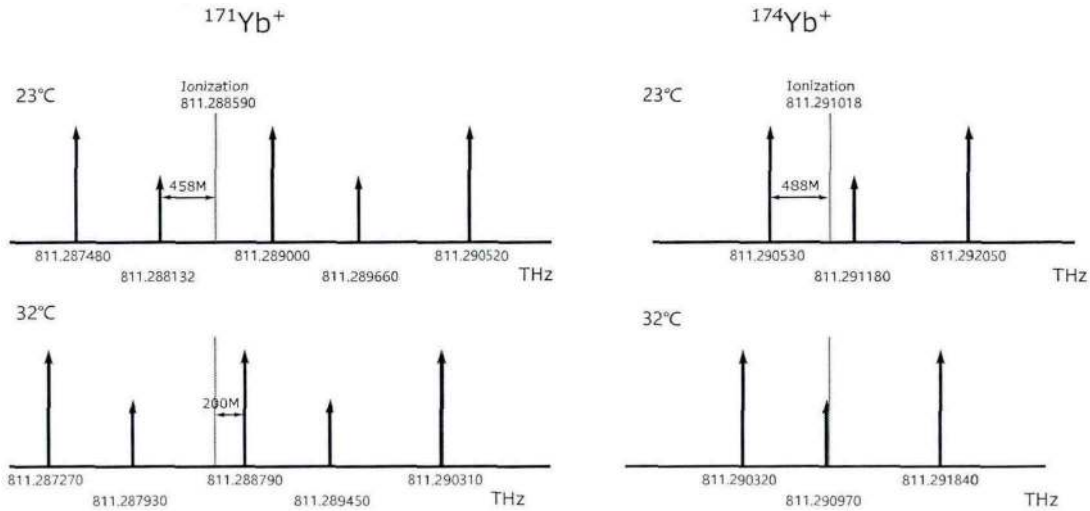


图 4.9 23 °C 和 32 °C 时超稳腔共振峰。上图为室温 23 °C 的共振峰,其中高峰表示基模,稍低一些的峰表示 TEM_{01} 模,红色竖线分别表示 $^{171}Yb^{+}$ (左),和 $^{174}Yb^{+}$ (右)的离子化光目标频率,也是激光的目标频率。在室温下,如果使用两个 AOM 将激光频率移动-458 MHz,则可以使用一个超稳腔稳定 $^{171}Yb^{+}$ 和 $^{174}Yb^{+}$ 两种离子所需要的激光频率,其中 $^{171}Yb^{+}$ 所需激光频率锁到 TEM_{01} 模而 $^{174}Yb^{+}$ 锁到 TEM_{00} 模(仍然会失谐-30 MHz,但 $^{174}Yb^{+}$ 并不常用)。而将温度升至 32 °C 时,共振峰整体红移 210 MHz,此时只需要使用一个 AOM 将激光频率移动 +200 MHz,可以将 $^{171}Yb^{+}$ 对应的激光频率锁到 TEM_{00} 模。虽然此时 $^{174}Yb^{+}$ 无峰可锁,但其只用于调试并不常用,且必要时可以使用波长计监视激光频率。因此实验上将温度设置为 32 °C。

为了保证超稳腔的稳定,需要对其进行保温。超稳腔表面覆盖多个 FPC 加热贴(加热功率 20 W)和三层保温棉,并使用亚克力罩子将其盖住。设置温度 32 °C,热平衡后在 24 小时内其整体的温度波动小于 1 mK。使用保温措施的另一个好处是可以通过调节温度精确地控制共振频率。实验上发现温度升高 1 °C,横向基模的共振频率 f_r 将会降低约 23.3 MHz。这对应腔长变化为 $2.87 \times 10^{-8} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$,由于 ULE 材料的热膨胀率应在 $5 \times 10^{-9} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 以下,这个热膨胀系数应主要来自于两侧粘腔镜的真空胶水。在温度波动 1 mK 时,该热膨胀率带来的基模频率波动为 23 kHz,在可以接受的范围内。在 23 °C 时,FP 腔基模频率为 811.289000 THz,而激光频率应设置为与 $^{171}Yb^{+}$ 共振频率红失谐 200 MHz,即 811.288590 THz。通过将其从室温升高到 32 °C,该 FP 基模频率下降为 811.288790 MHz。因此,使用一个 +200 MHz 的 AOM 分别施加 $f_0 = 200 \text{ MHz}$ 和 $f_+ = 210 \text{ MHz}$,和 $f_- = 190 \text{ MHz}$ 即可产生需要的误差信号,并能够将激光频率稳定在所需频率。使用离子测试,激光频率能够保持长期的稳定性,在一天的实验内离子的荧光计数保持稳定。由于波长计具有 10 MHz 的精度,且光纤所造成的测量误差较大,

没有使用波长计进行长期的表征。

4.3.2 369 和 399 激光光路

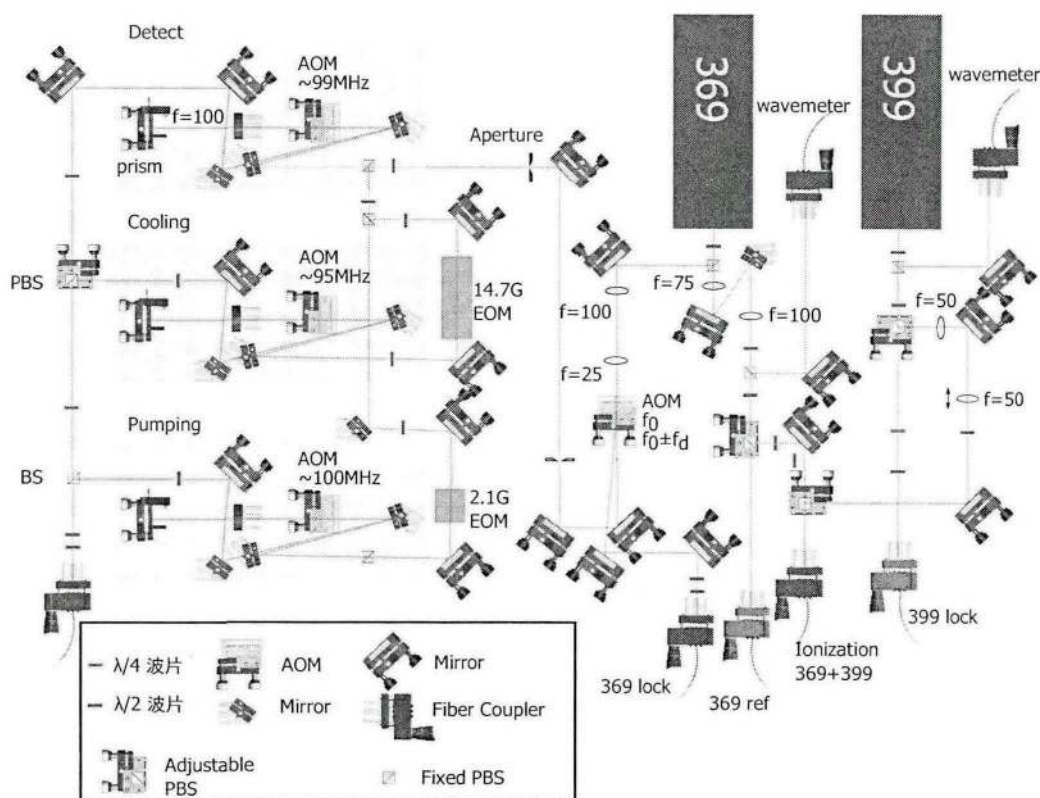


图 4.10 369 nm 和 399 nm 激光的光路。左侧两次通过 AOM (Double pass AOM) 由陈炎设计和调试。

369 nm 和 399 nm 激光的光路如图4.10所示。离子化光需要使用 2 mW 的 399 nm 激发原子，和 0.2 mW 左右的 369 nm 将其离子化，因此实验上将二者合束到同一根光纤。由于所用的 369 nm 半导体激光器出射光斑直径约 1.5 mm，实验上使用一组 $f_1=75$ mm, $f_2=100$ mm 的透镜组将 369 nm 光斑扩束 4/3 倍，这有利于提高光纤耦合的效率（使用 $f=11$ mm 的非球面镜，20 % 提升到 50 %）。而 399 nm 半导体激光器出射光斑直径约为 2.5 mm，可以直接高效地耦合进光纤。但在二者合束到离子化光纤中时，我们使用一组 $f_1=50$ mm, $f_2=50$ mm 的透镜改变 399 nm 激光的发散角，以补偿非球面透镜对两个波长的色差，提高合束耦合效率（双波长皆为 50 %）。扩束后的 369 激光光斑不适合用于 AOM，因此实验上在扩束前使用 PBS 分出一束激光到一侧，并使用一组 $f_1=100$ mm, $f_2=2.54$ mm 的透镜将其缩束 1/4。此时在 AOM 处的一级衍射效率可达 70 % 以上（实际使用时为 25 %），并被耦合进保偏光纤（耦合效率 20 %~30 %）用于上一节介绍的激光稳频。经过 AOM 的零级光没有频率和方向改变，因此被用于图4.10中左侧的

操作光光路。实验上使用了三路双次通过 AOM (Double pass AOM) 结构^[165], 可以获得更高的关断比, 但同时也降低了整体的效率。实验上使用了三个 100 MHz 的 AOM (TEM-100-25-369, Brimrose), 其中冷却光的 AOM 驱动频率为 95 MHz, 而探测光和泵浦光频率为 99 MHz。在冷却光路中使用了 14.7GHz 的 EOM (PM-Yb+_14.7, Qubig), 在泵浦光路中使用了 2.1 GHz 的 EOM (Newfocus)。其中单次通过 AOM 效率为 60 %, 双次通过后总效率为 25 %。由于反射镜损耗和合束所用 BS 损失了 50 % 左右, 光纤耦合效率 50 % 左右, 最终三路激光的保偏光纤耦合效率分别为 5 %~8 %。使用 2.2 mW 的总入射光, 可以得到冷却光、泵浦光、探测光的光强各自为 $40 \mu\text{W}$ 。

受限于所用激光器的功率, 实验上暂时没有足够的功率进行电磁诱导透明冷却 (Electromagnetically induced transparency cooling, EIT cooling)^[95,166]。实际上我们有另一台 Toptica 的 369nm 半导体激光器, 其输出功率 14 mW。但是在使用拍频稳频和 PDH 稳频时发现, 其纵向频率不稳定, 误差信号具有较强的噪音而无法长期锁定。

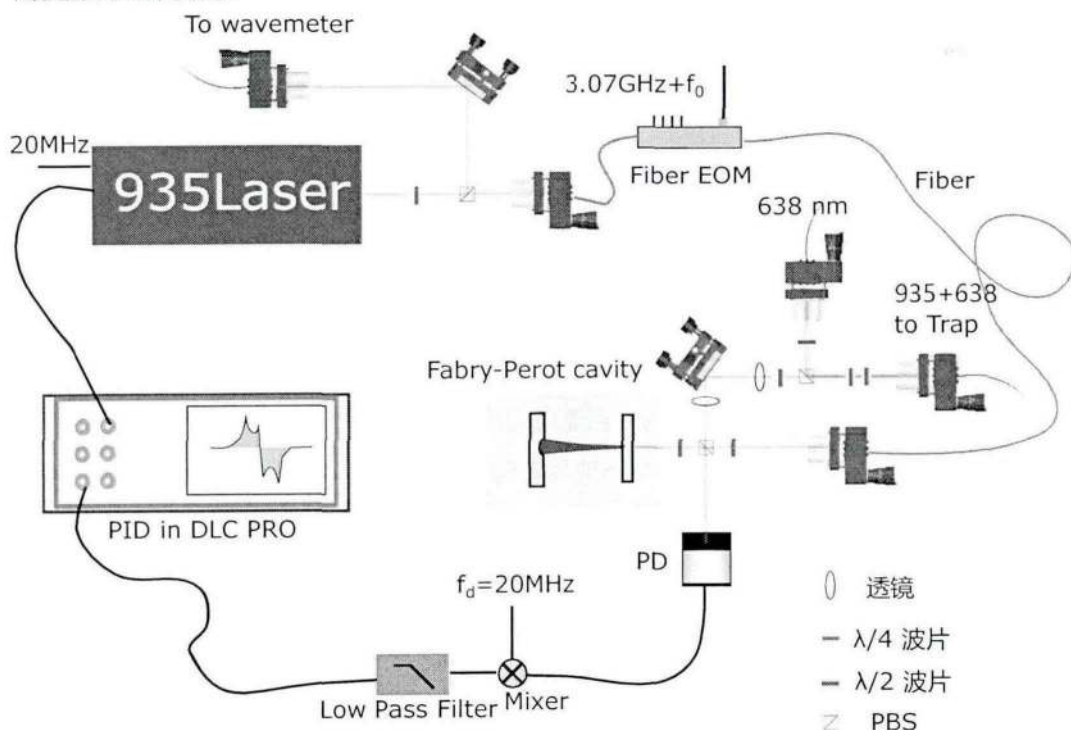


图 4.11 935nm 和 638nm 激光光路。

4.3.3 935nm 和 638nm 激光光路

935 nm 的激光通过一个光纤 EOM, 耦合进 FP 超稳腔。使用信号源提供 20 MHz 的射频信号, 加载到 935 nm 激光器的 DC MOD 端口, 即可通过调制其二极管电流产生一个 20 MHz 的边带。然后在光纤 EOM 上施加两种频率的射频信

号, 分别为 3.07 GHz 和 f_0 。其中 3.07 GHz 为 $^{171}\text{Yb}^+$ 所需的 935 nm 边带, 而 f_0 为激光稳频所需边带。通过改变 f_0 , 即可将该边带与腔模共振, 因此可以方便地实现 $^{171}\text{Yb}^+$ 和 $^{174}\text{Yb}^+$ 所需激光频率的稳频。FP 腔中的两个反射镜在 935 nm 的透过率为 99.5 %, FSR 为 1.5 GHz。反射光经 PD 探测后与 20 MHz 的解调信号 f_d 混频, 并低通滤波后即可得到误差信号。同样地, 使用 Toptica 的 DLC PRO 控制器自带的数字 PID 进行反馈, 即可以实现稳频。在耦合进 FP 腔前, 分出一部分光路与 638 nm 激光合束后耦合进同一根光纤, 并用离子的光学泵浦。其所需要的多种射频信号源由李睿睿制作的机箱提供。

4.4 离子成像

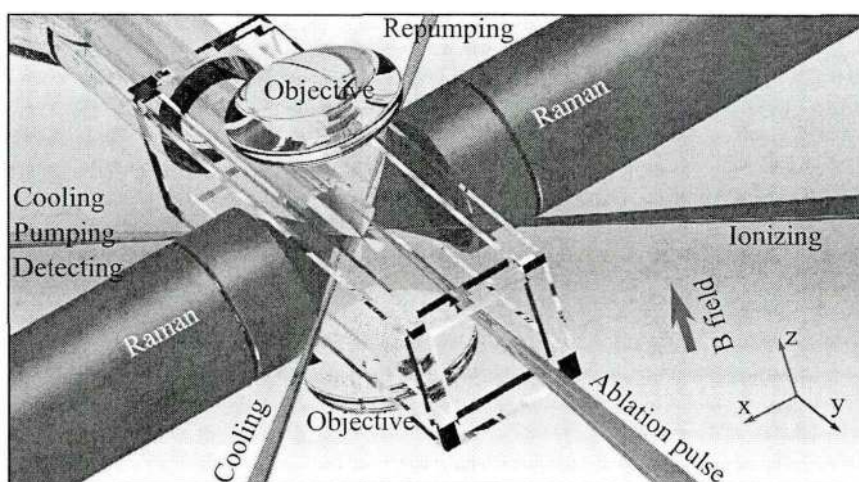


图 4.12 激光入射角度。532 nm 脉冲激光从玻璃腔的前方入射, 汇聚到固定在距离势阱中心 8 mm 的镱靶材上。该靶材表面法线朝向势阱中心。当镱原子受热蒸发时, 经过势阱中心的一些原子受 399 nm 激光照射变为激发态, 并被 369 nm 的激光电离成为离子。45° 入射的另一束 369 nm 激光包含冷却光、泵浦光和探测光。被势阱捕获的离子在冷却光作用下被稳定囚禁。两侧的两个 NA0.4 的物镜将拉曼光汇聚到各个离子上, 可以实现边带冷却和多离子受激拉曼操作。放置在玻璃腔的上下的 NA=0.4 的物镜用于收集离子发出的荧光。

本工作所搭建的离子阱系统具有四个高数值孔径的窗口, 因此可以在多个方向成像。水平方向, 使用两个 NA=0.4 的物镜用于拉曼光, 同时也可以用于离子成像。但主要的成像在垂直方向。一个 NA=0.4 的物镜被固定在三维平移台上, 而整体置于一个固定刀片阱系统的铝柱上。花岗岩平台的上方 50 cm 处放置了一块面包板, 物镜成像即被反射到面包板上的 CCD (WAT-910HX/BR, Watec) 和 PMT(H13467-01, Hamamastu) 中。该物镜由艾铭忠设计, 李睿睿优化和组装。

4.5 囚禁离子实验

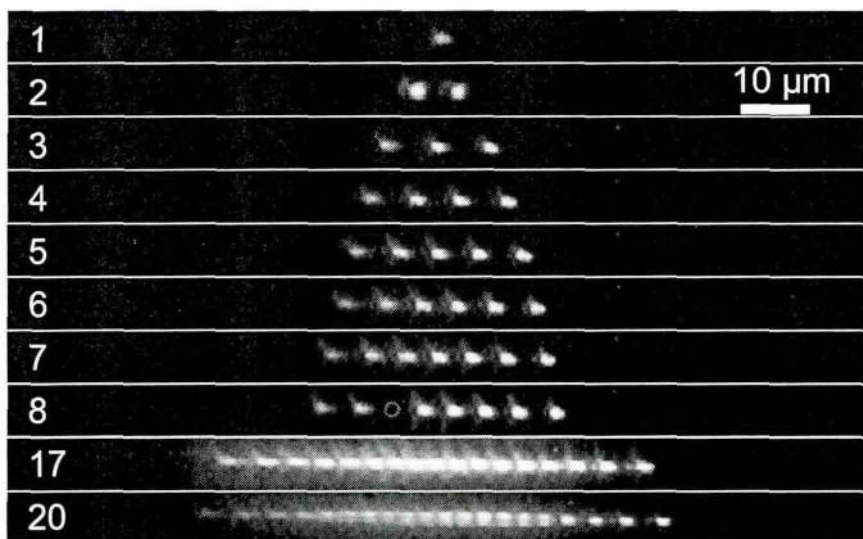


图 4.13 含有 1-20 个离子的一维 $^{174}\text{Yb}^+$ 离子晶体。此时使用的参数为 RF 功率 30 dBm。可以在最后的图片中看到，369 nm 冷却光的光斑大小不足以覆盖整个离子晶体，因此两侧的离子没有被完全照亮。拍摄照片时 369 nm 的冷却光光路还没有最终完成，因此离子的冷却效果并不是最好，但多离子晶体仍然能够被稳定束缚数小时。在第八行中，红圈表示该离子进入了暗态。

该离子阱中装载了三个自然丰度的镱靶材。片状靶材的表面法线指向离子阱中心。如图4.12所示，一束 532 nm 激光从花岗岩平台底部向上照射，并在玻璃腔前面被反射和聚焦到靶材表面^[167-168]。其光斑直径为 300 μm 。所用的调 Q 脉冲激光器 (Nd:YAG) 单脉冲时间为 2 ns，最大单脉冲能量为 0.3 mJ，重复频率为 10 kHz。实验中，使用电子信号触发该激光器的快门，每 1000 ms 打开 8 ms 并放出 80 个单脉冲。靶材受热部位的原子形成原子蒸气，其中经过势阱中心的少数原子在 399 nm 和 369 nm 双光子电离过程中变为离子，继而被势阱捕获。随后在几毫秒内，在离子化光中的失谐 -200 MHz 的 369 nm 光和冷却光中的失谐 -10 MHz 冷却光同时冷却下，离子被冷却成在势阱中心附近。然后关闭离子化光，只使用失谐 -10 MHz 的冷却光将其冷却到接近多普勒冷却极限附近。使用 532 nm 脉冲激光产生原子蒸气的好处是不再需要炉子和导线，整体结构更为紧凑。使用这种方法，能够高效地加载离子。实验上成功囚禁了 1 到 20 个 $^{174}\text{Yb}^+$ 离子，和多个 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子，如图4.13所示。

为了测量离子在阱中的运动频率，我们束缚了单个离子，并在 DC3 上施加了 100 mV 的射频信号。扫描该信号的频率，能够观察到离子运动状态被激发的频率。如图4.14所示，单个离子在正常状态下为一个亮点。当扫描所加载的射频信号的频率时，离子分别在 Z 轴 ($2\pi \times 0.270 \text{ MHz}$)，X 轴 ($2\pi \times 1.617 \text{ MHz}$) 和 Y 轴 ($2\pi \times 1.655 \text{ MHz}$) 变得弥散。这些频率对应了离子的轴向和径向久期运动

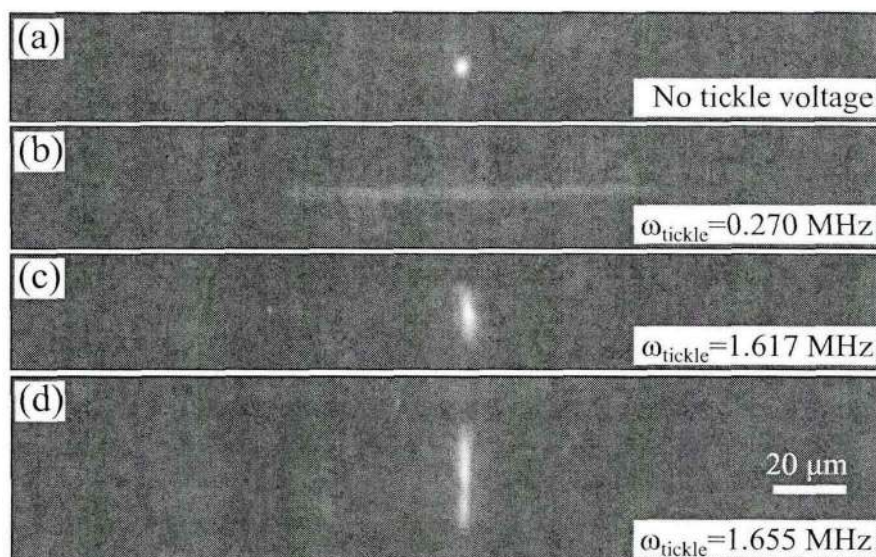


图 4.14 单个离子的运动频率。参数： $P_{RF} = 30$ dBm,, DC2, DC4, DC7, DC9 为 1 V, 其余电压为 0 V。

频率。可以使用数值模拟的方法, 对比此时的势阱。设置 $\Omega_{RF} = (2\pi)14.45$ MHz, $U_{RF} = 140$ V, DC2, DC4, DC7, DC9=1 V, 其余为 0 V, 径向和轴向的势阱如图 4.15 所示。

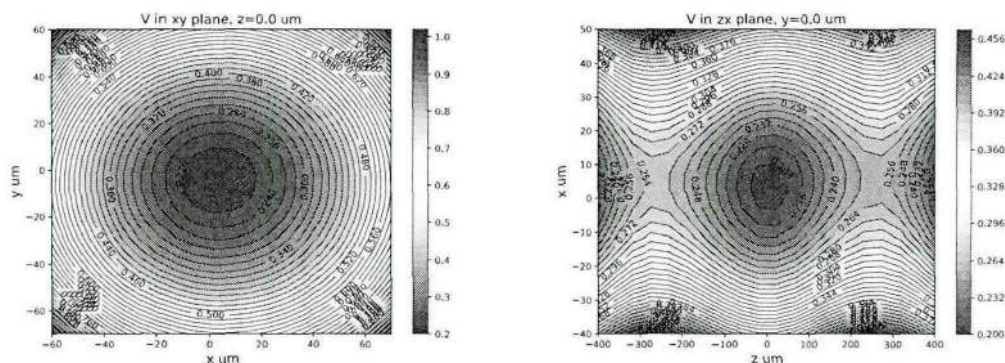


图 4.15 XY 和 ZX 平面的势阱。 $\Omega_{RF} = (2\pi)14.45$ MHz, $U_{RF} = 140$ V, DC2, DC4, DC7, DC9=DC_m=1 V, 其余 DC 电极皆为 0 V。数值解得径向运动频率分别为 X 轴 $2\pi \times 1.606$ MHz 和 Y 轴 $2\pi \times 1.631$ MHz, Z 轴运动频率为 $2\pi \times 0.256$ MHz。

实验上将量子比特编码在 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的超精细结构的钟态能级上, 即 $|0\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ and $|1\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$, 二者之间的跃迁频率为 12.6 GHz^[128]。离子处于 10 高斯的静磁场中^[90]。在第三章中介绍过, 使用微波可以共振地驱动量子比特的跃迁, 通过控制微波的时间, 可以控制翻转的角度。在微波操作结束后, 使用探测光即可读取离子的状态, 经过多次实验取平均, 即可得到离子处于上能级的概率。每次测量, 离子荧光通过物镜收集到 PMT 中。使用程序控制系统 ARTIQ (M-labs) 即可对所有时序进行控制。如图 4.16 所示, 实

验上使用微波实现了单离子的拉比反转，并使用 Ramsey 测量技术测量出微波频率与量子比特共振频率的失谐量。通过改变微波频率，即可让失谐为零，实现共振跃迁。

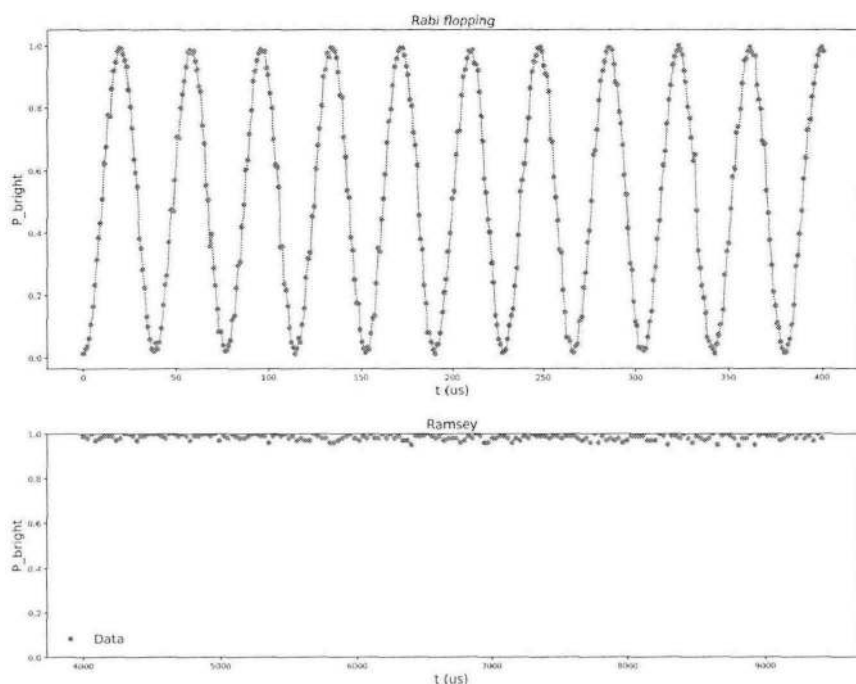


图 4.16 微波拉比操作和 Ramsey 测量。上图：微波拉比反转。下图：Ramsey 测量微波失谐频率。操作脉冲为： $\pi/4$ 脉冲（相位 0），延时 t ， $\pi/4$ 脉冲（相位 0），测量。如果失谐不为 0，则所测信号会以失谐频率振荡。图中已经将失谐调为 0，因此始终保持在亮态。且可以看到相干时间远大于 10ms。

综上，本工作搭建的新型高通光刀片式离子阱系统成功束缚了多离子，并且性能稳定。未来将在使用多离子研究量子模拟和量子信息中开展研究。接下来的工作包括使用拉曼光进行单离子和多离子的操控，使用光镊调制离子的运动模式，提升操作的速度和精度等等。当然，目前的装置还有一些可以改进的地方，例如硅片固定基板更换为玻璃材质，玻璃真空腔的内表面镀增透膜，改进 RF 的连接方式减小 RF 对地电容，改进螺旋谐振腔的 Q 值和电压增益等等。希望在未来的工作中，能够解决上述问题。

第5章 Floquet 技术与黎曼函数零点

黎曼猜想是数学界的一个悬而未决却又至关重要的问题^[69-70]。在数论中，黎曼 ζ 函数的非平凡零点处于中心的地位。尤其是，它们能够预测所有的质数。在物理学中，随机矩阵理论^[169] 和量子混沌理论^[170] 也与这些非平凡零点有密切关系。众多数学家在理论数学上努力证明黎曼猜想。除此之外，有一种与物理有关的证明方法十分有趣——将某个量子系统的哈密顿量能谱与黎曼非平凡零点一一对应。这被称为波利亚-希尔伯特猜想 (Pólya-Hilbert conjecture, PHC)^[73]。人们提出了很多系统尝试解决这个问题，然而目前没有一个系统能够在实验上实现和证明。本文使用一种较为不同的方法，即 Floquet 技术来测量黎曼函数的零点。我们在实验上使用离子阱囚禁单个量子比特，利用周期性的驱动该量子比特的演化，定位到了黎曼函数的第一个零点和波利亚函数的前两个零点。这些零点的出现与 Floquet 系统两个准能量的交叉点相关联，因此在实验上对应系统演化的冻结。实验上得到的结果与理论值吻合。本文的工作提供了第一个在量子系统中测量黎曼零点的实验研究，将对于寻找黎曼函数和量子系统之间的关联提供新的思路。

5.1 黎曼函数与 Pólya-Hilbert 猜想

人类对质数的研究伴随着数学的整部发展史。从公元前到今天，质数的奥秘都在吸引着人们孜孜不倦的探索。公元前三百年，欧几里得已经证明存在无穷多个质数。虽然至今人类还没有找到合适的方法完全描绘质数的性质，然而人们在质数的分布规律上取得了一些重要的进展^[171]。1737 年，数学家欧拉 (Leonhard Euler) 在研究质数时发现，下面的 Dirichlet 级数，对于实数 $s > 1$

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (5.1)$$

与质数有如下的关系，

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (5.2)$$

其中， p 为所有的质数，这被称为 Euler 乘积。欧拉使用简单的代数运算，即可证明存在无数个质数。1859 年，黎曼 (Bernhard Riemann) 将上述研究扩展到了整个复数领域，并对该函数进行了深入的研究^[172-173,69]。因此黎曼 ζ 函数定义为

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1 \quad (5.3)$$

$\zeta(s)$ 函数满足如下方程

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \quad (5.4)$$

其中, $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ 。 ζ 函数具有两种零点, 其中一种平凡零点为 $-2, -4, -6$ 等负偶数, 除此之外的零点被称为非平凡零点。著名的黎曼猜想可以表示为, 上述的非平凡零点 ρ_n 都处于临界线 $\text{Re}[\rho_n] = 1/2$ 上, 即实部都等于 $1/2$,

$$\rho_n = \frac{1}{2} + iE_n \quad (5.5)$$

其中, E_n 为实数^[172-173]。同时, 黎曼还定义了 $\Xi(E)$ 函数

$$\Xi(E) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \quad s = \frac{1}{2} + iE \quad (5.6)$$

因此黎曼猜想也可以表述为 $\Xi(E)$ 的零点 E_n 全都是实数。

黎曼猜想是世界七大数学难题之一^[174-175,70], 该问题的解决将加大提高我们对于质数分布规律的认识^[176], 对于数论和因数分解问题都有重要意义^[177,72]。

随着电子计算机算力的发展, 人们希望用计算机检验黎曼猜想。2004 年, 超过 10^{13} 个零点已经被证明的确复合黎曼的猜想^[178], 之后更多的计算也没有证伪黎曼猜想。但是, 由于质数的无穷性, 不能够通过枚举来证明黎曼猜想。实验上, 人们也提出了很多方案可以寻找黎曼零点, 例如, 1947 年荷兰物理学家范德波尔 (Balthasar van der Pol) 使用自制的电磁设备测量了 $1 < E_n < 100$ 的非平凡零点^[179]; 英国物理学家贝里 (Michael Berry) 也设计了使用声学或光学在远场衍射图案的经典物理体系的方案^[180-181]; 也有方案需要使用两个纠缠的量子系统^[182], 等等。一个非常有趣的证明方案是, 如果能够寻找到一个量子系统, 其哈密顿量的本征值与黎曼非平凡零点 E_n 一一对应, 那么由于厄米算符本征值一定是实数, 则可以证明黎曼猜想的正确性。这个想法由波利亚 (George Pólya) 提出, 称为波利亚-希尔伯特猜想 (Pólya-Hilbert conjecture, PHC)^[71-73]。直到上世纪七十年代, 蒙哥马利 (Hugh Lowell Montgomery) 发现黎曼零点十分符合高斯酉系综 (Gaussian unitary ensemble, GUE) 的统计^[72,74], 此时 PHC 才得到人们的重视。上世纪八十年代, Odlyzko 测试了在第 10^{20} 个零点附近的 10^5 个零点时发现黎曼零点的统计规律相对于 GUE 只有少许的偏差, 更进一步地支持了 PHC。随后贝里 (Michael Berry) 和其合作者基廷 (Jonathan Keating) 使用量子混沌理论研究黎曼函数, 并提出了 E_n 是量子混沌系统哈密顿量的本征值^[75-77]。在该系统的经典版本中, 其孤立周期轨道的周期为质数的对数。随后, 人们对此进行了大量的研究^[78-87], 但是至今没有一个决定性的答案。

2015 年, 克里菲尔德 (Charles Creffield) 和谢拉 (German Sierra) 提出了一种特别的方法——使用周期性驱动系统来寻找黎曼零点^[68]。在 PHC 中, 黎曼零

点与静态哈密顿量的能谱对应。但在周期性驱动的系统，其中黎曼零点与准能量 (Quasi-energy) 的简并点一一对应。接下来本文介绍 Floquet 系统，以及如何使用该系统寻找黎曼零点。

5.2 Floquet 理论

含时哈密顿量驱动下的演化可以使用主方程直接求解。然而对于周期性驱动的系统，可以使用 Floquet 理论来简化分析^[183]。首先考虑一个周期性的哈密顿量 $H(t) = H(t + T)$ ，其中 t 为时间， $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为周期， ω 为角频率。系统的 Schrödinger 方程可以写为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (5.7)$$

定义时间演化算符 $U(t, 0)$ ，其满足

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, 0) |\Psi(0)\rangle \quad (5.8)$$

且

$$U(t_1 + t_2, 0) = U(t_2, t_1) U(t_1, 0) \quad (5.9)$$

$$U(0, 0) = \mathbb{I} \quad (5.10)$$

其中， $\mathbb{I}$ 表示单位矩阵。则该算符的演化为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, 0) = H(t) U(t, 0) \quad (5.11)$$

本文只考虑二能级系统，因此 $U(t, 0)$ 为 2×2 的幺正矩阵。可以证明， $U(t+T, 0) = U(t, 0) U(T, 0)$ 。只需要定义一个算符

$$V(t) \equiv U(t + T, 0) U^{-1}(T, 0) \quad (5.12)$$

显然有

$$V(0) = \mathbb{I} = U(0, 0) \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} V(t) &= i\hbar \frac{d}{dt} U(t + T, 0) U^{-1}(T, 0) \\ &= H(t + T) U(t + T, 0) U^{-1}(T, 0) \\ &= H(t) V(t) \end{aligned} \quad (5.14)$$

^[183]。由于 $V(t)$ 与 $U(t)$ 具有相同的初始条件并遵循同样的微分方程，因此 $V(t, 0) = U(t, 0)$ ，所以

$$U(t + T, 0) = U(t, 0) U(T, 0) \quad (5.15)$$

其中, 一个周期的演化算符 $U(T, 0)$ 在数学中称为单值算符 (Monodromy operator)^[184]。由于 $U(T, 0)$ 是幺正矩阵, 总可以找到一个厄米算符 G 使得 $U(T, 0) = \exp(-iGT/\hbar)$ 。定义新的算符

$$P(t) \equiv U(t, 0) \exp(+iGt/\hbar) \quad (5.16)$$

显然 $P(0) = P(T) = \mathbb{I}$, 且可以得到

$$\begin{aligned} P(t+T) &= U(t+T, 0) \exp(+iG(t+T)/\hbar) \\ &= U(t, 0)(U(T, 0) \exp(+iGT/\hbar)) \exp(+iGt/\hbar) \\ &= P(t) \end{aligned} \quad (5.17)$$

因此算符 $P(t)$ 为周期为 T 的幺正算符, 所以演化算符 $U(t, 0)$ 满足

$$U(t, 0) = P(t) \exp(-iGt/\hbar) \quad (5.18)$$

定义 $U(T, 0)$ 的本征值为 $\{e^{-i\epsilon_j T/\hbar}\}$, 本征态为 $|j\rangle, j = 0, 1$, 则 $U(T, 0)$ 可以表示为

$$U(T, 0) = \sum_j |j\rangle e^{-i\epsilon_j T/\hbar} \langle j| \quad (5.19)$$

上式两侧作用在 $|j\rangle$ 上, 得到

$$e^{-iGt/\hbar} |j\rangle = e^{-i\epsilon_j t/\hbar} |j\rangle \quad (5.20)$$

对于任意一个初始态 $|\Psi(0)\rangle$, 先将其用基底 $|j\rangle$ 表示为

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= \sum_j |j\rangle \langle j | \psi(0)\rangle \\ &= \sum_j a_j |j\rangle \end{aligned} \quad (5.21)$$

其中, $a_j = \langle j | \Psi(0)\rangle$ 。对于 t 时刻的状态 $|\Psi(t)\rangle$, 则需要将 $U(t, 0)$ 作用在初态上, 得到

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= U(t, 0) |\psi(0)\rangle \\ &= \sum_j a_j P(t) e^{-iGt/\hbar} |j\rangle \\ &= \sum_j a_j P(t) |j\rangle e^{-i\epsilon_j t/\hbar} \\ &= \sum_j a_j |\psi_j(t)\rangle e^{-i\epsilon_j t/\hbar} \end{aligned} \quad (5.22)$$

其中, 定义 $|\psi_j(t)\rangle \equiv P(t)|j\rangle$ 为 Floquet 函数 (Floquet modes 或 Floquet function) 并定义 $|\Psi_j(t)\rangle = |\psi_j(t)\rangle e^{-i\epsilon_j t/\hbar}$ 为 Floquet 态^[185], 满足 $|\Psi(t)\rangle = \sum_j a_j |\Psi_j(t)\rangle$ 。注

意到, 式5.22中的 $|\Psi(t)\rangle$ 正是 Schrödinger 方程式5.7的解。上述的结果告诉我们一个重要的结论, $|\Psi(t)\rangle$ 可以表示为 $|\psi_j(t)\rangle e^{-i\epsilon_j t/\hbar}$ 的叠加态, 且其系数 a_j 只取决于初始态 $|\psi(0)\rangle$, 且不随时间变化。因此对于初始态为 $|\psi(0)\rangle$ 的周期性驱动的系统, 一旦得到了 Floquet 函数 $\{|\psi_j(t)\rangle\}$ 和准能量 $\{\epsilon_j\}$, 那么整个系统的状态就可以由式5.22完全确定。其中 Floquet 函数 $\{|\psi_j(t)\rangle\}$ 描述了一个周期内的快速变化, 称之为微运动 (Micromotion), 而 $e^{-i\epsilon_j t/\hbar}$ 描述了一个缓慢的稳定的相位演化^[186-187]。

由于 $P(t)$ 的周期性, Floquet 函数 $|\psi_j(t)\rangle$ 也是周期函数, 即 $|\psi_j(t)\rangle = |\psi_j(t+T)\rangle$ 。不难发现,

$$\begin{aligned} U(T+t, t) |\psi_j(t)\rangle &= U(T+t, t) U(t, 0) e^{i\epsilon_j t/\hbar} |j\rangle \\ &= U(T+t, 0) e^{i\epsilon_j t/\hbar} |j\rangle \\ &= e^{-i\epsilon_j T/\hbar} |\psi_j(t+T)\rangle \\ &= e^{-i\epsilon_j T/\hbar} |\psi_j(t)\rangle \end{aligned} \quad (5.23)$$

即 $\{|\psi_j(t)\rangle\}$ 为一个周期的演化算符 $U(T+t, t)$ 的本征态, 并构成一组完备正交基。将式5.22带回 Schrödinger 方程式5.7, 可以得到关于 $|\psi_j(t)\rangle$ 的如下 Floquet 方程

$$\mathcal{H} |\psi_j(t)\rangle = (H - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}) |\psi_j(t)\rangle = \epsilon_j |\psi_j(t)\rangle \quad (5.24)$$

其中, $\mathcal{H} = H - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 为 Floquet 算符。可见 Floquet 函数 $|\psi_j(t)\rangle$ 也是 Floquet 算符 $\mathcal{H}$ 的本征态, 而对应的本征值为 ϵ_j 。与不含时系统的演化形式对比, 可以看出 Floquet 函数 $|\psi_j(t)\rangle$ 与本征态类似, 而本征值 $\{\epsilon_j\}$ 类似于本征值。因此称 $\{\epsilon_j\}$ 为准能量 (Quasi-energies)。

对于驱动时间 t 远大于周期 T , 或者只观察 t 等于 T 的整数倍时的情况, 系统的演化主要取决于准能量所产生的相位这一项。如果系统的准能量发生了简并, 即 $\epsilon_0 = \epsilon_1$ 时, 在 $t = nT$ 时该系统的演化将会被冻结, 这种现象被称为相干隧穿抑制 (Coherent destruction of tunneling, CDT), 即系统的两个能级之间不再发生隧穿, 但仍然保持着相干性。上述结论表明, Floquet 系统为我们提供了一种设计系统久期演化规律的方法。如果能够设计一种周期性的哈密顿量, 使得系统的准能量 $\{\epsilon_j\}$ 在某些参数下发生简并, 那就可以观察到这种 CDT 现象。

5.3 使用 Floquet 方法寻找零点

Floquet 系统被应用于诸多研究, 例如拓扑绝缘体^[63-64], 非平衡动力学^[65], 以及时间晶体^[66-67] 等等。在本工作中, 将用离子阱实现由克里菲尔德 (Charles Creffield) 和谢拉 (German Sierra) 在 2015 年提出的方案^[68]——周期性地驱动单

个量子比特,使得当某个参数等于黎曼函数零点的时候,系统的准能量发生简并,并在实验上观察到 CDT 现象^[68]。与在本章第一节所述的 PHC 有所不同,PHC 使用的是不含时哈密顿量的能谱与黎曼零点一一对应,本文中使用的 Floquet 方法将 CDT 现象与黎曼零点一一对应。这将把 PHC 扩展到动力学驱动的情景,并给黎曼猜想和量子系统之间建立了崭新的联系。尤其是,相比于以往设计出的不能在实验上实现的系统,本方案可以在实验上直接实现,并成功观测到黎曼函数的第一个零点。本节简要介绍该方案^[68]。

考虑一个二能级系统的周期性哈密顿量

$$H_E(t) = \hbar(-J\sigma_x + Jf_E(t)/2\sigma_z) \quad (5.25)$$

其中, J 拉比频率, $f_E(t)$ 为周期为 T 的驱动函数, $f_E(t) = f_E(t+T)$, E 是驱动参数。一般来说,想要计算一个周期的演化算符 $U(T,0)$ 并不简单。一种办法是使用数值求解直接得到 U 的矩阵形式^[188], 另一种办法是使用高频近似 $\omega = 2\pi/T \gg J$ 来求解^[189-190]。在高频近似下 $\omega = 2\pi/T \gg J$, 首先对式5.25中的含时项 $Jf_E(t)\sigma_z$ 求解, 并将不含时项 $-J\sigma_x$ 作为微扰, 则可以得到关于 J 的微扰级数。取一阶近似, 只保留 J 的第一项, 则得到有效哈密顿量

$$H_{eff} = -\hbar J_{eff}\sigma_x \quad (5.26)$$

其中

$$J_{eff} = \frac{J}{T} \int_0^T dt e^{-iF_E(t)} \quad (5.27)$$

为有效拉比频率, 且

$$F_E(t) = \int_0^t f_E(t_1) dt_1 \quad (5.28)$$

H_{eff} 的本征值给出系统的准能量 $\epsilon_{\pm} = \pm\hbar|J_{eff}|$ 。

一个简单的例子, 当 $f_E(t) = K \cos \omega t$ 时, 可以得到准能量为贝塞尔函数 $\epsilon_{\pm} = \pm\hbar|J_{eff}| = \pm\hbar J|J_0(K/\omega)|$ ^[191]。当调节参数 K/ω 为贝塞尔函数的零点, 即 $K/\omega = 2.404, 5.520...$ 时, 准能量发生了简并, 则此时系统发生 CDT。实验上, 可以使用光晶格中的原子来进行模拟^[192-194,187], 如图5.1所示。

为了将 Floquet 系统与黎曼函数联系起来, 我们需要逆向考虑问题^[68], 即已知 $J_{eff}(E)$ 的形式, 如何构建驱动函数 $f_E(t)$ 。首先以 $\Xi^*(E)$ 函数为例, 介绍构建的方法。 $\Xi^*(E)$ 函数由波利亚提出, 并与黎曼 Ξ 函数有一些相似之处^[71,70,68]。

$$\Xi^*(E) = 4\pi^2 (K_{a+iE/2}(x) + K_{a-iE/2}(x)) \quad (5.29)$$

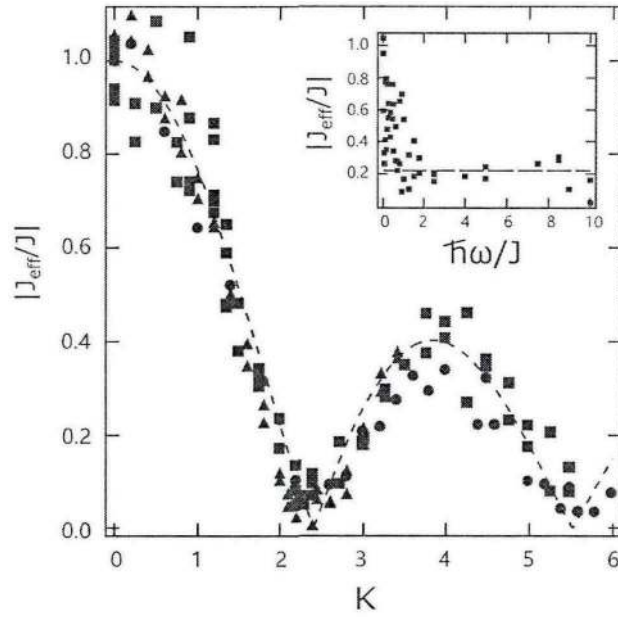


图 5.1 贝塞尔函数的零点。驱动函数为 $f_E(t) = K \cos \omega t$ 时，系统在 $K/\omega = 2.404, 5.520 \dots$ 时发生 CDT，这些值也是贝塞尔函数的零点。资料来自文献^[192]

其中， $K_\beta(t)$ 为改进后的 K-贝塞尔函数， $x = 2\pi$ and $a = 9/4$ 。 $K_\beta(t)$ 可以写为

$$K_\beta(x) = \int_0^\infty dt \cosh(\beta t) e^{-x \cosh t} \quad (5.30)$$

因此

$$\begin{aligned} \Xi^*(E) &= 8\pi^2 \text{Re} [K_{a+iE/2}(2\pi)] \\ &= 8\pi^2 \int_0^\infty dt \cosh(at) e^{-2\pi \cosh t} \cos(Et/2) \end{aligned} \quad (5.31)$$

另一方面，由式5.27可知

$$\text{Re}(J_{eff}(E)) = \int_0^T dt \cos F_E(t) \quad (5.32)$$

我们的目标是建立 $\text{Re} [J_{eff}(E)] \propto \Xi^*(E)$ ，因此结合式5.31和式5.32可得

$$\int_0^T dt \cos F(t) = \int_0^\infty dt \alpha \cosh(at) e^{-2\pi \cosh t} \cos(Et/2) \quad (5.33)$$

其中， α 为任意的常系数。如图5.2所示，右侧被积分函数 $B(t, E) = \cosh(at) e^{-2\pi \cosh t} \cos(Et/2)$ 随着 t 迅速衰减为 0。因此可以将积分上限从 T 处

截断，并要求 T 要足够的大。此时，可以求出

$$F(t) = \cos^{-1} [\alpha \cosh(at) e^{-2\pi \cosh t} \cos(Et/2)] \quad (5.34)$$

令 $F(0) = 0$ ，可得 $\alpha = e^{2\pi}$ 。对 $F(t)$ 求导数，可得 $\Xi^*(E)$ 函数的驱动函数 $P_E(t)$ 为

$$P_E(t) = -\frac{\phi(t)(a \tanh at - 2\pi \sinh t - E/2 \tan(Et/2))}{\sqrt{1 - \phi(t)^2}} \quad (5.35)$$

其中， $\phi(t) = \cosh(at)e^{2\pi(1-\cosh t)} \cos(Et/2)$ 。图5.3展示了对于不同的 E 参数下的驱动函数 $P_E(t)$ ，可见其在 $t > \pi/2$ 后幅度几乎为零。这是因为式5.35中的 $\phi(t)$ 项指数下降。因此可以将式5.33右侧积分上限设置为 $T = \pi/2$ 。而且，对于 $P_E(t)$ 来说，可以将其在 $T = \pi/2$ 处截断，并将四组函数拼接为一个 2π 整周期，如图5.4所示。图5.4中还给出了另一种拼接方法，即将四段函数首尾相接，形成连续的函数。这样做由如下的好处：1，对于冷原子系统来说^[192-194,187]，一个周期的函数平均值为0有利于减小对原子的加热。2，不再包含不连续点。3，von Neumann-Wigner 定理要求，Floquet 态必须有相反的对称性，准能量才能够有简并点^[195]。即满足对称算符 P 的操作不变性 $P: x \rightarrow -x, t \rightarrow t + T/2$ 。这也是我们选择将总周期设置为 $T_0 = 4T = 2\pi$ 的原因。综上，选用第二种拼接方式^[68]。

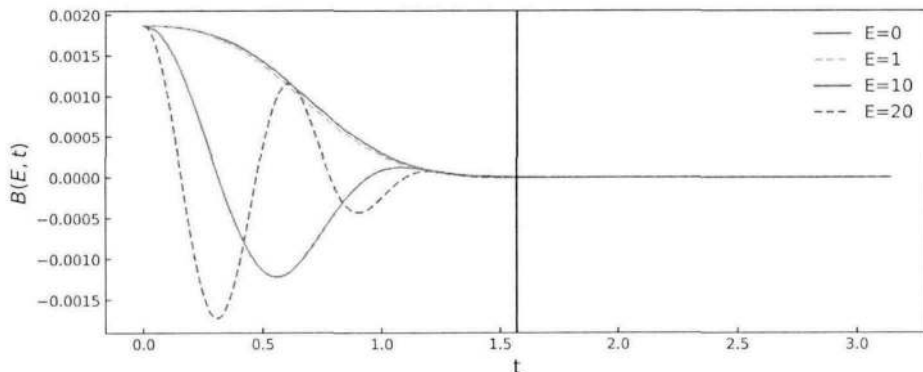


图 5.2 被积分函数随 t 迅速减小。式5.33中右侧被积分函数随 t 迅速减小。黑色竖线表示 $t = \pi/2$ 。

对于黎曼 $\Xi(E)$ 函数，可以做出相似的处理。首先，式5.6中的 $\Xi(E)$ 函数可以写为如下形式

$$\Xi(E) = \int_0^{\infty} dt \Phi(t) \cos(Et/2) \quad (5.36)$$

其中， $\Phi(t) = 2\pi e^{5t/4} \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi e^t n^2 - 3)n^2 e^{-\pi n^2 e^t}$ （本工作中，取前 100 项求和）^[71]。

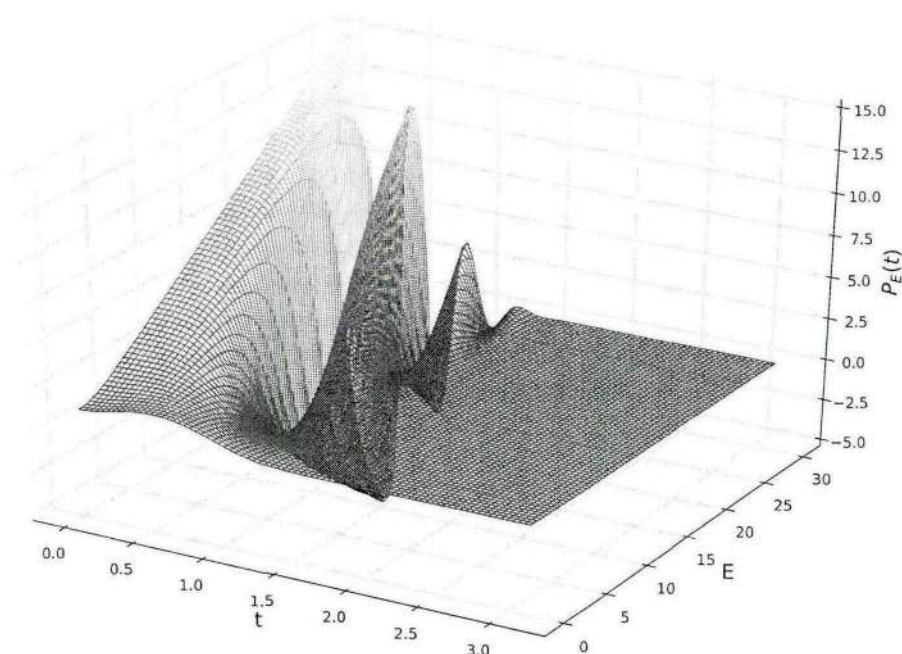


图 5.3 驱动函数 $P_E(t)$ 。在 $t > \pi/2$ 后 $P_E(t)$ 的幅度几乎为零，因此可以将式 5.33 中的积分设为 $T = \pi/2$ ，如图 5.2 中黑色竖线所示位置。

目标是找到一个驱动函数使得 $\text{Re} [J_{eff}(E)] \propto \Xi(E)$ 。同样地，根据

$$\int_0^T dt \cos F_E(t) = \alpha \int_0^\infty dt \Phi(t) \cos(Et/2) \quad (5.37)$$

其中， α 为任意的比例常数。可以使用足够大的 T 来取代右侧积分上限，即

$$\alpha \int_0^T dt \Phi(t) \cos(Et/2) = \int_0^T dt \cos F_E(t) \quad (5.38)$$

可以解得

$$F_E(t) = \cos^{-1}[\alpha \Phi(t) \cos(Et/2)] \quad (5.39)$$

设置边界条件 $F(t=0) = 0$ ，可得 $\alpha \Phi(0) = 1$ and $\alpha = 1/\Phi(0)$ 。因此 $F_E(t)$ 可以写为

$$F_E(t) = \cos^{-1}[\Phi(t)/\Phi(0) \cos(Et/2)] \quad (5.40)$$

现在确定 T 的大小。如图 5.5 所示， $\Phi(t)$ 和 $\Phi(t) \cos(Et/2)$ 在 $t > \pi/2$ 后几乎幅度都为 0，因此可以将积分上限 T 确定为 $T = \pi/2$ 。这个选择使得 $\text{Re} [J_{eff}(E)] = \Xi(E)/\Phi(0)$ 。当参数 E 等于黎曼零点时，系统的准能量发生简并，即发生 CDT 现象。因此通过测量系统的 CDT，即可得到黎曼函数的零点 E_n 。

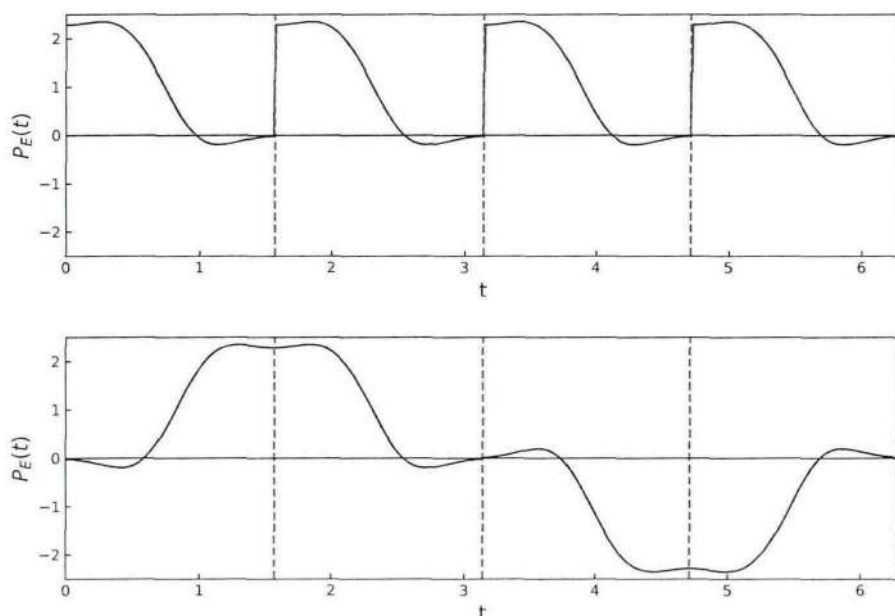


图 5.4 具有对称性的驱动函数。上图：直接拼接的 $P_{E=4}(t)$ ，红色竖直的虚线表示拼接的位置。下图：具有对称性的 $P_{E=4}(t)$ ，满足 $P_E(t) = -P_E(t + T_0/2)$ ，其中 $T_0 = 4T = 2\pi$ 。上述图像拼接的方法为：第一段 $0 \leq t \leq \pi/2$ 为 $f_E(t) = P_E(\pi/2 - t)$ ；第二段 $\pi/2 \leq t \leq \pi$ 为第一段关于 $t = \pi/2$ 的镜像对称，即 $f_E(t) = P_E(\pi - t)$ ；第三段第四段 $\pi \leq t \leq 2\pi$ 为 $f_E(t) = -P_E(2\pi - t)$ 。

可以直接得到驱动函数

$$R_E(t) = -\frac{[\Phi'(t) \cos(Et/2) - (E/2) \Phi(t) \sin(Et/2)]}{\sqrt{\Phi^2(0) - [\Phi(t) \cos(Et/2)]^2}} \quad (5.41)$$

其中， $\Phi'(t)$ 可以使用 $\Phi(t)$ 中各个级数的求导得到，

$$\Phi'(t) = \frac{\pi e^{5t/4}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (30e^t n^2 \pi - 8e^{2t} n^4 \pi^2 - 15) n^2 e^{-\pi n^2 e^t} \quad (5.42)$$

如图5.5所示。

[68]

然而，上述理论中存在两个相互矛盾的条件。一方面，式5.26和式5.27要求高频近似条件 $\omega = 2\pi/T \gg J$ 。另一方面式5.33和式5.37又要求 T 要足够大以替换积分上限。为了解决这个问题，需要引入比例系数 $\Omega > 1$ ，实现如下变换 $f(t) \rightarrow \Omega f(\Omega t)$ ，同时保持总周期 $T_0 = 4T = 2\pi$ 不变。如图5.6和图5.7中所示，比例系数 Ω 带来的效果为两方面的，一是截取了更多的驱动函数，二是将驱动函数压缩并增高。这能够同时满足高频条件和截断近似。因此在理论上 Ω 越大，上述驱动函数的效果越好。

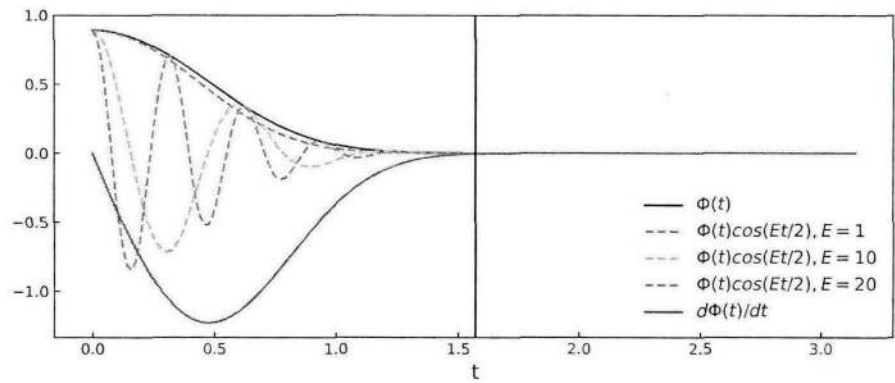


图 5.5 $\Phi(t)$, $\Phi(t) \cos(Et/2)$ 和 $\Phi'(t)$ 。三者都在 $t = \pi/2$ （黑色竖线）后几乎为零。

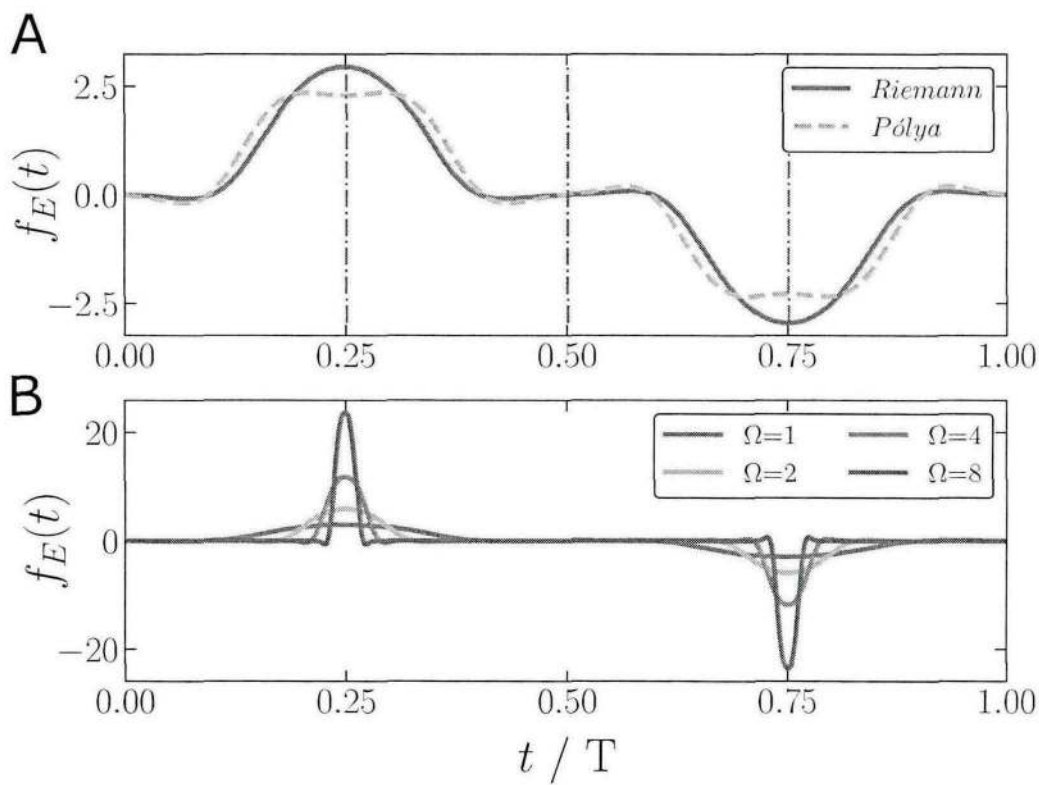


图 5.6 驱动函数的变形。上图：黎曼函数和波利亚函数各自的驱动函数对比图。下图：黎曼函数的驱动函数 $R_E(t)$ 随系数 Ω 的变化。图中 $E = 4$ 。

5.4 实验与结果

本文中使用单个囚禁离子量子比特实现了上述的方案。本文在第二章最后一节已经介绍了微波与离子的相互作用。为了方便，在此再次写出相关结果。使用如下微波与离子相互作用

$$\vec{B} = \vec{n} B \cos(\Phi(t) + \phi_0) \tag{5.43}$$

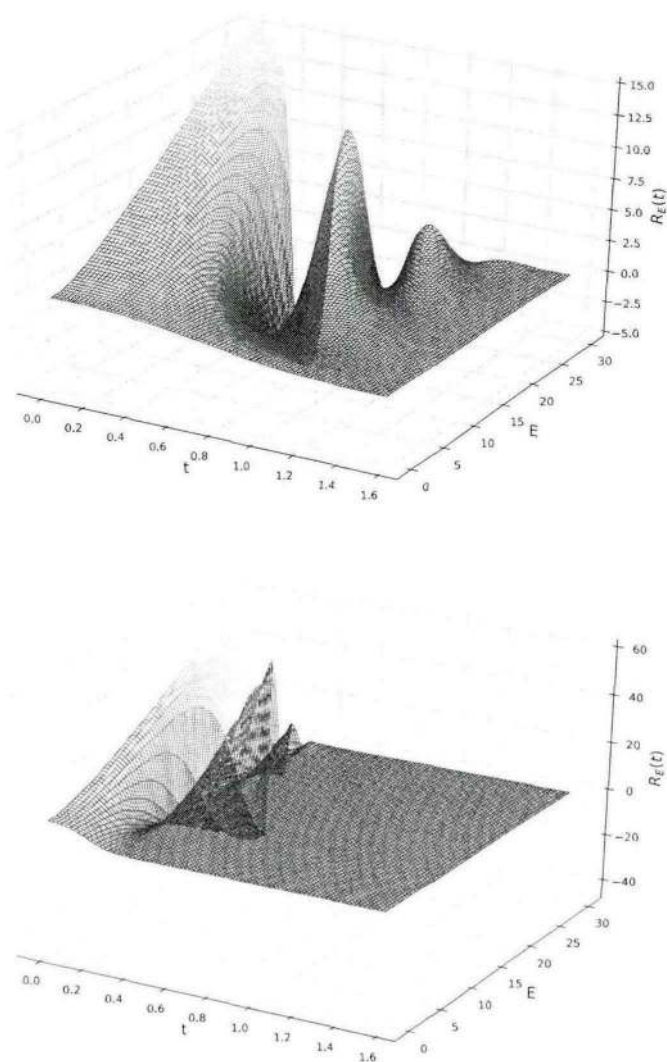


图 5.7 驱动函数随 E 和 t 的变化。左图: $\Omega = 1$ 时的 $R_E(t)$ 。右图: $\Omega = 4$ 时的 $R_E(t)$ 。可见更高的 Ω 对应更高更尖锐的函数值。截断时间为 $T = \pi/2$ 。

其中, $\Phi(t) = \omega_{10}t + F(t)$, $F(t)$ 为相位调制函数, ϕ_0 为微波初始相位。则经过化简后得到旋转坐标系中的哈密顿量为

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar}{2}[J \cos(\phi_0)\sigma_x + J \sin(\phi_0)\sigma_y - f(t)\sigma_z] \quad (5.44)$$

其中, $f(t) = \dot{F}(t)$ 。只要令 $\phi_0 = 0$, $f(t) = f_E(Jt)/2$, 即可得到与式 5.25 完全一致的哈密顿量

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar}{2}J\sigma_x + Jf_E(Jt)\sigma_z/2 \quad (5.45)$$

其中, $f_E(t')$ 为上一节得到的式 5.35 和式 5.41。但需要注意的是, 式 5.35 和式 5.41 中驱动函数 $f_E(t')$ 的参数 t' 为无量纲时间, 其范围为 $[0, 2\pi]$, 一个完整的周期为 $T_0 = 4T = 2\pi$, 而在式 5.45 中, 代入的是 $f_E(Jt)$ 。这里的 t 为实际操作的时间为

$[0, 2\pi/J]$, 一个完整的周期为 $T_1 = 4T_D = 2\pi/J$, 为单位秒 (s)。因此在接下来的实验过程中, 使用 t 表示真实的时间。另外, 在 $\Omega > 1$ 时,

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar}{2}J\sigma_x + \Omega J f_E(\Omega J t)\sigma_z/2 \quad (5.46)$$

其中, $f(t)$ 的母函数 $F(t)$ 也要相应的改变为 $F(t, \Omega)$, 同时保持函数周期始终为 $T_1 = 4T_D = 2\pi/J$ 。实验上, 我们设置了 $\Omega = 8$ 。更小的 Ω 会导致高频近似条件的不成立, 因此带来与准确值更大的偏差。而更大的 Ω 值会导致又高又窄的驱动函数, 对实验设备提出了挑战。因此 $\Omega = 8$ 是一个平衡各方需求的值。

实验上, 量子比特编码在单 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的超精细能级 $|0\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ 和 $|1\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ 上, 其能级间距为 $\omega_{01} = 12.6$ GHz。该能级对磁场的抖动一阶不敏感, 因此可以具有较长的相干时间^[196]。这对于本实验是至关重要的, 因为需要驱动系统演化多个周期, 需要长的相干时间。经过 1 ms 的多普勒冷却, 量子比特以 99.9 % 的概率被制备到基态 $|0\rangle$ 。使用一个相位调制周期为 $T_1 = 2\pi/J$ 的微波信号 $B(t) = B_0 \cos(\omega_{01}t + JF(Jt, \Omega)/2)$, 其中 $J = (2\pi)4$ kHz, 经过放大器后施加到离子上, 驱动时间为 nT_1 秒, 其中 n 为正整数。然后, 一个共振的 $\frac{\pi}{2}$ 旋转操作作用在离子上, 使得投影测量基被设定为 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 。最后, 使用 369.5 nm 进行 400 μs 的荧光探测, 如果在单次测量中没有测到光子, 则测量结果为 0; 如果测量到了 1 个或 1 个以上的光子, 则测量结果为 1。重复该过程 N 次, 得到亮态的次数为 N_b , 则得到 $P_{|+\rangle} = N_b/N$ 。

选择测量基为 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, 是因为这能给出最为灵敏的测量能力。实验中, 统一将初始态制备成 $|0\rangle$ 。现在对比三种常用的测量基: $|0\rangle$ (σ_z 测量), $|+\rangle$ (σ_x 测量), 和 $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ (σ_y 测量)。

1. 如果测量基为 $|0\rangle$, 在 $t = nT_1$ 时刻测量的期望值为 $P_{|0\rangle}(E, t) = 1/2 + \cos(2\epsilon(E)t)/2$, 其中 E 是参数, $\epsilon(E)$ 为准能量。对于相邻的两个 E_1 和 E_2 , 其期望值的差为 $\Delta P_{|0\rangle} = P_{|0\rangle}(E_1, t) - P_{|0\rangle}(E_2, t) = t^2(\epsilon^2(E_1) - \epsilon^2(E_2)) + \mathcal{O}((t\epsilon)^{2k})$, 其中 $\mathcal{O}((t\epsilon)^{2k})$ 是更高阶的偶次项。

2. 如果测量基为 $|+\rangle$, 在 $t = nT_1$ 时刻测量的期望值为 $P_{|+\rangle} = 1/2 - \sin(2\epsilon(E)t)/2$ 。对于相邻的两个 E_1 和 E_2 , 其期望值的差为

$$\Delta P_{|+\rangle} = t(\epsilon(E_2) - \epsilon(E_1)) + \mathcal{O}((t\epsilon)^{2k+1}) \quad (5.47)$$

其中, $\mathcal{O}((t\epsilon)^{2k+1})$ 为更高阶的奇次项。

3. 如果测量基为 $|i\rangle$, 在 $t = nT_1$ 时刻测量的期望值 $P_{|i\rangle}$ 将会在 0.5 附近以 $A \simeq 0.005$ 的幅度变化, 因此对于相邻的两个 E_1 和 E_2 , 其概率差难以在实验上观测到。

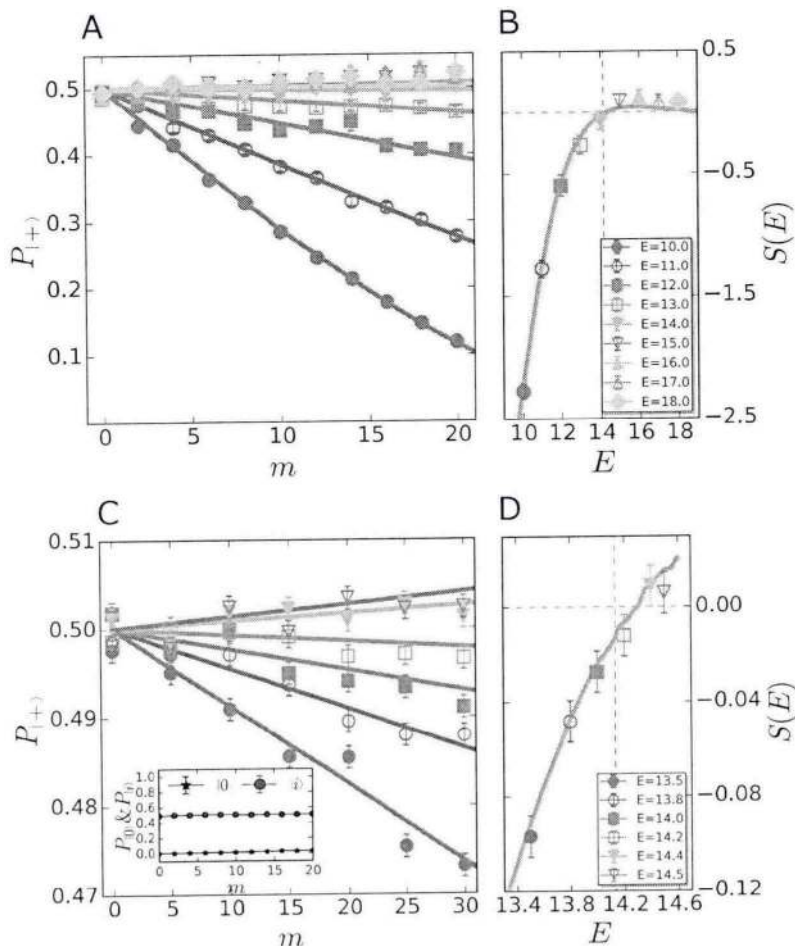


图 5.8 黎曼函数第一个零点的测量。左图: $E = 10 \sim 18$, 间隔 $\Delta E = 1$ 。右图: $E = 13.4 \sim 14.6$ 。由于 $S(E = 14.2) = -0.012 \pm 0.009$ 且 $S(E = 14.4) = 0.009 \pm 0.009$, 根据二分法可知, $S(E) = 0$ 的点应在 $14.2 < E < 14.4$ 。因此, 取该零点为 $E = 14.3 \pm 0.1$ 。这与黎曼第一个零点 $E_1 = 14.1347$ 十分接近。B 图和 D 图中的红色竖直虚线为黎曼第一个零点 $E_1 = 14.1347$ 所在位置, 绿色水平虚线为 $S(E) = 0$ 。C 图中, 我们还给出了在 $E = 14.0$ 时的 $P_{|0\rangle}(n, E)$ 和 $P_{|i\rangle}(n, E)$, 几乎不变。A (C) 图中每个点的误差条表示 40000 (160000) 次测量的统计方差。B 和 D 中每个点的误差条为该点在 A 和 C 中六个 $P_{|+ \rangle}(n, E)$ 的方差之和。

在 CDT 发生的区域附近是最为重要的, 相邻两个 E_1 和 E_2 的概率差越大越容易在实验上观测并区分。而此时 $t\epsilon(E) \ll 1$, 上述的分析意味着 $\Delta P_{|0\rangle}, \Delta P_{|i\rangle} \ll \Delta P_{|+ \rangle}$ 。因此, 我们选择了 $P_{|+ \rangle}$ 作为主要观测量。当 CDT 发生的时候, $P_{|+ \rangle}$ 应不再随驱动周期数变化。当然, 如果增加驱动周期 n , $t\epsilon(E) = nT_1\epsilon(E)$ 也会增加, 这有利于区分不同的结果。但是由于系统的态制备和测量误差为 99.5%, 能够区分的两个概率差为 $\Delta P_{|+ \rangle} \sim 0.005$, 更小的差别将会被噪音淹没而难以区分。对于实验上能够区分的 E_1 和 E_2 , 设定其差值为 $\Delta E = 0.1$, 则二者的 $P_{|+ \rangle}$ 只差为 $nT_1(\epsilon(E_1) - \epsilon(E_2)) \sim 5n \times 10^{-4}$ 。所以, 至少需要 $n = 10$ 才能够将二者

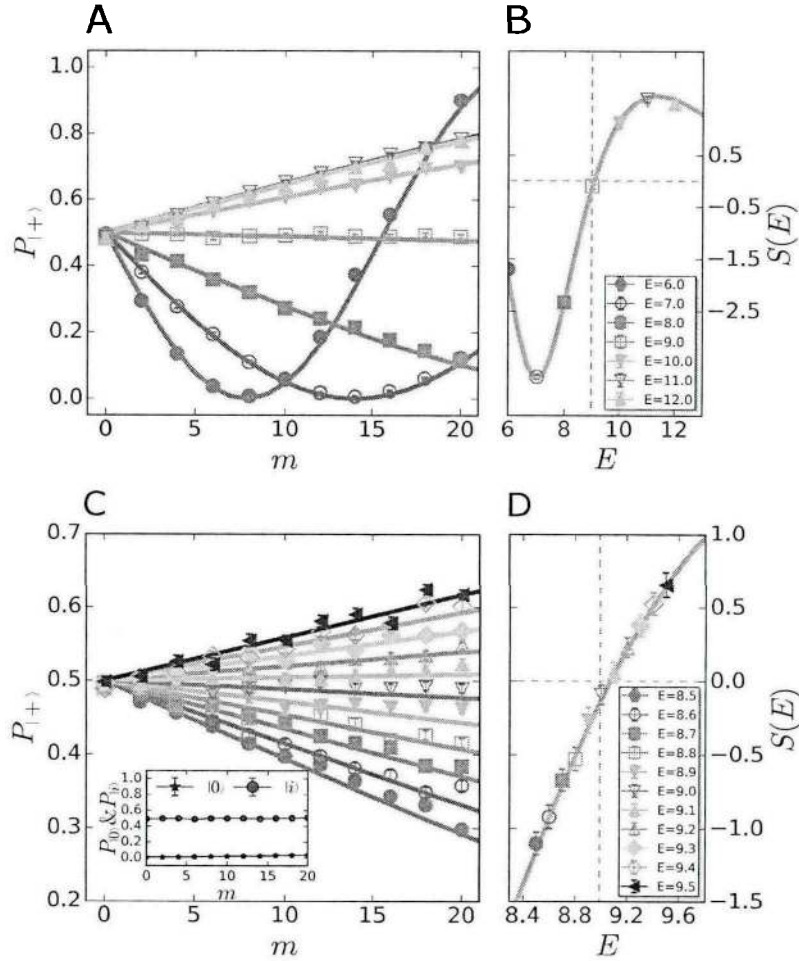


图 5.9 波利亚函数 $\Xi^*(E)$ 的第一个零点的测量。左图： $E = 6 \sim 12$ ，间隔 $\Delta E = 1$ 的粗扫描。由于 $S(E = 9) = -0.062 \pm 0.014$ 且 $S(E = 10) = 1.162 \pm 0.013$ ，可见零点在 $E = 9$ 和 10 之间。右图： $E = 8.4 \sim 9.6$ ，间隔 $\Delta E = 0.1$ 的细扫描。由于 $S(E = 9.0) = -0.081 \pm 0.014$ 且 $S(E = 9.1) = 0.061 \pm 0.014$ 具有不同的符号，波利亚函数的零点测量值为 9.05 ± 0.05 ，与实际零点 8.993 （红色竖直虚线）十分接近。C 图中给出了在 $E = 9.0$ 时的 $P_{|0\rangle}(n, E)$ 和 $P_{|i\rangle}(n, E)$ ，几乎不变。A 和 C 图中每个点的误差条表示 40000 次测量的统计方差。B 和 D 中每个点的误差条为该点在 A 和 C 中六个 $P_{|+ \rangle}(n, E)$ 的方差之和。

区分，这要求系统的相干时间至少达到 $2,000T_1$ （在我们的系统中约为 500 ms）。这对黎曼函数的第一个零点来说是可以实现的。但是，对于第二个零点，由于 $nT_1(\epsilon(E_1) - \epsilon(E_2)) \sim 5n \times 10^{-6}$ ，此时需要 $n = 1000$ 才能将其区分。此时相干时间需要达到 $10^5 T_1$ ，超过了目前系统的能力。

实验上，改变参数 E 并驱动量子比特演化 n 个周期，记录 $P_{|+ \rangle}(n, E)$ 的变化。由于系统演化较为平滑，选取了 $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30$ 六个点作为数据采集点。上述的分析可知 $P_{|0 \rangle}(E, t) = 1/2 - \sin(2\epsilon(E)t)/2$ ，在 $\epsilon(E)t \ll 1$ 时，有 $P_{|0 \rangle}(E, n) = 1/2 - nT_1\epsilon(E)$ 。因此当准能量简并时， $\epsilon(E_n) = 0$ 且 $P_{|0 \rangle}(E_n, n) =$

0.5。此时， E_n 既是准能量的零点，也是黎曼函数的零点。因此，通过观察何时 $P_{|0\rangle}(E_n, n) = 0.5$ ，来判断系统是否发生了 CDT，进而确认黎曼函数零点 E_n 的位置。

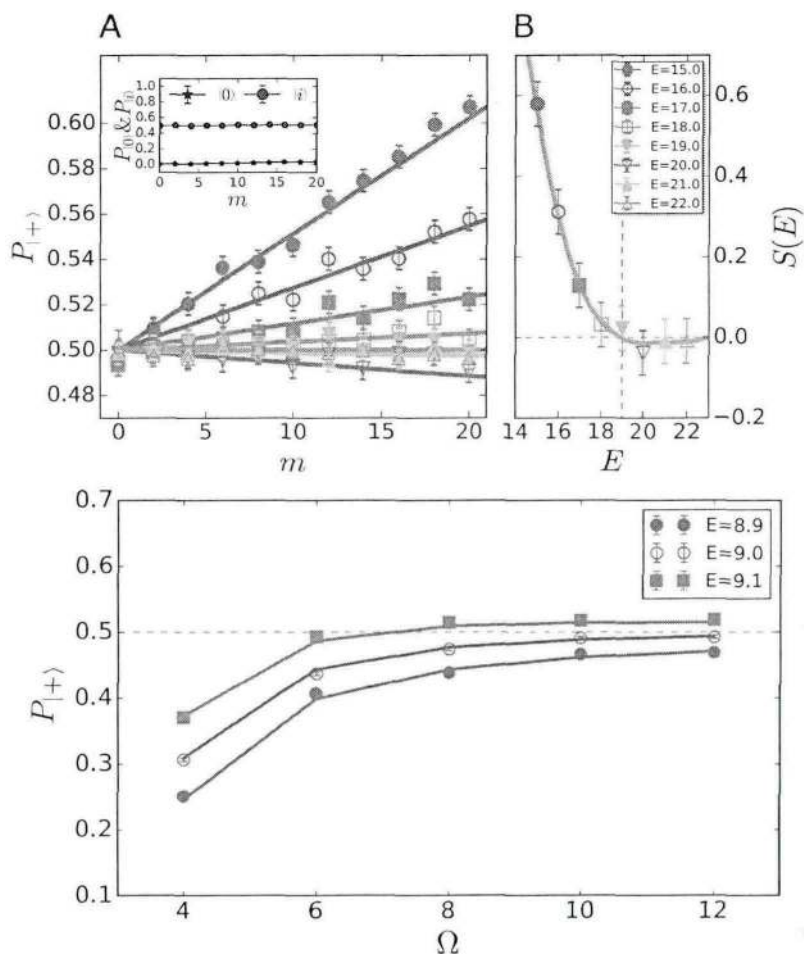


图 5.10 左图：波利亚函数 $\Xi^*(E)$ 的第二个零点的测量。 $E = 15 \sim 22$ ，间隔 $\Delta E = 1$ 的粗扫描。由于 $S(E = 19) > 0$ 且 $S(E = 20) < 0$ ，可见零点在 $E = 19$ 和 20 之间。A 图中，还给出了在 $E = 19.0$ 时的 $P_{|0\rangle}(n, E)$ 和 $P_{|1\rangle}(n, E)$ ，几乎不变。第二个零点的测量值 $E = 19.5 \pm 0.5$ 与实际值 18.996 十分接近。B 中每个点的误差条为该点在 A 和 C 中六个 $P_{|+\rangle}(n, E)$ 的方差之和。右图：波利亚函数的 $P_{|+\rangle}(n = 30, E)$ 随 Ω 的变化，其中 $E = 8.9, 9.0, 9.1$ 。在 $\Omega = 6$ 时， $P_{|+\rangle}(n = 30, E = 9.1)$ 更接近 0.5 ，所以此时发生 CDT。而当 $\Omega = 8$ 时， $P_{|+\rangle}(n = 30, E = 9.0)$ 开始更靠近 CDT，但 $P_{|+\rangle}(n = 30, E = 9.1)$ 仍然更接近 CDT。直到在 $\Omega = 12$ 时， $P_{|+\rangle}(n = 30, E = 9.0)$ 已经明显地发生了 CDT，而 $P_{|+\rangle}(n = 30, E = 9.1)$ 偏离的越来越远。图中每个点的误差条表示 40000 次测量的统计方差。

如图 5.8 所示，为黎曼函数的第一个零点的测量。其中首先大范围地扫描了 $E = 10 \sim 18$ ，间隔 $\Delta E = 1$ 。此时可以明显地看到在 $E = 10$ 时， $P_{|+\rangle}(n, E = 10)$ 变化幅度很大，而随着 E 变大， $P_{|+\rangle}(n, E)$ 越来越平缓。为了衡量这种演化的

趋势, 定义 $S(E) = \sum_n P_{|+\rangle}(n, E) - P_{CDT}$ 作为新的衡量标准, 其中 $P_{CDT} = 0.5$ 为 CDT 发生时的概率期望值。显然, 在 CDT 时 $S(E) = 0$ 。从图5.8可以看出, $S(E = 14) = -0.036 \pm 0.014$ 而且 $S(E = 15) = 0.074 \pm 0.014$, 即 $S(E = 14) < 0$ 而 $S(E = 15) > 0$ 。根据二分法可知, $S(E) = 0$ 的点应在 $14 < E < 15$ 。所以在 13 到 15 之间更为精细的测量, 取 $E = 13.4 \sim 14.6$ 。此时, 可以发现 $P_{|+\rangle}(n, E)$ 在 $14.2 < E < 14.4$ 时斜率由负变正。而 $S(E = 14.2) = -0.012 \pm 0.009$ 且 $S(E = 14.4) = 0.009 \pm 0.009$, 根据二分法可知, $S(E) = 0$ 的点应在 $14.2 < E < 14.4$ 。因此, 取该零点为 $E = 14.3 \pm 0.1$ 。这与黎曼第一个零点 $E_1 = 14.1347$ 十分接近。

使用同样的方法, 还测量了波利亚函数的前两个零点, 如图5.9和图5.10所示。其中, 第一个零点测量值为 9.05 ± 0.05 , 与实际零点 8.993 十分接近, 第二个零点的测量值为 19 ± 1 , 与实际值 18.996 也十分接近。在图5.10右侧, 展示了改变 Ω 而带来的变化。在 $\Omega = 6$ 时, $P_{|+\rangle}(n = 30, E = 9.1)$ 更接近 0.5, 所以测得此时发生 CDT。而当 $\Omega = 8$ 时, $P_{|+\rangle}(n = 30, E = 9.0)$ 开始更靠近 CDT, 但 $P_{|+\rangle}(n = 30, E = 9.1)$ 仍然更接近 CDT。直到在 $\Omega = 12$ 时, $P_{|+\rangle}(n = 30, E = 9.0)$ 已经明显地发生了 CDT, 而 $P_{|+\rangle}(n = 30, E = 9.1)$ 偏离的越来越远。因此, 如果一直增加 Ω , 将会不断地提高测量的精度。在当前的实验中, 测量值与实际值之间的偏差, 就来自于 Ω 不够大。但是前面也提到过, 增加 Ω 的代价是更高更窄的驱动函数, 这意味着要在更短的时间内, 更为精确地施加更复杂的微波。实验中使用的任意波发生器 (Spectra, 采样率 1GHz) 并没有足够的精度来实现。因此, 我们将 Ω 设定为 8。

综上, 我们在实验上通过周期性地驱动单个离子量子比特, 通过设计驱动函数使得系统发生 CDT 的参数与黎曼函数的零点相吻合, 因此在实验上观察到了黎曼函数的第一个零点和波利亚函数的前两个零点。依赖离子阱的长相干时间和高保真度的操作和读取精度, 测量值与实际值的误差只有 0.1。虽然这种方法并非 PHC 原来使用静态哈密顿量能谱的方法, 也不是对黎曼零点的直接测量, 但仍然对黎曼函数与量子系统之间的联系提供了新的思路。对于黎曼零点来说, 如果使用衰减更慢的函数, 则能够测量到更多的零点。例如使用文献^[179,181] 中的 Van der Pol 函数 $g(E) = -\zeta(1/2 + iE)/(1/2 + iE)$, 则能够测量到 200 以内的 80 个零点。这对于未来使用量子系统解决数学问题提供了有力的工具。

第6章 结 论

6.1 总结

本工作详细介绍了一个新型高通光刀片式离子阱的搭建。使用紧凑型玻璃真空腔替代传统的金属真空腔，能够最大限度地保证刀片阱的通光性能。相比于之前的离子阱，该离子阱的特点是，势阱中心距离真空腔外界只有 15 mm 的距离，在四周允许同时使用两个数值孔径 (Numerical aperture, NA) 最大为 0.32 的物镜和两个 NA 最大为 0.66 的物镜，同时还保留了大量的斜入射空间。而以前的离子阱最多只能使用两个高数值孔径的物镜。这四个物镜可以同时用于拉曼光离子寻址、可编程光镊阵列，和高效率荧光收集，在激光操作上有天然的优势。例如，使用高度汇聚的拉曼激光，可以实现高速的量子门；使用高度汇聚的光镊，可以实现对离子运动状态的调控，实现更多离子的操作；使用冷原子系综与离子相互作用，研究可控的量子化学模拟，等等。本文详细介绍了该装置各个零部件的设计理念，并结合数值模拟工具以及实验测量结果进行结构参数的优化。本文详细介绍了该装置的加工工艺和组装流程，以及在电子线路、真空制备上遇到的问题和解决办法。本文详细介绍了 369.5 nm 激光和 935.18 nm 激光的 PDH 稳频，最终获得线宽小于 1 MHz，且具备频率的长期稳定性。实验上我们优化了所有激光的光路，例如使用双次通过 AOM 的结构，使得光路更为紧凑、稳定且易于维护，同时扩展了扫描范围，增加了关断比。该系统最终成功束缚了一维 $^{174}\text{Yb}^+$ 和 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子晶体，验证了该装置的工作性能。然后，将离子运动频率的实际测量结果与数值模拟对比，进一步对该阱的参数进行分析。实验上使用微波实现了拉比旋转，以及 Ramsey 测量。

作为一个量子模拟的演示工作，本文在单个离子模拟器上使用微波调控量子比特的准静态演化。利用 Floquet 技术，设计特殊的驱动函数，使得系统演化被冻结时的参数与黎曼函数零点一一对应。本文使用这种方法测量到了黎曼函数的第一个零点和波利亚函数的前两个零点，误差只有 0.1。这种周期性调控技术能够有效地扩展到其他函数上。该实验增加了黎曼函数与量子力学之间的联系，对于未来使用量子系统解决数学问题提供了有力的工具。

6.2 展望

本文中的新型高通光离子阱为使用激光提供了更多的操作空间。四周的物镜能够极大地增加荧光的收集效率。未来可以利用该装置的高通光性构造高效率的纠缠源，并与其它系统纠缠，如稀土离子参杂的固态存储平台，实现小规模

的量子网络。还可以使用光镊技术对离子运动状态进行控制,实现更长离子链的纠缠操作,有利于解决离子阱系统得可扩展性和操作并行性。更有可能实现使用光镊和静电场束缚单个离子,以减小由于射频场带来的微运动的影响。下一步的实验包括:第一,使用拉曼光对多离子量子态进行控制,包括实现 EIT 冷却、边带冷却、多离子纠缠等等。第二,将光镊结合到离子阱中,研究光镊对离子运动频率得调制能力,并实现可编程光镊阵列辅助得可扩展量子操作。第三,对于 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子来说,常用的拉曼光为 355 nm 和 375 nm 的紫外脉冲光。强的紫外光由于更容易引起光电效应而带来充电问题。该装置将有能力实现可见光波段或者红外波段的拉曼操作,而这些激光具有功率强、容易调制和成本低廉等优点。

本文的装置还有一些可以改进的地方。螺旋谐振腔的电压增益不够高。通过减小阱内 RF 线路对地电容,优化谐振腔的尺寸和线圈的参数能够获得更高的电压增益,并获得更高的径向束缚能力。硅片固定板会带来较大的射频损耗,因此可以替换为玻璃材料。目前的平台并没有完成磁屏蔽的安装,但在未来这将是提升离子相干时间的一个方法。另外,现有的玻璃腔与金属法兰连接部位较细,从而阻碍真空泵的抽速。可以使用直径更大的玻璃管作为连接件,这将数倍地提升导气率。

参 考 文 献

- [1] FEYNMAN R P. Simulating physics with computers[J].
- [2] DEUTSCH D. Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer[J]. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 1985, 400(1818): 97-117.
- [3] SHOR P W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring[C]//Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science. Ieee, 1994: 124-134.
- [4] GROVER L K. A fast quantum mechanical algorithm for database search[C]//Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing. 1996: 212-219.
- [5] NIELSEN M A, CHUANG I. Quantum computation and quantum information[M]. American Association of Physics Teachers, 2002.
- [6] DEHMELT H, et al. Radiofrequency spectroscopy of stored ions i: Storage[J]. Advances in Atomic and Molecular Physics, 1967, 3: 53-72.
- [7] Verfahren zur trennung bzw. zum getrennten nachweis von ionen verschiedener spezifischer ladung[P].
- [8] PAUL W. Electromagnetic traps for charged and neutral particles[J]. Reviews of modern physics, 1990, 62(3): 531.
- [9] PRESTAGE J, DICK G J, MALEKI L. New ion trap for frequency standard applications[J]. Journal of Applied Physics, 1989, 66(3): 1013-1017.
- [10] SCHMIDT-KALER F, HÄFFNER H, GULDE S, et al. How to realize a universal quantum gate with trapped ions[J]. Applied Physics B, 2003, 77(8): 789-796.
- [11] GULDE S. Experimental realization of quantum gates and the deutsch-josza algorithm with trapped 40Ca^{+} -ions[J]. Universität Innsbruck, Diss, 2003.
- [12] BLAKESTAD R B. Transport of trapped-ion qubits within a scalable quantum processor[M]. 2010.
- [13] CHIAVERINI J, BLAKESTAD R B, BRITTON J, et al. Surface-electrode architecture for ion-trap quantum information processing[J]. arXiv preprint quant-ph/0501147, 2005.
- [14] ROMASZKO Z D, HONG S, SIEGELE M, et al. Engineering of microfabricated ion traps and integration of advanced on-chip features[J]. Nature Reviews Physics, 2020, 2(6): 285-299.
- [15] MEHTA K K. Integrated optical quantum manipulation and measurement of trapped ions [D]. Massachusetts Institute of Technology, 2017.

- [16] MEHTA K K, ZHANG C, MALINOWSKI M, et al. Integrated optical multi-ion quantum logic[J]. *Nature*, 2020, 586(7830): 533-537.
- [17] NIFFENEGGER R J, STUART J, SORACE-AGASKAR C, et al. Integrated optical control and enhanced coherence of ion qubits via multi-wavelength photonics[J]. *arXiv e-prints*, 2020: arXiv-2001.
- [18] BRADY G R, ELLIS A R, MOEHRING D L, et al. Integration of fluorescence collection optics with a microfabricated surface electrode ion trap[J]. *Applied Physics B*, 2011, 103(4): 801-808.
- [19] DANIILIDIS N, NARAYANAN S, MÖLLER S A, et al. Fabrication and heating rate study of microscopic surface electrode ion traps[J]. *New Journal of Physics*, 2011, 13(1): 013032.
- [20] ALLCOCK D, GUIDONI L, HARTY T, et al. Reduction of heating rate in a microfabricated ion trap by pulsed-laser cleaning[J]. *New Journal of Physics*, 2011, 13(12): 123023.
- [21] BROWN K R, KIM J, MONROE C. Co-designing a scalable quantum computer with trapped atomic ions[J]. *npj Quantum Inf.*, 2016, 2(1): 1-10.
- [22] KIELPINSKI D, MONROE C, WINELAND D J. Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer[J]. *Nature*, 2002, 417(6890): 709-711.
- [23] WINELAND D J, MONROE C, ITANO W M, et al. Experimental issues in coherent quantum-state manipulation of trapped atomic ions[J]. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 1998, 103(3): 259.
- [24] ALLCOCK D, HARTY T, BALLANCE C, et al. A microfabricated ion trap with integrated microwave circuitry[J]. *Applied Physics Letters*, 2013, 102(4): 044103.
- [25] LEKITSCH B, WEIDT S, FOWLER A G, et al. Blueprint for a microwave trapped ion quantum computer[J]. *Science Advances*, 2017, 3(2): e1601540.
- [26] BLAKESTAD R B, OSPELKAUS C, VANDEVENDER A P, et al. High-fidelity transport of trapped-ion qubits through an X-junction trap array[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 102: 153002.
- [27] PINO J, DREILING J, FIGGATT C, et al. Demonstration of the trapped-ion quantum ccd computer architecture[J]. *Nature*, 2021, 592(7853): 209-213.
- [28] MONROE C, RAUSSENDORF R, RUTHVEN A, et al. Large-scale modular quantum-computer architecture with atomic memory and photonic interconnects[J]. *Physical Review A*, 2014, 89(2): 022317.
- [29] DEBNATH S. A programmable five qubit quantum computer using trapped atomic ions[D]. 2016.
- [30] FIGGATT C, OSTRANDER A, LINKE N M, et al. Parallel entangling operations on a universal ion-trap quantum computer[J]. *Nature*, 2019, 572(7769): 368-372.
- [31] WANG Y, QIAO M, CAI Z, et al. Coherently manipulated 2d ion crystal in a monolithic paul

- trap[J]. *Advanced Quantum Technologies*, 2020, 3(11): 2000068.
- [32] MULDOON C, BRANDT L, DONG J, et al. Control and manipulation of cold atoms in optical tweezers[J]. *New J. Phys.*, 2012, 14(7): 073051.
- [33] KAUFMAN A M, LESTER B J, REGAL C A. Cooling a Single Atom in an Optical Tweezer to Its Quantum Ground State[J]. *Phys. Rev. X*, 2012, 2(4): 041014.
- [34] STUART D, KUHN A. Single-atom trapping and transport in dmd-controlled optical tweezers[J]. *New Journal of Physics*, 2018, 20(2): 023013.
- [35] SCHLOSSER N, REYMOND G, PROTSENKO I, et al. Sub-poissonian loading of single atoms in a microscopic dipole trap[J]. *Nature*, 2001, 411(6841): 1024-1027.
- [36] KAUFMAN A M, LESTER B J, REYNOLDS C M, et al. Two-particle quantum interference in tunnel-coupled optical tweezers[J]. *Science*, 2014, 345(6194): 306-309.
- [37] ENDRES M, BERNIEN H, KEESLING A, et al. Atom-by-atom assembly of defect-free one-dimensional cold atom arrays[J]. *Science*, 2016, 354(6315): 1024-1027.
- [38] BERNIEN H, SCHWARTZ S, KEESLING A, et al. Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator[J]. *Nature*, 2017, 551(7682): 579-584.
- [39] PAGANO G, SCAZZA F, FOSS-FEIG M. Fast and scalable quantum information processing with two-electron atoms in optical tweezer arrays[J]. *Adv. Quantum Technol.*, 2019, 2(3-4): 1800067.
- [40] STERLING R C. Fabrication and operation of a two-dimensional ion-trap lattice on a high-voltage microchip[J]. *Nat. Commun.*, 2014: 6.
- [41] ENDERLEIN M, HUBER T, SCHNEIDER C, et al. Single ions trapped in a one-dimensional optical lattice[J]. *Physical review letters*, 2012, 109(23): 233004.
- [42] LAMBRECHT A, SCHMIDT J, WECKESSER P, et al. Long lifetimes and effective isolation of ions in optical and electrostatic traps[J]. *Nature Photonics*, 2017, 11(11): 704-707.
- [43] CORMICK C, SCHAEZT T, MORIGI G. Trapping ions with lasers[J]. *New Journal of Physics*, 2011, 13(4): 043019.
- [44] HUBER T, LAMBRECHT A, SCHMIDT J, et al. A far-off-resonance optical trap for a Ba⁺ ion[J]. *Nat. Commun.*, 2014, 5(1): 5587.
- [45] SHEN Y C, LIN G D. Scalable quantum computing stabilised by optical tweezers on an ion crystal[J]. *New Journal of Physics*, 2020, 22(5): 053032.
- [46] OLSACHER T, POSTLER L, SCHINDLER P, et al. Scalable and parallel tweezer gates for quantum computing with long ion strings[J]. *PRX Quantum*, 2020, 1(2): 020316.
- [47] ESPINOZA J D A, MAZZANTI M, FOUKA K, et al. Engineering spin-spin interactions with optical tweezers in trapped ions[J]. *arXiv preprint arXiv:2103.10425*, 2021.
- [48] TEOH Y H, SAJJAN M, SUN Z, et al. Manipulating phonons of a trapped-ion system using

- optical tweezers[J]. arXiv preprint arXiv:2103.03273, 2021.
- [49] KAUFMANN D, COLLATH T, BAIG M T, et al. Thick-film technology for ultra high vacuum interfaces of micro-structured traps[J]. Applied Physics B, 2012, 107(4): 935-943.
- [50] ROWE M A, BEN-KISH A, DEMARCO B, et al. Transport of quantum states and separation of ions in a dual rf ion trap[J]. arXiv preprint quant-ph/0205094, 2002.
- [51] LANYON B P, HEMPEL C, NIGG D, et al. Universal digital quantum simulation with trapped ions[J]. Science, 2011, 334(6052): 57-61.
- [52] GEORGESCU I M, ASHHAB S, NORI F. Quantum simulation[J]. Rev. Mod. Phys., 2014, 86: 153-185.
- [53] BLATT R, ROOS C F. Quantum simulations with trapped ions[J]. Nat. Phys., 2012, 8(4): 277-284.
- [54] PAGANO G, HESS P, KAPLAN H, et al. Cryogenic trapped-ion system for large scale quantum simulation[J]. Quantum Science and Technology, 2018, 4(1): 014004.
- [55] CUI J M, HUANG Y F, WANG Z, et al. Experimental trapped-ion quantum simulation of the kibble-zurek dynamics in momentum space[J]. Scientific reports, 2016, 6: 33381.
- [56] HÄRTER A, DENSCHLAG J H. Cold atom-ion experiments in hybrid traps[J]. Contemp. Phys., 2014, 55(1): 33-45.
- [57] PURI P, MILLS M, SCHNEIDER C, et al. Synthesis of mixed hypermetallic oxide baoca+ from laser-cooled reagents in an atom-ion hybrid trap[J]. Science, 2017, 357(6358): 1370-1375.
- [58] TOMZA M, JACHYMSKI K, GERRITSMA R, et al. Cold hybrid ion-atom systems[J]. Reviews of Modern Physics, 2019, 91(3): 035001.
- [59] GRIER A T, CETINA M, ORUČEVIĆ F, et al. Observation of cold collisions between trapped ions and trapped atoms[J]. Physical review letters, 2009, 102(22): 223201.
- [60] ZIPKES C, PALZER S, SIAS C, et al. A trapped single ion inside a bose-einstein condensate [J]. Nature, 2010, 464(7287): 388-391.
- [61] SCHMID S, HÄRTER A, DENSCHLAG J H. Dynamics of a cold trapped ion in a bose-einstein condensate[J]. Physical review letters, 2010, 105(13): 133202.
- [62] PURI P, MILLS M, SIMBOTIN I, et al. Reaction blockading in a reaction between an excited atom and a charged molecule at low collision energy[J]. Nature chemistry, 2019, 11(7): 615.
- [63] LINDNER N H, REFAEL G, GALITSKI V. Floquet topological insulator in semiconductor quantum wells[J]. Nature Physics, 2011, 7(6): 490.
- [64] GRUSHIN A G, GÓMEZ-LEÓN Á, NEUPERT T. Floquet fractional chern insulators[J]. Physical review letters, 2014, 112(15): 156801.
- [65] XU X Y, WANG Q Q, HEYL M, et al. Measuring a dynamical topological order parameter

- in quantum walks[J]. *Light: Science & Applications*, 2020, 9(1): 1-11.
- [66] SACHA K. Modeling spontaneous breaking of time-translation symmetry[J]. *Physical Review A*, 2015, 91(3): 033617.
- [67] ZHANG J, PAGANO G, HESS P W, et al. Observation of a many-body dynamical phase transition with a 53-qubit quantum simulator[J]. *Nature*, 2017, 551(7682): 601-604.
- [68] CREFFIELD C E, SIERRA G. Finding zeros of the riemann zeta function by periodic driving of cold atoms[J]. *Physical Review A*, 2015, 91(6): 063608.
- [69] RIEMANN B. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grosse[J]. *Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß*, 1859, 2: 145-155.
- [70] TITCHMARSH E C, HEATH-BROWN D R, TITCHMARSH E C T, et al. The theory of the riemann zeta-function[M]. Oxford University Press, 1986.
- [71] PÓLYA G, et al. Bemerkung über die integraldarstellung der riemannschen ξ -funktion[J]. *Acta Mathematica*, 1926, 48(3-4): 305-317.
- [72] MONTGOMERY H L. The pair correlation of zeros of the zeta function[C]//*Proc. Symp. Pure Math*: volume 24. 1973: 181-193.
- [73] PÓLYA G. Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics: volume 1[M]. Princeton University Press, 1954.
- [74] MONTGOMERY H L. Extreme values of the riemann zeta function[J]. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1977, 52(1): 511-518.
- [75] BERRY M V. Riemann's zeta function: A model for quantum chaos?[M]//*Quantum chaos and statistical nuclear physics*. Springer, 1986: 1-17.
- [76] BERRY M. Semiclassical formula for the number variance of the riemann zeros[J]. *Nonlinearity*, 1988, 1(3): 399.
- [77] BOGOMOLNY E B, KEATING J P. Gutzwiller's trace formula and spectral statistics: beyond the diagonal approximation[J]. *Physical review letters*, 1996, 77(8): 1472.
- [78] BERRY M V, KEATING J P. The riemann zeros and eigenvalue asymptotics[J]. *SIAM review*, 1999, 41(2): 236-266.
- [79] CONNES A. Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the riemann zeta function[J]. *Selecta Mathematica*, 1999, 5(1): 29-106.
- [80] ANEVA B. Symmetry of the riemann operator[J]. *Physics Letters B*, 1999, 450(4): 388-396.
- [81] SIERRA G, TOWNSEND P K. Landau levels and riemann zeros[J]. *Physical review letters*, 2008, 101(11): 110201.
- [82] SREDNICKI M. The berry-keating hamiltonian and the local riemann hypothesis[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2011, 44(30): 305202.
- [83] SCHUMAYER D, HUTCHINSON D A. Colloquium: Physics of the riemann hypothesis[J].

- Reviews of Modern Physics, 2011, 83(2): 307.
- [84] SIERRA G. The riemann zeros as spectrum and the riemann hypothesis[J]. Symmetry, 2019, 11(4): 494.
- [85] BENDER C M, BRODY D C, MÜLLER M P. Hamiltonian for the zeros of the riemann zeta function[J]. Physical Review Letters, 2017, 118(13): 130201.
- [86] SIERRA G, RODRÍGUEZ-LAGUNA J. $H = x p$ model revisited and the riemann zeros[J]. Physical review letters, 2011, 106(20): 200201.
- [87] BERRY M, KEATING J. A compact hamiltonian with the same asymptotic mean spectral density as the riemann zeros[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2011, 44(28): 285203.
- [88] Ion trappers[J]. <https://quantumoptics.at/en/links/ion-trapping-worldwide.html>.
- [89] BOLLER K J, IMAMOĞLU A, HARRIS S E. Observation of electromagnetically induced transparency[J]. Physical Review Letters, 1991, 66(20): 2593.
- [90] EJTEMAEE S, THOMAS R, HALJAN P. Optimization of yb⁺ fluorescence and hyperfine-qubit detection[J]. Physical Review A, 2010, 82(6): 063419.
- [91] BERGQUIST J, HULET R G, ITANO W M, et al. Observation of quantum jumps in a single atom[J]. Phys. Rev. Lett., 1986, 57(14): 1699.
- [92] SAUTER T, NEUHAUSER W, BLATT R, et al. Observation of quantum jumps[J]. Phys. Rev. Lett., 1986, 57(14): 1696.
- [93] NAGOURNEY W, SANDBERG J, DEHMELT H. Shelved optical electron amplifier: Observation of quantum jumps[J]. Phys. Rev. Lett., 1986, 56(26): 2797.
- [94] [J/OL]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Parity_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Parity_(physics)).
- [95] FENG L, TAN W, DE A, et al. Efficient ground-state cooling of large trapped-ion chains with an electromagnetically-induced-transparency tripod scheme[J]. Physical Review Letters, 2020, 125(5): 053001.
- [96] ROOS C F, LEIBFRIED D, MUNDT A, et al. Experimental demonstration of ground state laser cooling with electromagnetically induced transparency[J]. Phys. Rev. Lett., 2000, 85: 5547-5550.
- [97] MORIGI G, ESCHNER J, KEITEL C H. Ground state laser cooling using electromagnetically induced transparency[J]. Phys. Rev. Lett., 2000, 85: 4458-4461.
- [98] LEIBFRIED D, BLATT R, MONROE C, et al. Quantum dynamics of single trapped ions[J]. Rev. Mod. Phys., 2003, 75: 281-324.
- [99] KING B, WOOD C, MYATT C, et al. Cooling the collective motion of trapped ions to initialize a quantum register[J]. Physical Review Letters, 1998, 81(7): 1525.
- [100] SACKETT C A, KIELPINSKI D, KING B E, et al. Experimental entanglement of four

- particles[J]. Nature, 2000, 404(6775): 256-259.
- [101] MIZRAHI J A. Ultrafast control of spin and motion in trapped ions[D]. 2013.
- [102] BRION E, PEDERSEN L H, MØLMER K. Adiabatic elimination in a lambda system[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2007, 40(5): 1033.
- [103] PAULISCH V, RUI H, NG H K, et al. Beyond adiabatic elimination: A hierarchy of approximations for multi-photon processes[J]. The European Physical Journal Plus, 2014, 129(1): 1-14.
- [104] HUBERT T. Stimulated raman transitions between hyperfine ground states of magnetically trapped rubidium-87 atoms[J]. 2015.
- [105] KRAMIDA A, Yu. Ralchenko, READER J, et al. [Z]. 2020.
- [106] IN PHYSICS 1989. T N P. Nobelprize.org. nobel media ab 2021. sun. 7 mar 2021.[J/OL]. <<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1989/summary/>>.
- [107] WINELAND D J. Nobel lecture: Superposition, entanglement, and raising schrödinger' s cat[J]. Reviews of Modern Physics, 2013, 85(3): 1103.
- [108] CIRAC J I, ZOLLER P. Quantum computations with cold trapped ions[J]. Phys. Rev. Lett., 1995, 74: 4091-4094.
- [109] MEHTA K K, ELTONY A M, BRUZEWICZ C D, et al. Ion traps fabricated in a CMOS foundry[J]. Appl. Phys. Lett., 2014, 105(4): 044103.
- [110] BROWNNUTT M, KUMPH M, RABL P, et al. Ion-trap measurements of electric-field noise near surfaces[J]. Rev. Mod. Phys., 2015, 87: 1419-1482.
- [111] JAMES D F. Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation[R]. 1997.
- [112] DUBIN D H. Theory of structural phase transitions in a trapped coulomb crystal[J]. Physical review letters, 1993, 71(17): 2753.
- [113] LIN G D, ZHU S L, ISLAM R, et al. Large-scale quantum computation in an anharmonic linear ion trap[J]. EPL (Europhysics Letters), 2009, 86(6): 60004.
- [114] JOHANNING M. Isospaced linear ion strings[J]. Applied Physics B, 2016, 122(4): 71.
- [115] LECHNER R. Multi-mode cooling techniques for trapped ions[D]. PhD Thesis. University of Innsbruck, 2017 (cit. on p. 21). 148 BIBLIOGRAPHY.
- [116] DIEDRICH F, BERGQUIST J C, ITANO W M, et al. Laser cooling to the zero-point energy of motion[J]. Phys. Rev. Lett., 1989, 62: 403-406.
- [117] RAAB E, PRENTISS M, CABLE A, et al. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure[J]. Physical Review Letters, 1987, 59(23): 2631.
- [118] COLLOPY A L, DING S, WU Y, et al. 3d magneto-optical trap of yttrium monoxide[J]. Physical review letters, 2018, 121(21): 213201.

- [119] SCHAETZ T. Trapping ions and atoms optically[J]. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 2017, 50(10): 102001.
- [120] SCHMIDT J, LAMBRECHT A, WECKESSER P, et al. Optical trapping of ion coulomb crystals[J]. Phys. Rev. X, 2018, 8: 021028.
- [121] HUDSON E R. Sympathetic cooling of molecular ions with ultracold atoms[J]. EPJ Techniques and Instrumentation, 2016, 3: 1-21.
- [122] SCHULZ S A, POSCHINGER U, ZIESEL F, et al. Sideband cooling and coherent dynamics in a microchip multi-segmented ion trap[J]. New Journal of Physics, 2008, 10(4): 045007.
- [123] MONROE C, SWANN W, ROBINSON H, et al. Very cold trapped atoms in a vapor cell[J]. Physical Review Letters, 1990, 65(13): 1571.
- [124] ANDERSON M H, ENSHER J R, MATTHEWS M R, et al. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor[J]. science, 1995: 198-201.
- [125] HUBER G, DEUSCHLE T, SCHNITZLER W, et al. Transport of ions in a segmented linear paul trap in printed-circuit-board technology[J]. New J. Phys., 2008, 10(1): 013004.
- [126] MCLOUGHLIN J J, NIZAMANI A H, SIVERNS J D, et al. Versatile ytterbium ion trap experiment for operation of scalable ion-trap chips with motional heating and transition-frequency measurements[J]. Phys. Rev. A, 2011, 83(1): 013406.
- [127] DEBNATH S, LINKE N M, FIGGATT C, et al. Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits[J]. Nature, 2016, 536(7614): 63-66.
- [128] OLMSCHENK S, YOUNGE K C, MOEHRING D L, et al. Manipulation and detection of a trapped yb⁺ hyperfine qubit[J]. Physical Review A, 2007, 76(5): 052314.
- [129] HOME J P, STEANE A M. Electrode configurations for fast separation of trapped ions[J]. arXiv preprint quant-ph/0411102, 2004.
- [130] FAN X, DORAN A, WANG H. High-q whispering gallery modes from a composite system of gaas quantum well and fused silica microsphere[J]. Appl. Phys. Lett., 1998, 73(22): 3190-3192.
- [131] NIEDERMAYR M, LAKHMANSKIY K, KUMPH M, et al. Cryogenic surface ion trap based on intrinsic silicon[J]. New Journal of Physics, 2014, 16(11): 113068.
- [132] TAO J, LI H Y, LIM Y D, et al. Surface-electrode ion trap with ground structures for minimizing the dielectric loss in the si substrate[J]. IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, 2019, 10(4): 679-685.
- [133] PHELPS M, REID M M, DOUGLAS R, et al. Strength of hydroxide catalysis bonds between sapphire, silicon, and fused silica as a function of time[J]. Phys. Rev. D, 2018, 98(12): 122003.
- [134] ROHATGI V K. Photoelectric effect from borosilicate glass[J]. Journal of Applied Physics,

- 1957, 28(9): 951-959.
- [135] NELSON R. Electronic conduction in glass[J]. *Journal of Applied Physics*, 1963, 34(3): 629-631.
- [136] HARLANDER M, BROWNNUTT M, HÄNSEL W, et al. Trapped-ion probing of light-induced charging effects on dielectrics[J]. *New J. Phys.*, 2010, 12(9): 093035.
- [137] ONG F R, SCHÜPPERT K, JOBEZ P, et al. Probing surface charge densities on optical fibers with a trapped ion[J]. *New Journal of Physics*, 2020, 22(6): 063018.
- [138] DORET S C, AMINI J M, WRIGHT K, et al. Controlling trapping potentials and stray electric fields in a microfabricated ion trap through design and compensation[J]. *New Journal of Physics*, 2012, 14(7): 073012.
- [139] COLES J, MUNOZ J, DEYHIMI F. Surface and volume resistivity of pyrex glass used for liquid membrane ion-sensitive microelectrodes[M]//*Ion Measurements in Physiology and Medicine*. Springer, 1985: 67-73.
- [140] CHIGGIATO P. Vacuum technology for ion sources[J]. *arXiv preprint arXiv:1404.0960*, 2014.
- [141] RUSTER T, SCHMIEGELOW C T, KAUFMANN H, et al. A long-lived Zeeman trapped-ion qubit[J]. *Appl. Phys. B*, 2016, 122(10): 254.
- [142] GANDOLFI D, NIEDERMAYR M, KUMPH M, et al. Compact radio-frequency resonator for cryogenic ion traps[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2012, 83(8): 084705.
- [143] SIVERNS J D, SIMKINS L R, WEIDT S, et al. On the application of radio frequency voltages to ion traps via helical resonators[J]. *Applied Physics B*, 2012, 107(4): 921-934.
- [144] *Rf and microwave circuit design*[M].
- [145] BERKELAND D, MILLER J, BERGQUIST J, et al. Minimization of ion micromotion in a paul trap[J]. *Journal of Applied Physics*, 1998, 83(10): 5025-5033.
- [146] KRUPKA J, KAMIŃSKI P, KOZŁOWSKI R, et al. Dielectric properties of semi-insulating silicon at microwave frequencies[J]. *Applied Physics Letters*, 2015, 107(8): 082105.
- [147] YANG R Y, HUNG C Y, SU Y K, et al. Loss characteristics of silicon substrate with different resistivities[J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2006, 48(9): 1773-1776.
- [148] JOHNSON K, WONG-CAMPOS J, RESTELLI A, et al. Active stabilization of ion trap radiofrequency potentials[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2016, 87(5): 053110.
- [149] TANG C, STATZ H. Phase-locking of laser oscillators by injected signal[J]. *Journal of Applied Physics*, 1967, 38(1): 323-324.
- [150] STOVER H, STEIER W. Locking of laser oscillators by light injection[J]. *applied physics letters*, 1966, 8(4): 91-93.
- [151] DREVER R, HALL J L, KOWALSKI F, et al. Laser phase and frequency stabilization using

- an optical resonator[J]. *Applied Physics B*, 1983, 31(2): 97-105.
- [152] BLACK E D. An introduction to pound-drever-hall laser frequency stabilization[J]. *American journal of physics*, 2001, 69(1): 79-87.
- [153] ENG R, BUTLER J, LINDEN K. Tunable diode laser spectroscopy: an invited review[J]. *Optical Engineering*, 1980, 19(6): 1969-45.
- [154] 张靖, 陶桦, 卫栋, 等. Rb 原子饱和吸收稳频半导体激光器系统[D]. 2003.
- [155] SHEVY Y, DENG H. Frequency-stable and ultranarrow-linewidth semiconductor laser locked directly to an atomic-cesium transition[J]. *Optics letters*, 1998, 23(6): 472-474.
- [156] COUTURIER L, NOSSKE I, HU F, et al. Laser frequency stabilization using a commercial wavelength meter[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2018, 89(4): 043103.
- [157] ENDO M, SCHIBLI T R. Residual phase noise suppression for pound-drever-hall cavity stabilization with an electro-optic modulator[J]. *OSA Continuum*, 2018, 1(1): 116-123.
- [158] SHI X, ZHANG J, ZENG X, et al. Suppression of residual amplitude modulation effects in pound-drever-hall locking[J]. *Applied Physics B*, 2018, 124(8): 1-7.
- [159] ZHANG J, WEI D, XIE C, et al. Characteristics of absorption and dispersion for rubidium d 2 lines with the modulation transfer spectrum[J]. *Optics Express*, 2003, 11(11): 1338-1344.
- [160] ALDOUS M, WOODS J, DRAGOMIR A, et al. Carrier frequency modulation of an acousto-optic modulator for laser stabilization[J]. *Optics express*, 2017, 25(11): 12830-12838.
- [161] BARYSHEV V, DOMNIN Y, EPIKHIN V, et al. Miniature acousto-optic modulators as a new kind of phase modulators in laser spectroscopy[C]//EFTF 2008-22nd European Frequency and Time Forum. 2008.
- [162] BARYSHEV V, EPIKHIN V, SLYUSAREV S. Use of aom-rn as a phase modulator in fm sideband heterodyne technique in the atomic frequency standards[C]//2011 Joint Conference of the IEEE International Frequency Control and the European Frequency and Time Forum (FCS) Proceedings. IEEE, 2011: 1-4.
- [163] 李超, 陈华才, 林弋戈, 等. 应用于边带调制 PDH 激光稳频的信号源设计[J]. *计量学报*, 2018, 39(3): 401-404.
- [164] 范夏雷, 金尚忠, 张枢, 等. 多频率合成主动抑制激光稳频的剩余幅度调制[J]. *中国激光*, 2016, 43(4).
- [165] CHANSON M. Design of a stable aom double-pass setup for trapped-ion laser systems[J]. Semester project thesis. ETH Zürich, 2012: 74.
- [166] QIAO M, WANG Y, CAI Z, et al. Double-eit ground-state cooling of stationary two-dimensional ion lattices[J]. *arXiv preprint arXiv:2003.10276*, 2020.
- [167] SHAO H, WANG M, ZENG M, et al. Laser ablation and two-step photo-ionization for the generation of 40Ca^+ [J]. *Journal of Physics Communications*. 2018, 2(9): 095019.

- [168] VRIJSEN G, AIKYO Y, SPIVEY R F, et al. Efficient isotope-selective pulsed laser ablation loading of 174 yb^+ ions in a surface electrode trap[J]. Optics express, 2019, 27(23): 33907-33914.
- [169] BOGOMOLNY E B, KEATING J P. Random matrix theory and the riemann zeros. i. three- and four-point correlations[J]. Nonlinearity, 1995, 8(6): 1115.
- [170] BOGOMOLNY E. Riemann zeta function and quantum chaos[J]. arXiv preprint arXiv:0708.4223, 2007.
- [171] Wikipedia contributors. Prime number — Wikipedia, the free encyclopedia[Z]. 2021.
- [172] PATTERSON S J. An introduction to the theory of the riemann zeta-function: number 14 [M]. Cambridge University Press, 1995.
- [173] DITTRICH W. On riemann's paper," on the number of primes less than a given magnitude" [J]. arXiv preprint arXiv:1609.02301, 2016.
- [174] JAFFE A M. The millennium grand challenge in mathematics[J]. Notices of the AMS, 2006, 53(6): 652-660.
- [175] CONREY J B. The riemann hypothesis[J]. Notices of the AMS, 2003, 50(3): 341-353.
- [176] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, et al. Contributions to the theory of the riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes[J]. Acta Mathematica, 1916, 41: 119-196.
- [177] SIEGEL C L. Über riemanns nachlass zur analytischen zahlentheorie[J]. Quellen Stud. Geschichte der Math. Aster. Physik, Abt. B. Studien, 1932.
- [178] GOURDON X. The 1013 first zeros of the riemann zeta function, and zeros computation at very large height[J]. preprint, 2004, 24.
- [179] VAN DER POL B. An electro-mechanical investigation of the riemann zeta function in the critical strip[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1947, 53(10): 976-981.
- [180] BERRY M. Riemann zeros in radiation patterns: Ii. fourier transforms of zeta[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2015, 48(38): 385203.
- [181] BERRY M. Riemann zeros in radiation patterns[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2012, 45(30): 302001.
- [182] FEILER C, SCHLEICH W P. Entanglement and analytical continuation: an intimate relation told by the riemann zeta function[J]. New Journal of Physics, 2013, 15(6): 063009.
- [183] HOLTHAUS M. Floquet engineering with quasienergy bands of periodically driven optical lattices[J]. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 2015, 49(1): 013001.
- [184] DALECKII J L, KRE_N M G. Stability of solutions of differential equations in banach space: number 43[M]. American Mathematical Soc., 2002.

- [185] SCHMIDT H J. The floquet theory of the two-level system revisited[J]. Zeitschrift für Naturforschung A, 2018, 73(8): 705-731.
- [186] GRIFONI M, HÄNGGI P. Driven quantum tunneling[J]. Physics Reports, 1998, 304(5-6): 229-354.
- [187] ECKARDT A, HOLTHAUS M, LIGNIER H, et al. Exploring dynamic localization with a bose-einstein condensate[J]. Physical Review A, 2009, 79(1): 013611.
- [188] JOHANSSON J, NATION P, NORI F. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems[J]. Computer Physics Communications, 2012, 183(8): 1760-1772.
- [189] CREFFIELD C. Location of crossings in the floquet spectrum of a driven two-level system [J]. Physical Review B, 2003, 67(16): 165301.
- [190] ECKARDT A, WEISS C, HOLTHAUS M. Superfluid-insulator transition in a periodically driven optical lattice[J]. Physical review letters, 2005, 95(26): 260404.
- [191] SHIRLEY J H. Solution of the schrödinger equation with a hamiltonian periodic in time[J]. Physical Review, 1965, 138(4B): B979.
- [192] LIGNIER H, SIA S C, CIAMPINI D, et al. Dynamical control of matter-wave tunneling in periodic potentials[J]. Physical review letters, 2007, 99(22): 220403.
- [193] DELLA VALLE G, ORNIGOTTI M, CIANCI E, et al. Visualization of coherent destruction of tunneling in an optical double well system[J]. Physical review letters, 2007, 98(26): 263601.
- [194] KIERIG E, SCHNORRBERGER U, SCHIETINGER A, et al. Single-particle tunneling in strongly driven double-well potentials[J]. Physical review letters, 2008, 100(19): 190405.
- [195] VON NEUMANN J, WIGNER E. Über das verhalten von eigenwerten bei adiabatischen prozessen[M]//The Collected Works of Eugene Paul Wigner. Springer, 1993: 294-297.
- [196] WANG Y, UM M, ZHANG J, et al. Single-qubit quantum memory exceeding ten-minute coherence time[J]. Nature Photonics, 2017, 11(10): 646.

附录 A 修改记录

致 谢

感谢我伟大的祖国，为我们提供了安定、和谐的社会环境，让我们能够健康快乐的成长，自由地追逐梦想。感谢国家和社会对我国教育的投入、对科技事业发展的支持、对学生的悉心培养，这让我能够安心的学习和研究。感谢纳税人的无私奉献，让我们拥有世界一流的科研环境，有机会使用先进的科研工具。回馈社会，也将是我毕生的追求。

感谢“又红又专，理实交融”的科大，她为我提供如此卓越的学习环境。这里的花草树木绿水白桥让我沉静，行政管理工作人员让人亲切，科大学子聪敏纯粹让我提高自我要求，教书育人钻研攻坚的老师让我崇敬尊重，配套完整的先进科研仪器为我提供便利。六年光阴在科大没有浪费，成为我最宝贵的经历。

我想要感谢我的老师们在六年来对我的培养之恩。

感谢郭光灿院士，为国内量子信息研究工作奠定基础、开辟道路、培养人才。郭老师身上的老一辈科学家的精神始终感召着我，让我斗志昂扬。

感谢李传锋老师，为我的研究生生涯提供所有的支持。李老师为我的实验提供了充足的平台和机会。在我面临困难和抉择时，李老师总能给出高屋建瓴的建议，令人信赖和踏实。李传锋老师对于科研的追求深刻地影响了我，每次离开实验室时看到他的办公室仍然亮着灯，都令我肃然起敬。

感谢黄运锋老师，他张弛有度的管理培养出一支严谨又有活力的团队，让大家团结一致，齐心协力。在我的实验进展不顺利时，黄老师总能够对我有充足的耐心，让我沉淀。黄老师支持我出国交流一年提升自我，更让我受益匪浅。数次聆听黄老师的谆谆教诲，总能够鞭辟入里地指出我的问题，让我顿悟和成长。

感谢韩永建老师，七年前我参加科大的本科生夏令营，韩老师给了我一张来实验室的门票。当时连量子信息为何物都不知道的我被他的热情留下。韩永建老师博闻强识，学问渊博，是我走进量子信息的领路人，在理论知识和实验方案上给了我非常多的指导和帮助。每次与韩老师的交流都能令我豁然开朗。

感谢崔金明老师，在我整个研究生期间给予我的全方位的帮助和指导。崔金明老师从头培养了我的实验能力，手把手教会了我如何解决问题和避免错误。每次在我对实验一筹莫展的时候，崔金明老师总能以敏锐的物理直觉给出深刻的见解和有效的方案。和崔老师的讨论总令我开阔思路，对下一步的工作路线也更为清晰。

感谢实验室的各位老师在过去提供的帮助，感谢柳必恒老师、侯志博老师、胡小敏老师、周宗权老师提供的实验工具上的多次帮助，以及对实验的讨论和指导。感谢张超老师多年来默默耕耘的榜样力量，更感谢张超老师为我们提供财务

借款账号的支持，默默地奉献着工资。还要感谢郭国平老师、董春华老师、许金时老师、许小冶老师、唐建顺老师、陈向东老师、陈耕老师曾经提供实验设备的帮助，感谢周正威老师、张永生老师提供的帮助和指导，感谢王涛老师、段开敏老师、吴莉老师、李洪梅老师、汪玉婵老师提供的管理和财务支持。感谢博士期间的班主任银振强老师，为疫情期间的手续办理以及各种通知付出了很多时间。

感谢我的师兄师姐们在六年来给我的帮助。

感谢王健师兄一直以来的关心和帮助，感谢他如此认真负责，设身处地为我着想，给我非常多宝贵的建议。感谢周坤师兄经常与我们分享丰富的想法，还带我们玩耍。感谢王钊师兄教我 CAD 画图。感谢赵圆圆和袁媛师姐经常给我们带吃的，还带我去兰州开会。感谢吕为民师兄经常回来给我们带西瓜。感谢陈江山师兄多次有益的谈话和平时的照顾。感谢李萌师兄对实验室历史的详细介绍。还要感谢刘肖师兄、程泽迪师兄、刘翌地师兄、沈镇师兄、胡长康师兄提供的帮助。

感谢我的同学和师弟师妹们在六年来给我的相助之恩。

感谢曹洹这么多年的陪伴，熬了无数夜晚的他赤子之心依旧滚烫，他是一股清流，回来再一起吃牛牛。感谢李强的各种大力帮助，从 7 年前一起搬床铺到现在一起微纳加工，再到生活工作上对我的不吝赐教。

感谢艾铭忠在过去五年来的鼎力相助，没有艾铭忠的帮助可能我的毕业还要再等一段时间。他对人对事有独特的耐心和毅力，古道热肠忠肝义胆，令人敬佩。感谢钱忠华在生活和实验上的帮助，他对行业的发展以及各种实用技术的推荐让我收获良多。感谢郭钰师弟多年来的帮助，尤其是对于实验方案给出的有益建议。感谢高新霞师妹展现了科学与艺术的完美结合，令我们 316 办公室增添了许多光彩，感谢多次帮助我的实验。感谢郑永祥师弟在实验上广泛而又细致的帮助，很多次没有他的帮助就不能按时完成实验，在他那里总能找到需要的东西。感谢潘宇豪师弟在实验上的帮助，多次与他的讨论都让我思路清晰。感谢李睿睿师弟的搭档，我们在刀片阱的设计、加工、组装、测试上密切合作，没有他的合作，这项工作是不可能完成的。感谢鲍星宇师弟在电路和模拟上提供的帮助。感谢陈炎师弟在激光光路上的卓有成效的帮助，本工作的很多数据都有他的贡献。感谢周小龙师弟的多次帮助，他对实验有精致的要求，同时保持着艺术感令人赞赏。

感谢房鼎师弟、叶蔚然师弟、黄冬郁师弟、李黎师弟、沈泽民师弟、邢文博师弟、陈一龙师弟、张昊清同学、王志同学、李悠同学多次在实验上的协助和有益讨论。

感谢李佩耘、李宗峰、杨天书、万帅、袁龙、杨晖、俞上、张文豪、范元冠杰、王琴琴、闫飞飞等诸位仁兄在这些年给我的慷慨帮助。

I want to thank Prof. Charles Creffield and Prof. German Sierra for their great

helps in the Riemann zeros experiments. Our cooperation is very efficient and pleasing. I want to express a huge amount of gratitude to Prof. Dr. Jonathan Home at TIQI group, ETH for giving me the opportunity to learn in his outstanding group for one year. This experience is one of the best parts in my life. I want to thank all my good friends there. I would like to thank Oliver Wipfli, Simon Ragg, Zhang Chi, Chiara Decaroli, Maciej Malinowski, Mirjam Bruttin, Robin Oswald, Christa Flühmann, Christoph Fischer, Brennan MacDonald-de, Daniel Kienzler, Matthew Grau, Karan Mehta, Thomas Lutz, Roland Matt, Martin Stadler, Tanja Behrle, Francesco Lancellotti, Tobias Sägger, Thanh Long Nguyen, for all the best things we have done together and all warm supports from them. They really made me feel at home. There are so many good memories that I want to share. I hope one day we will have lunch together again.

我最想感谢的是我的家人和亲人们。

感谢我的父母亲。回首自己一路走来，总有他们无微不至的守护。他们愿倾尽所有，永远坚定不移地支持我。父母亲全力守护着我小时候的梦想，那是从村子里的黄泥土里长出来的嫩芽，终于在他们半生的辛勤劳作中成长为大树。感谢我的岳父岳母亲，在我毫无建树时仍然相信我，给我无尽的支持和力量。他们的豁达和善良，让我的内心坚定充满希望。亲爱的四位父母，在人生的得意之时，最开心的是有他们来分享喜悦；在人生的至黑之时，最心安的是有他们来温暖依靠。感谢我所有的亲人，你们让我生活在幸福的大家庭中，让我内心长怀热爱与感恩。

最后，感谢我如天使一般美丽善良的妻子王仲杰，与我携手走过最美好的青春年华。她的聪明伶俐如同麦克斯韦方程，能在纷繁的表象中明悟大道至简的本质，点亮我的光明。她的温柔浪漫如同薛定谔方程，让生活的演化轨迹有迹可循又藏有无限可能，随时让我满怀期待。她对我的影响是巨大的，她的陪伴、鼓励和鞭策是我不断前进的源动力。她是我努力的意义。

快到而立之年，希望自己未来的工作能够推动历史文明的微小进步。向前跑，带着赤子的骄傲。

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

待发表论文:

1. **Ran He**, Jin-Ming Cui, Rui-Rui Li, Zhong-Hua Qian, Yan Chen, Ming-Zhong Ai, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, "An ion trap apparatus with high optical access in multiple directions."
2. **Ran He**, Ming-Zhong Ai, Jin-Ming Cui, Yun-Feng Huang, Yong-Jian Han, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo, G. Sierra, and C. E. Creffield, "Riemann zeros from a periodically-driven trapped ion", arXiv preprint arXiv:2102.06936 (2021).

已发表论文:

1. Jin-Ming Cui, Ming-Zhong Ai, **Ran He**, Zhong-Hua Qian, Xiao-Ke Qin, Yun-Feng Huang, Zheng-Wei Zhou, Chuan-Feng Li, Tao Tu, and Guang-Can Guo, "Experimental demonstration of suppressing residual geometric dephasing", Science Bulletin 64, 23 (2019), pp. 1757--1763.
2. Ming-Zhong Ai, Sai Li, Zhibo Hou, **Ran He**, Zhong-Hua Qian, Zheng-Yuan Xue, Jin-Ming Cui, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, "Experimental realization of nonadiabatic holonomic single-qubit quantum gates with optimal control in a trapped ion", Physical Review Applied 14, 5 (2020), pp. 054062.
3. **Ran He**, Ming-Zhong Ai, Jin-Ming Cui, Yun-Feng Huang, Yong-Jian Han, Chuan-Feng Li, Tao Tu, Charles E. Creffield, G. Sierra, and Guang-Can Guo, "Identifying the Riemann zeros by periodically driving a single qubit", Physical Review A 101, 4 (2020), pp. 043402.
4. Ming-Zhong Ai, Jin-Ming Cui, **Ran He**, Zhong-Hua Qian, Xin-Xia Gao, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, "Experimental verification of anti-Kibble-Zurek behavior in a quantum system under a noisy control field", Physical Review A 103, 1 (2021), pp. 012608.
5. Zhe Chen, Jin-Ming Cui, Ming-Zhong Ai, **Ran He**, Yun-Feng Huang, Yong-Jian Han, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, "Experimentally detecting dynamical quantum phase transitions in a slowly quenched Ising-chain model", Physical Review A 102, 4 (2020), pp. 042222.

在审核发明专利:

1. 贺冉、崔金明、李睿睿、钱忠华、艾铭忠、黄运锋、李传锋。一种分段式刀片离子阱装置。申请号或专利号: 201911210425.4

2. 贺冉、崔金明、李睿睿、钱忠华、黄运锋、李传锋。一种高通光离子阱装置。申请号或专利号：201911270470.9