

中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

博士学位论文



论文题目	基于囚禁离子系统的 绝热量子调控实验研究
作者姓名	胡长康
学科专业	物理学
导师姓名	黄运锋 研究员
完成时间	二〇一九年五月

中国科学技术大学

博士学位论文



基于囚禁离子系统的绝热 量子调控实验研究

作者姓名: 胡长康

学科专业: 物理学

导师姓名: 黄运锋 研究员

完成时间: 二〇一九年五月

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor degree



Experimental research on adiabatic quantum control based on trapped ion

Author :	<u>Chang-Kang Hu</u>
Speciality :	<u>Physics</u>
Supervisor :	<u>Prof. Yun-Feng Huang</u>
Finished Time :	<u>May, 2019</u>

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名: 胡长康

签字日期: 2019.06.01

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☐ 公开 ☐ 保密 _____ 年

作者签名: 胡长康

导师签名: 吴运辉

签字日期: 2019.06.01

签字日期: 2019.6.02

摘要

囚禁离子由于具有囚禁时间长、相干时间长、不需要极端的冷却条件可在室温环境下工作、拥有内部电子自旋以及外部运动等多个自由度且易于操控，长期以来深受人们喜爱，是用于研究量子光学、量子电动力学、进行精密测量、量子模拟或者是量子信息处理的理想系统。

我们搭建了利用射频场囚禁 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的实验系统，利用激光实现了对该离子的多普勒冷却、光泵浦量子态初始化以及量子态荧光探测等。同时，我们利用微波完成了单比特量子态调控以及量子态层析等，利用受激拉曼跃迁耦合自旋态和运动态，成功将离子冷却到运动基态，并且测量了加热速率，演示了将运动态制备为相干态等。

绝热演化是量子力学中非常常见同时也是非常重要的一种演化过程，而绝热定理是绝热演化的充要条件，在物理学的发展过程中具有极其重要的意义。然而，近年来发现的震荡哈密顿量，由于能级之间的共振跃迁，导致了绝热条件与绝热定理不一致。同时，绝热定理仅适用于闭合系统，那么在开放系统中该如何定义。基于我们搭建的囚禁离子系统，围绕上述所述的问题，我们展开了一系列的实验和理论研究：

1. 利用囚禁离子比特，我们设计了一个震荡的哈密顿量，检验了几个相关的绝热条件，证实这几个绝热条件都不再适用。然后，引入旋转的非惯性坐标系，再次检验上述相关绝热条件，无论是在谐振点还是远离谐振点，这些绝热条件都能够很好的预测绝热行为。最后，我们还给出了该验证机制在惯性与非惯性坐标系中描述绝热行为的等价条件。
2. 在开放量子系统中，由超算符决定的主方程控制下的非么正演化可以直接推广绝热定理。为了实现目标主方程，我们引入了高斯噪声来对驱动比特的微波做频率调制，实现了高度可控的高品质的退相干信道。与闭合系统中的情况不同，随着演化时间的增加，绝热条件与绝热定理趋向一致，绝热有效性条件对共振现象具有鲁棒性。并且，我们还证明了开放系统中的 Deutsch 算法有一个最优的时间窗口。
3. 在实验上首次验证了惯性定理和执行该定理的协议的能力，证实惯性解的鲁棒性。对于偏离惯性定理较小的情况下，理论仿真能很好的支持上述结

论。而对于偏离惯性定理较大的情况，惯性解的振幅首先出现误差，但是相位仍然是精确的。通过加入振幅校正，我们很好的解决了这个问题，而相位信息也可以用于惯性极限之外的参数估计。惯性解的实验验证为快速高精度的量子控制奠定了基础。

关键词：囚禁离子，基态冷却，绝热定理，开放系统，惯性定理

ABSTRACT

The trapped ion system has the long coherence time with no need of the extreme cooling conditions, i.e. it can work in room temperature environment, and it has internal electron spin and external motion degrees of freedom which is easy to control, so it is an ideal system for studying the quantum optics, quantum electrodynamics, and performing the precision measurements, quantum simulation and quantum information processing.

We built an experimental system that uses the RF field to trap $^{171}\text{Yb}^+$ ions, and use the laser to achieve the Doppler cooling, optical pumping quantum state initialization, and quantum fluorescence detection of the ions. We use microwave to implement the single qubit quantum state control and quantum state tomography, and use the stimulated Raman transition to couple the spin state and the motion state, successfully cool the ions to the motion ground state, measured the heating rate, and demonstrated that we can prepare the motion state as a coherent state.

Adiabatic evolution is a very common and important evolutionary process in quantum mechanics, and the adiabatic theorem is a necessary and sufficient condition for adiabatic evolution, which has significant influence in the development of physics. However, the oscillating Hamiltonian found in recent years, due to the resonance transition between the energy levels, causes the adiabatic conditions to be inconsistent with the adiabatic theorem. At the same time, the adiabatic theorem applies only to closed systems, so how to define it in an open system. Based on the trapped ion system we built, we have carried out a series of experimental and theoretical studies around the above-mentioned problems:

1. Using the trapped ion qubit, we designed an oscillating Hamiltonian and examined several related adiabatic conditions, confirming that these adiabatic conditions are no longer applicable. Then, by introducing a non-inertial rotation frame, the above-mentioned relevant adiabatic conditions are tested again. These adiabatic conditions are good predictive of adiabatic behavior, both at the resonance point and away from the resonance point. Finally, we also give the equivalent

conditions for the verification mechanism to describe the adiabatic behavior in inertial and non-inertial frame.

2. In the open quantum system, the non-unitary evolution under the control of the master equation determined by the super-operator can directly generalize the adiabatic theorem. In order to achieve the target master equation, we introduce a Gaussian noise to frequency-modulate the microwaves that drive the qubit, and achieve a highly controllable high-quality decoherence channel. Different from the situation in the closed system, the adiabatic condition is consistent with the adiabatic theorem as the evolution time increases, and the adiabatic validity condition is robust to the resonance phenomenon. Moreover, we have also proved that the Deutsch algorithm in open systems has a optimal time windows.
3. We experimentally verified the ability of the inertia theorem and the protocol to implement the theorem, confirming the robustness of the inertial solution. For the case where the deviation inertia theorem is small, theoretical simulation can well support the above conclusions. For the case where the deviation inertia theorem is large, the amplitude of the inertial solution first appears to be an error, but the phase is still accurate. By adding amplitude correction, we have solved this problem very well, and the phase information can also be used for parameter estimation of inertia limit accidents. The experimental verification of the inertial solution lays the foundation for fast and high precision quantum control.

Keywords: trapped ion, ground state cooling, adiabatic theorem, open quantum system, inertial theorem

目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT	III
目 录	V
第一章 绪论	1
参考文献.....	3
第二章 离子阱和离子量子比特	7
2.1 离子阱原理	8
2.2 离子化	11
2.3 量子态初始化和探测	12
2.3.1 多普勒冷却	12
2.3.2 初始化	14
2.3.3 态探测	15
2.4 量子态微波调控	17
2.4.1 磁偶极相互作用	17
2.4.2 塞曼能级的调试	20
2.5 小结	24
参考文献.....	25
第三章 运动态操作	27
3.1 自旋与运动耦合	27
3.2 受激拉曼跃迁	29
3.3 脉冲激光控制	32
3.4 可分辨边带冷却	36
3.5 运动态分布分析	38
3.6 离子加热速率的测量	39
3.7 运动态的相干态制备	41
3.8 小结	43

参考文献	44
第四章 量子绝热性的实验验证	49
4.1 绝热定理简介	49
4.2 非惯性参考系中的绝热条件	50
4.3 绝热条件的验证机制	53
4.4 验证机制的实验检验	56
4.5 小结	57
参考文献	58
第五章 退相干下的绝热量子动力学	61
5.1 开放系统绝热定理	61
5.2 开放量子系统的绝热近似	62
5.3 共振情况下的绝热量子条件	63
5.3.1 退相干情况下的 Landau-Zener 模型	63
5.3.2 Landau-Zener 模型的实验实现	64
5.4 绝热 Deutsch 算法	67
5.4.1 退相干情况下的 Deutsch 算法	67
5.4.2 最佳绝热时间窗的实验研究	68
5.5 小结	70
参考文献	71
第六章 惯性定理控制协议的实验验证	75
6.1 惯性定理	75
6.1.1 惯性定理协议	75
6.2 惯性定理的实验验证	78
6.2.1 实验结果及分析	79
6.2.2 惯性解的修正	80
6.3 小结	83
参考文献	85
第七章 总结与展望	89
致 谢	91
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	93

第一章 绪论

囚禁离子是与环境完全隔离的绝佳量子系统。其内部电子状态和外部运动都可以通过微波或光场进行耦合和操纵，这使之非常适合在控制良好的条件下进行量子光学和量子动力学研究。

从 1973 年 Wineland 等人首次囚禁住单个电子 [1]，到 1978 年完成对 Mg^+ 离子的多普勒激光冷却 [2]，再到 1989 年 NIST 团队的 Diedrich 等人首次在单个 Hg^+ 离子上实现了对囚禁势基态的激光冷却 [3]，离子阱有了长足的发展。这个阶段，许多单离子实验，都是希望利用离子长相干时间的特点，将囚禁离子应用于频率标准。同时，也有不少的研究小组研究囚禁离子辐射光子，或者是研究囚禁离子在势阱中的运动。囚禁离子运动态的动力学由于与 Jaynes-Cummings 模型非常相似而引起人们极大的兴趣。

直到 1995 年 Cirac 和 Zoller 首次提出了利用处于运动基态的囚禁离子实现受控非量子逻辑门 [4]，并于同年被实验实现 [5]。利用囚禁离子系统来进行量子信息处理受到广大研究组的关注。随后，离子光子纠缠 [6, 7]、多离子远距离纠缠 [7–12]、Mølmer-Sørensen 门 [13–17]、几何相位门 [18–21] 等在实验上实现。2016 年，NIST 的 Wineland 研究组和牛津大学 Lucas 研究组同时报道了，单比特量子逻辑门操作保真度优于 99.99% 两比特操作保真度高于 99.9% [22, 23]，超过容错量子计算要求的阈值。同年，马里兰大学 Monroe 研究组 Debnath 等人首次演示了一台基于离子阱的 5 比特的小型可编程量子计算机 [24]。而后，我们可以看到还有很多进一步的报道 [25–27]。囚禁离子系统在众多量子系统中脱颖而出，被誉为最有可能实现量子计算的系统之一。

而较为经典的量子计算模型则有量子门电路模型 [28–32]、绝热量子计算模型 [33, 34] 以及拓扑量子计算模型 [35] 等，这些模型的计算能力都是多项式等价的。值得注意的是，绝热量子计算基于一个与量子门电路模型截然不同的思想。量子门电路模型原则上需要在整个希尔伯特空间编码成一系列统一的量子逻辑门，而绝热量子计算模型则要求初始哈密顿量的基态容易制备，最后的哈密顿量的基态则编码着待求解问题的解。不仅如此，绝热量子计算模型在抵抗系统噪声方面也有比较强的鲁棒性。

要想研究绝热量子计算，讨论量子绝热演化就不可避免了。1928 年 Born 和 Fock 首次提出了量子绝热演化的概念，并指出量子绝热定理就是量子绝热演化所需要满足的条件 [36]。此后，量子绝热演化以及量子绝热定理等被广泛的应用

到了量子场论 [37]、几何相位 [38, 39]、量子计算 [33, 34]、量子热力学 [40, 41] 等领域。特别是 1984 年 Berry 几何相位的发现 [38]，赋予了量子绝热定理新的意义，引起了人们极大的兴趣，其基本观念也渗透到了物理学的各个领域；2000 年 Farhi 提出的绝热量子计算的思想 [33]，则再次展示了量子绝热定理的重要性。以量子绝热定理为基础的绝热量子调控将会继往开来，在量子物理中书写更辉煌的篇章。从第二章开始具体内容如下：

第二章 本章系统的介绍了， $^{171}\text{Yb}^+$ 离子基本的操作，包括离子化过程、多普勒冷却、量子态初始化、量子态探测，以及基本的基于微波的离子内部电子态的单比特调控。

第三章 在上一章的基础上，我们利用基于 355nm 的皮秒脉冲的受激拉曼跃迁耦合离子的外部运动态，成功将离子冷却到运动态的基态，介绍了利用蓝边带震荡的方法来测量 Fock 态分布，测量了我们系统的加热速率，最后演示了制备相干态。

第四章 在本章中，在实验和理论上检验了绝热近似的有效性条件，通过改变参考系的方法，我们成功的解决了绝热近似条件在共振情况下遇到的困难，并给出了不同参考系中的一般的等价条件。

第五章 在本章中，提出了一种基于高斯噪声的完全可控的退相干信道，并基于此在实验上检验了量子绝热近似在开放系统中的推广，检验了绝热有效性条件的共振灵敏度和 Deutsch 算法最优时间窗口等。

第六章 在本章中，演示了惯性定理的有效性和无效性条件，在实验上验证了该定理和执行惯性协议的能力，并在理论上证明了惯性解具有较好的鲁棒性，同时证明通过振幅矫正可以获得更高的精度。

第七章 本章总结了本人五年内完成的工作，对未来囚禁离子系统的发展以及对基于囚禁离子系统的量子信息研究进行展望。

参考文献

- [1] Dehmelt H, Ekstrom P. PROPOSED G-2DELTA-OMEGAZ EXPERIMENT ON SINGLE STORED ELECTRON OR POSITRON. 1973, 18(4):727–728.
- [2] Wineland D J, Drullinger R E, Walls F L. Radiation-pressure cooling of bound resonant absorbers. *Physical Review Letters*, 1978, 40(25):1639.
- [3] Diedrich F, Bergquist J, Itano W M, et al. Laser cooling to the zero-point energy of motion. *Physical Review Letters*, 1989, 62(4):403.
- [4] Cirac J I, Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions. *Physical review letters*, 1995, 74(20):4091.
- [5] Monroe C, Meekhof D, King B, et al. Demonstration of a fundamental quantum logic gate. *Physical review letters*, 1995, 75(25):4714.
- [6] Moehring D L, Madsen M J, Blinov B B, et al. Experimental Bell inequality violation with an atom and a photon. *Physical review letters*, 2004, 93(9):090410.
- [7] Blinov B, Moehring D, Duan L M, et al. Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon. *Nature*, 2004, 428(6979):153.
- [8] Häffner H, Hänsel W, Roos C, et al. Scalable multiparticle entanglement of trapped ions. *Nature*, 2005, 438(7068):643.
- [9] Maunz P, Moehring D, Olmschenk S, et al. Quantum interference of photon pairs from two remote trapped atomic ions. *Nature Physics*, 2007, 3(8):538.
- [10] Choi T, Debnath S, Manning T, et al. Optimal quantum control of multimode couplings between trapped ion qubits for scalable entanglement. *Physical review letters*, 2014, 112(19):190502.
- [11] Mizrahi J, Senko C, Neyenhuis B, et al. Ultrafast spin-motion entanglement and interferometry with a single atom. *Physical review letters*, 2013, 110(20):203001.
- [12] Hucul D, Inlek I V, Vittorini G, et al. Modular entanglement of atomic qubits using photons and phonons. *Nature Physics*, 2015, 11(1):37.
- [13] Turchette Q, Wood C, King B, et al. Deterministic entanglement of two trapped ions. *Physical Review Letters*, 1998, 81(17):3631.
- [14] Mølmer K, Sørensen A. Multiparticle entanglement of hot trapped ions. *Physical Review Letters*, 1999, 82(9):1835.
- [15] Sackett C A, Kielpinski D, King B E, et al. Experimental entanglement of four particles. *Nature*, 2000, 404(6775):256.
- [16] Benhelm J, Kirchmair G, Roos C F, et al. Towards fault-tolerant quantum computing with trapped ions. *Nature Physics*, 2008, 4(6):463.

- [17] Schindler P, Barreiro J T, Monz T, et al. Experimental repetitive quantum error correction. *Science*, 2011, 332(6033):1059–1061.
- [18] Duan L M, Cirac J I, Zoller P. Geometric manipulation of trapped ions for quantum computation. *Science*, 2001, 292(5522):1695–1697.
- [19] Leibfried D, DeMarco B, Meyer V, et al. Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate. *Nature*, 2003, 422(6930):412.
- [20] Tan T R, Gaebler J P, Bowler R, et al. Demonstration of a dressed-state phase gate for trapped ions. *Physical review letters*, 2013, 110(26):263002.
- [21] Tan T R, Gaebler J P, Lin Y, et al. Multi-element logic gates for trapped-ion qubits. *Nature*, 2015, 528(7582):380.
- [22] Gaebler J P, Tan T R, Lin Y, et al. High-fidelity universal gate set for $be\ 9+$ ion qubits. *Physical review letters*, 2016, 117(6):060505.
- [23] Ballance C, Harty T, Linke N, et al. High-fidelity quantum logic gates using trapped-ion hyperfine qubits. *Physical review letters*, 2016, 117(6):060504.
- [24] Debnath S, Linke N M, Figgatt C, et al. Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits. *Nature*, 2016, 536(7614):63.
- [25] Zhang J, Pagano G, Hess P W, et al. Observation of a many-body dynamical phase transition with a 53-qubit quantum simulator. *Nature*, 2017, 551(7682):601.
- [26] Friis N, Marty O, Maier C, et al. Observation of entangled states of a fully controlled 20-qubit system. *Physical Review X*, 2018, 8(2):021012.
- [27] Wright K, Beck K, Debnath S, et al. Benchmarking an 11-qubit quantum computer. *arXiv preprint arXiv:1903.08181*, 2019..
- [28] Feynman R P. Quantum mechanical computers. *Optics news*, 1985, 11(2):11–20.
- [29] Deutsch D. Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1985, 400(1818):97–117.
- [30] Deutsch D E. Quantum computational networks. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1989, 425(1868):73–90.
- [31] Deutsch D, Jozsa R. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1992, 439(1907):553–558.
- [32] Shor P W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. *Proceedings of Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science. Ieee*, 1994. 124–134.
- [33] Farhi E, Goldstone J, Gutmann S, et al. A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of an NP-complete problem. *Science*, 2001, 292(5516):472–475.
- [34] Albash T, Lidar D A. Adiabatic quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, 2018, 90(1):015002.

- [35] Freedman M, Kitaev A, Larsen M, et al. Topological quantum computation. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2003, 40(1):31–38.
- [36] Born M, Fock V. Beweis des adiabatensatzes. *Zeitschrift für Physik*, 1928, 51(3-4):165–180.
- [37] Gell-Mann M, Low F. Bound states in quantum field theory. *Physical Review*, 1951, 84(2):350.
- [38] Berry M V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1984, 392(1802):45–57.
- [39] Wilczek F, Zee A. Appearance of gauge structure in simple dynamical systems. *Physical Review Letters*, 1984, 52(24):2111.
- [40] Partovi M H. Quantum thermodynamics. *Physics Letters A*, 1989, 137(9):440–444.
- [41] Geva E, Kosloff R. On the classical limit of quantum thermodynamics in finite time. *The Journal of chemical physics*, 1992, 97(6):4398–4412.

第二章 离子阱和镱离子量子比特

囚禁原子离子由于囚禁时间长、相干时间长以及同时还可以操控电子能级和运动能级等多个自由度等，而被认为是最佳的量子信息处理体系之一。而镱离子 $^{171}\text{Yb}^+$ 由于具有能级结构简单、容易实现量子态初始化、量子态探测以及有一对超长寿命的超精细能级等优点 [1]，近年来已经受到很多研究组青睐 [1-5]。 $^{171}\text{Yb}^+$ 的电子能级，如图2.1所示。我们通常把量子比特编码到离子的超精细能级上，即 $|0\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ 以及 $|1\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ 。该量子比特的跃迁频率为 $\omega_{hf} = 12.642\ 812\ 184\ 66 + \delta_{2z}\text{GHz}$ ，其中 $\delta_{2z} = (310.8)B^2\text{Hz}$ (B 是磁场强度，单位：高斯)。该跃迁对磁场不敏感，可以长时间保持相干性。 $^{171}\text{Yb}^+$ 有非常强的 ${}^2S_{1/2} \leftrightarrow {}^2P_{1/2}$ 的电偶极跃迁，波长约是 369.526 nm ，这个波长的光可以在光纤中传输，这就极大的简化了实验的光路，也便于耦合离子的超精细能级量子比特和光量子比特，使得系统可扩展。而 ${}^2P_{1/2}$ 和 ${}^2P_{3/2}$ 之间的精细结构分裂大概是 100 THz ，使用宽带的皮秒脉冲激光来操纵量子比特 [6]，也不会引起受激辐射或者是比特能级的光位移。

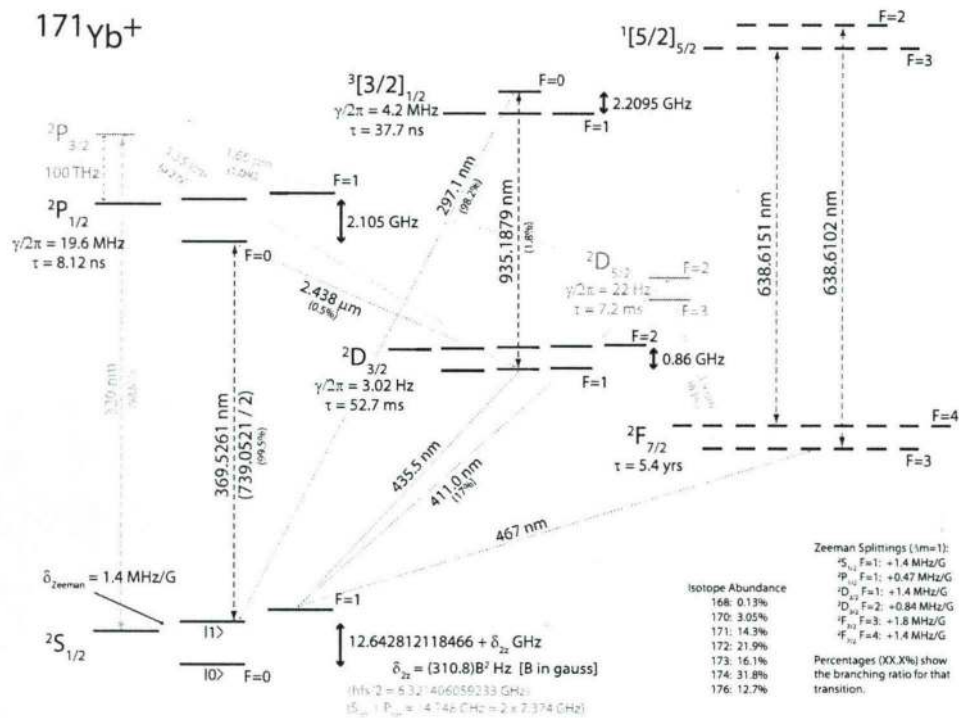


图 2.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 电子能级示意图

2.1 离子阱原理

Earnshaw 定理告诉人们, 仅有静电场不可能把一个带电粒子囚禁在三维的自由空间中 [7]。而这个用高斯定理可以很好地理解, 由于没有电荷的自由空间中电场满足 $\nabla \cdot E = 0$, 所以进入这个空间的电场线都必须离开, 自然没有办法囚禁带电粒子。

所以, 要想囚禁带电粒子, 必须要有其他的场辅助。在上世纪 50 年代, Paul 给出了利用射频场囚禁带电粒子的方案 [8], Paul 本人也因此于 1989 年获得诺贝尔物理学奖。这里给出最简单的电势

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z, t) = & U_0 \frac{1}{d_0^2} (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) \\ & + V_0 \cos(\Omega_{rf} t) \frac{1}{d_0^2} (\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2),\end{aligned}\quad (2.1)$$

这里, 如图 2.2 所示, U_0 和 $V_0 \cos(\Omega_{rf} t)$ 分别表示加在囚禁电极上的静电压和含时电压, Ω_{rf} 是含时电压的角频率, α 、 β 、 γ 以及 α' 、 β' 、 γ' 是和电极几何形状以及结构有关的系数, $d_0^2 = r_0^2 + 2z_0^2$ 。由于电势服从拉普拉斯方程, 即 $\nabla^2 \phi = 0$, 所以在任意时刻几何结构系数都应该满足

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= 0,\end{aligned}\quad (2.2)$$

为了方便讨论, 我们取

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha' = 1, \\ \beta &= \beta' = 1, \\ \gamma &= \gamma' = -2,\end{aligned}\quad (2.3)$$

电势可以写成如下形式

$$\phi = (U_0 + V_0 \cos(\Omega_{rf} t)) \left(\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{d_0^2} \right), \quad (2.4)$$

可以得到射频阱中经典运动微分方程如下

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{2e\alpha}{md_0^2} (U_0 + V_0 \cos(\Omega_{rf} t)) x &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{2e(2-\alpha)}{md_0^2} (U_0 + V_0 \cos(\Omega_{rf} t)) y &= 0, \\ \ddot{z} - \frac{4e}{md_0^2} (U_0 + V_0 \cos(\Omega_{rf} t)) z &= 0,\end{aligned}\quad (2.5)$$

其中, m 是离子的质量, e 是元电荷。现在我们以 x 方向的运动为代表进行讨论。

运动方程可以写成标准的 Mathieu 方程形式

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (a + 2q\cos(2\tau))x = 0, \quad (2.6)$$

其中,

$$\begin{aligned} a &= \frac{8eU_0\alpha}{md_0^2\Omega_{rf}^2}, \\ q &= \frac{4eV_0\alpha}{md_0^2\Omega_{rf}^2}, \\ \tau &= \frac{\Omega_D t}{2}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

在低阶近似下得到离子运动方程为 [9]

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_x t) \left[1 - \frac{q}{2} \cos(\Omega_{rf} t) \right], \quad (2.8)$$

其中, $\beta = \sqrt{a + q^2/2}$, 慢变项的频率为 $\omega_x = \beta\omega_{rf}/2$ 被称之为“久期运动”, 而快变化项 $\cos(\Omega_{rf} t)$ 则被称之为“微运动”, 因为其振幅受到 $q/2$ 的限制。

考虑背景残余静电场的影响, 假设有一个沿着 x 方向强度为 E_0 的电场, 则 Mathieu 方程变为

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (a + 2q\cos(2\tau))x = \frac{eE_0}{m}, \quad (2.9)$$

对应的离子运动方程为

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega_x t) \left[1 - \frac{q}{2} \cos(\Omega_{rf} t) \right] \\ &+ \frac{eE_0}{m\omega_x^2} + \frac{\sqrt{2}eE_0}{m\omega_x\Omega_{rf}} \cos(\Omega_{rf} t), \end{aligned} \quad (2.10)$$

在背景残余静电场的作用下, 离子的位置偏离囚禁势阱中心, 位移量为 $\frac{eE_0}{m\omega_x^2}$, 并且因此引入了额外的微运动 $\frac{\sqrt{2}eE_0}{m\omega_x\Omega_{rf}} \cos(\Omega_{rf} t)$ 。在实验中, 我们可以通过调节电极的偏置电压, 把微运动调整到尽可能小, 但不可消除。

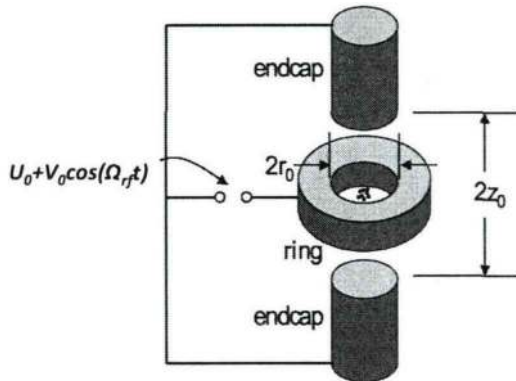


图 2.2 圆柱对称三维射频阱示意图 [10]

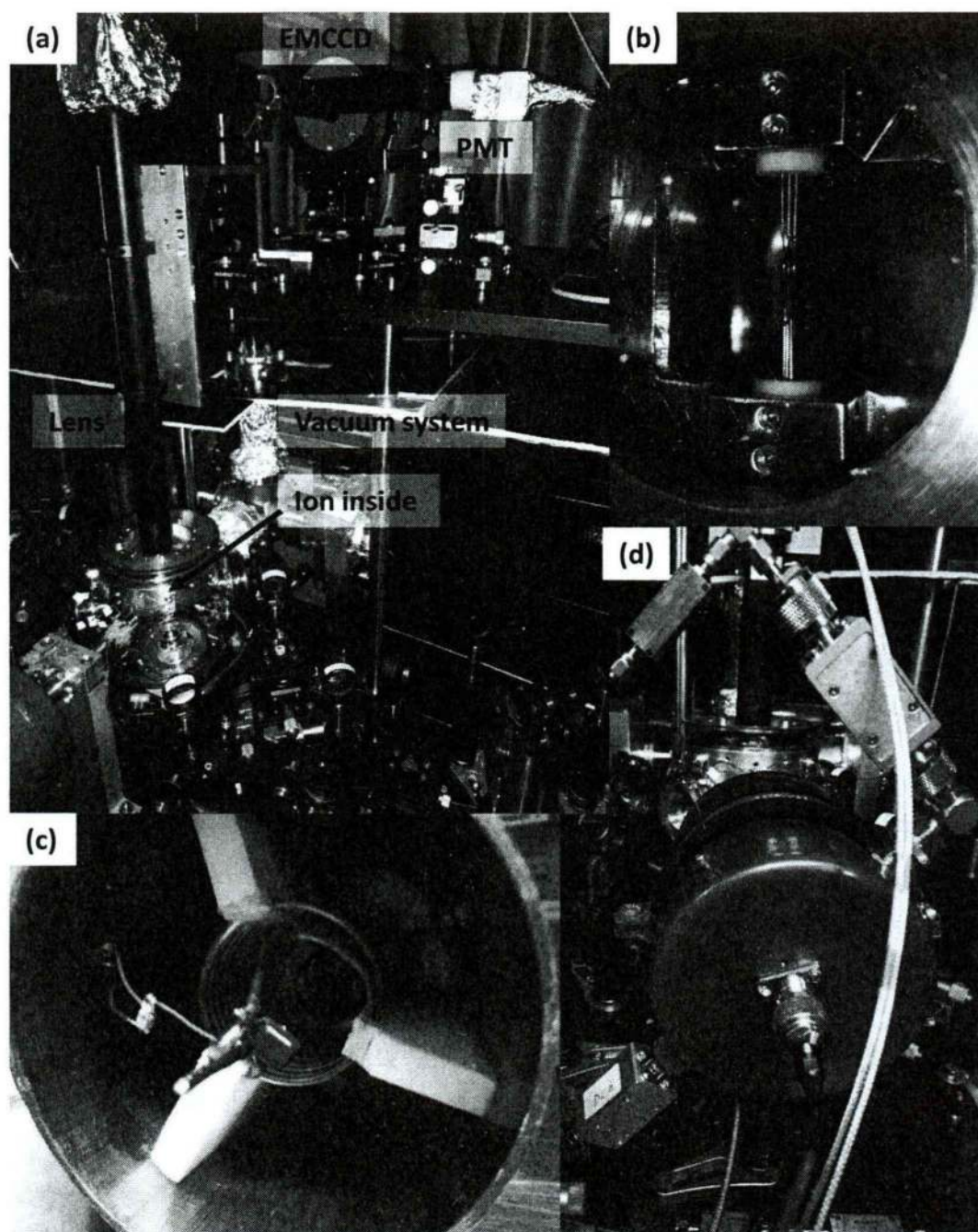


图 2.3 囚禁离子实验系统

如图2.3所示，是囚禁离子的实验装置。在 (a) 中可以看到，离子被囚禁在真空中，而操纵离子的激光例如 355nm、369.5nm 等可以透过窗口处打到离子上，而离子散射的荧光则被一个数值孔径约为 $NA=0.4$ 的物镜收集。离子荧光可以成像到 EMCCD 中，也可以打到 PMT 上计算光子数用于态探测等。图 (b) 是我们的针尖电极阱的实物图，离子就囚禁在几何中心处，而上方两侧的管子用于产生原子蒸汽。图 (c) 和 (d) 是螺旋谐振腔，用于放大射频率电场的幅度 [11, 12]。

2.2 离子化

镱离子 $^{171}\text{Yb}^+$ 是通过双光子光致电离镱原子得到的 [13], 如图2.4所示。在我们的实验中, 我们有两个镱原子源 (atomic source oven)。其中一支填充的是自然丰度的镱金属, 另外一支则填充经过同位素提纯的镱金属, 提纯后的 171 同位素丰度为 95%。由于我们使用的 oven 是细长的不锈钢毛细管, 所以当镱金属被电流加热变成原子蒸汽喷出来的时候, 具有非常好的方向性, 并且按照我们预先设定的, 让原子蒸汽喷射到射频囚禁势阱的中心附近。

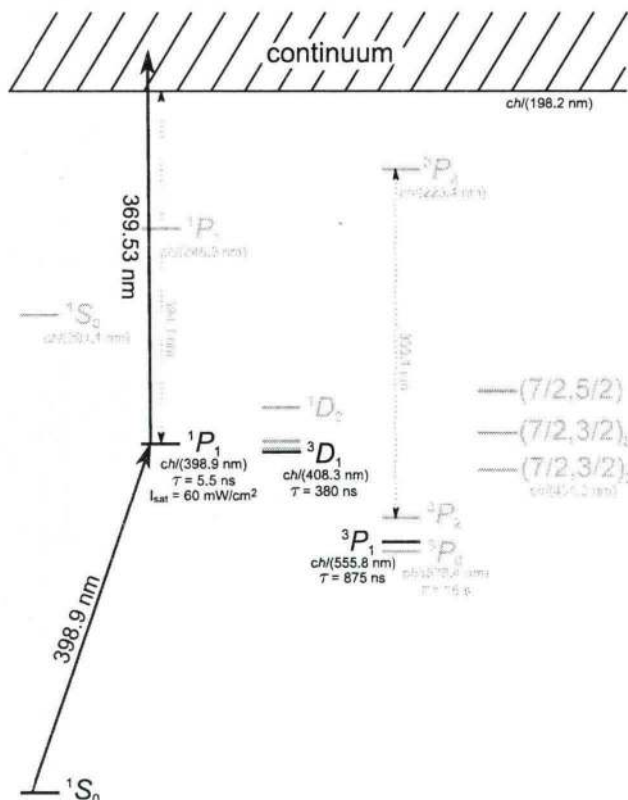


图 2.4 Yb 原子电子能级示意图

为了剥离镱原子最外层的一个电子, 我们需要有两台连续半导体激光器, 并且这两束激光都需要聚焦在射频囚禁势阱的中心附近。第一台激光器提供束腰约 $100\mu\text{m}$ 的大约 2 mW 的 398.9nm 的激光*, 将电子从基态 $1S_0$ 激发到激发态 $1P_1$ 态。值得注意的是, oven 不锈钢毛细管的指向最好是与 398.9 nm 激光的传播方向垂直, 以减少多普勒频移带来的影响。另外一台激光器波长只需要小于 394.1 nm 即可将电子从 $1P_1$ 激发到自由电子。一旦原子在势阱中心位置被电离成为离子, 就很容易被势阱束缚住。在这里, 我们选择了使用 369.5 nm 的激光†,

*Toptica Photonics DL 100 pro 399nm

†Toptica Photonics TA-SHG pro 369.5nm

束腰约 $90\mu\text{m}$ 的大约 2 mW 。 369.5 nm 的激光由一个连续的 739.05 nm 激光经过腔内倍频产生，离子的多普勒冷却、量子态初始化以及量子态探测，也都是通过控制这个激光来实现。

无论是自然丰度的镱金属还是经过同位素提纯的镱金属，都含有除 ^{171}Yb 以外的其他的同位素。而不同的同位素 $^1S_0$ 到 $^1P_1$ 的跃迁频率略有不同，我们通过使用波长计*测得， ^{171}Yb 同位素对应的激光波长是 398.91096 nm ， ^{174}Yb 同位素对应的激光波长是 398.91165 nm ，这使得通过不同的激光波长来筛选同位素成为了可能。

2.3 量子态初始化和探测

多普勒冷却、量子态初始化以及量子态探测是我们实验中必不可少的三个操作，我们经常需要快速的切换这几个操作，以满足我们对实验的要求。如图2.5所示，我们把 369.5 nm 的激光分成了三束，分别对应上面提到的三个操作。其中电光调制器（EOM）主要是用来产生多普勒冷却以及量子态初始化所需要的边带。而声光调制器（AOM）†则是起到一个光开关的作用，其上升/下降时间小于 15 ns ，单次通过通断比超过 $10\,000:1$ 。

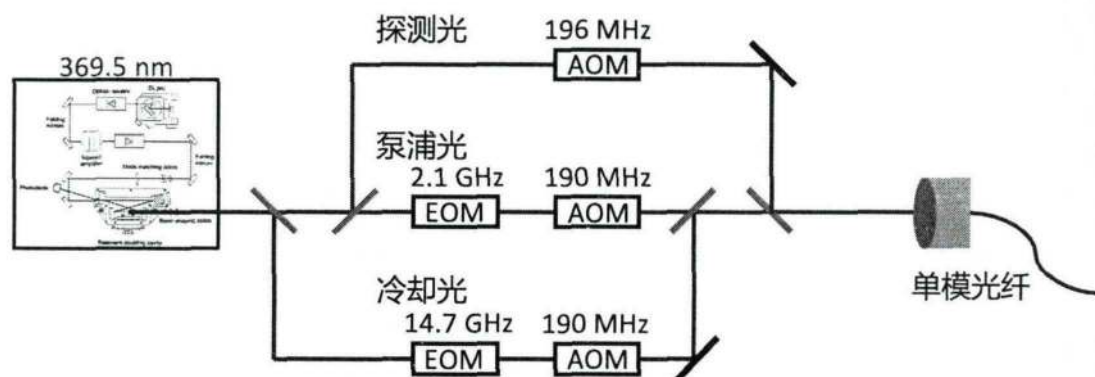


图 2.5 369.5 nm 激光分光图

2.3.1 多普勒冷却

多普勒冷却是最常用的冷却方法 [13–16]。镱离子 $^{171}\text{Yb}^+$ 的多普勒冷却主要是通过 $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$ 跃迁循环实现的。在这个过程中，我们把激光频率设置成红失谐。当离子运动方向与激光传播相反的时候，由于多普勒效应，在离子坐标

*HighFinesse WSU-10

†Brimrose TEM-200-50-369

看到的激光频率发生蓝移，蓝移后的激光频率会更加接近 $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$ 的共振跃迁频率失谐变小，这样离子就会吸收更多的光子，而当离子朝其他方向运动时失谐较大，则吸收比较少的光子。离子每吸收一个光子，就会获得一份动量，这份动量的方向与离子运动的动量方向相反，使得离子的运动变慢，而相应的离子自发辐射的光子的传播方向则是随机的，所以自发辐射的光子的平均动量为零，离子获得的反冲动量也为零。总的来看，在朝着激光的方向动量慢慢变小，离子被冷却下来。特别地，由于离子是被电场囚禁住，所以只要一个方向能够冷下来，则其他方向也能够同时冷却，只要激光的方向不与囚禁势阱的三个轴向相垂直。

由于受到方向随机的单光子反冲的影响，离子在相空间中随机运动，虽然平均动量 $\langle p \rangle = 0$ ，但是 $\langle p^2 \rangle \neq 0$ ，这就导致了多普勒冷却存在极限。当激光的失谐量为 $\Delta_l = -\Gamma/2$ 时，冷却效果最好，温度为 $k_B T = \hbar \Gamma/2$ ，其中 $\hbar$ 是普朗克常数， k_B 是玻尔兹曼常数。对 $^{171}\text{Yb}^+$ 来说， $\Gamma = 2\pi \times 19.6 \text{ MHz}$ ，对应的极限温度是 $468.5 \mu\text{K}$ 。

在多普勒冷却的过程中，主要是 $^2S_{1/2} |F=1\rangle \leftrightarrow ^2P_{1/2} |F=0\rangle$ 之间的循环。根据选择定则， $^2P_{1/2} |F=0\rangle \rightarrow ^2S_{1/2} |F=0\rangle$ 是禁戒跃迁。但是，在我们用激光激发时 $^2S_{1/2} |F=1\rangle \rightarrow ^2P_{1/2} |F=0\rangle$ ，也有一定的概率通过非共振跃迁到 $^2P_{1/2} |F=1\rangle$ ，然后自发辐射掉到 $^2S_{1/2} |F=0\rangle$ 上面，这个时候冷却激光由于大失谐，冷却停止。为了同时激发 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ ，我们需要用到一个 14.7 GHz 的 EOM*。这个 EOM 可以产生的一阶边带，其强度大约是载波的 5%，用来耦合 $|0\rangle \equiv ^2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ 和 $^2P_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ 。这个冷却光大约是 $5 \mu\text{W}$ ，聚焦到阱中心，束腰大小大约为 $50 \mu\text{m}$ 。

同时需要指出，如图2.1所示， $^2P_{1/2} |F=0\rangle$ 有 0.5% 的概率自发辐射掉到 $^2D_{3/2}$ 。 $^2D_{3/2}$ 能级的寿命大概是 52.7 ms ，这将会很大的影响冷却的进行。所以，我们需要用一个 935 nm 的激光†，来泵浦 $^2D_{3/2}$ 到 $^3[3/2]_{1/2}$ ，然后通过自发辐射回到 $^2S_{1/2} |F=1\rangle$ 。和冷却光一样，为了同时能够激发超精细能级，我们还需要用一个 3.1 GHz 的光纤 EOM‡。到这里，基本上就构成了一个完整的冷却循环。但是，在受到背景气体的非弹性碰撞等因素的影响下，电子会落到 $^2F_{7/2}$ ，这个能级的寿命大约是 5.4 年。如果没有回泵光的帮助，离子就相当于丢失了。所以我们需要一个 638 nm 的回泵光§，将电子激发到 $^1[5/2]_{5/2}$ ，然后自发辐射回到 $^2S_{1/2}$ 。在真空度优于 10^{-11} torr 的情况下，离子和背景气体碰撞少于一次每小时，相应的电子落到 $^2F_{7/2}$ 的概率也就很低了，所以我们只需要在两个超精细能级之

*Qubig EO-WG14.7M2-VIS

†Toptica Photonics DL 100 pro 935nm

‡EOSPACE PM-0K5-10-PFA-PFA-935

§Toptica Photonics DL 100 pro 638nm

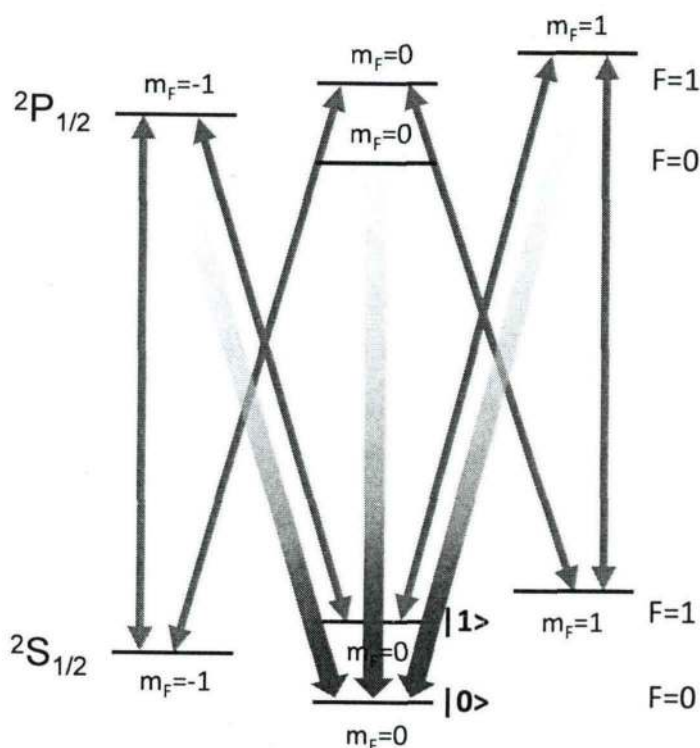


图 2.6 态初始化相关的光跃迁

间慢慢的往复扫描即可，没必要用 EOM 产生边带。

2.3.2 初始化

用光泵浦来实现量子态的初始化，是非常有效并且方便的方法。相关的光跃迁如图2.6所示。在这里，我们使用一个 2.1 GHz 的电光调制器来给 369.5nm 的光产生一个一阶边带，来激发 $2S_{1/2} |F = 1\rangle$ 到 $2P_{1/2} |F = 1\rangle$ 的跃迁。当电子处于激发态 $2P_{1/2} |F = 1\rangle$ 时，会以 2/3 的概率自发辐射到 $2S_{1/2} |F = 1\rangle$ ，以 1/3 的概率自发辐射到 $|0\rangle \equiv 2S_{1/2} |F = 0, m_F = 0\rangle$ 。然而，一旦电子落到了 $|0\rangle$ 上面，由于激光的频率对这个能级来说是远离共振的，电子将不能再次被激发，只能留在 $2S_{1/2} |F = 0\rangle$ 上面。而落到 $2S_{1/2} |F = 1\rangle$ 则会被继续激发，重复上面的过程，直到电子落到 $|0\rangle$ 。至此，态初始化完成。

如图2.7所示，是电子在 $2S_{1/2} |F = 1\rangle$ 能级上的概率随时间变化的曲线。离子在做完多普勒冷却之后，我们把初始化的光打开并且持续 Δt 时间，随后多次测量得到态分布概率。改变 Δt ，得到上述曲线。在该曲线中，我们可以很清晰的看到，电子处于 $2S_{1/2} |F = 1\rangle$ 的概率随时间指数衰减。但是受限于探测保真度，我们最终只能看到 $2S_{1/2} |F = 1\rangle$ 的概率小于 0.5%。

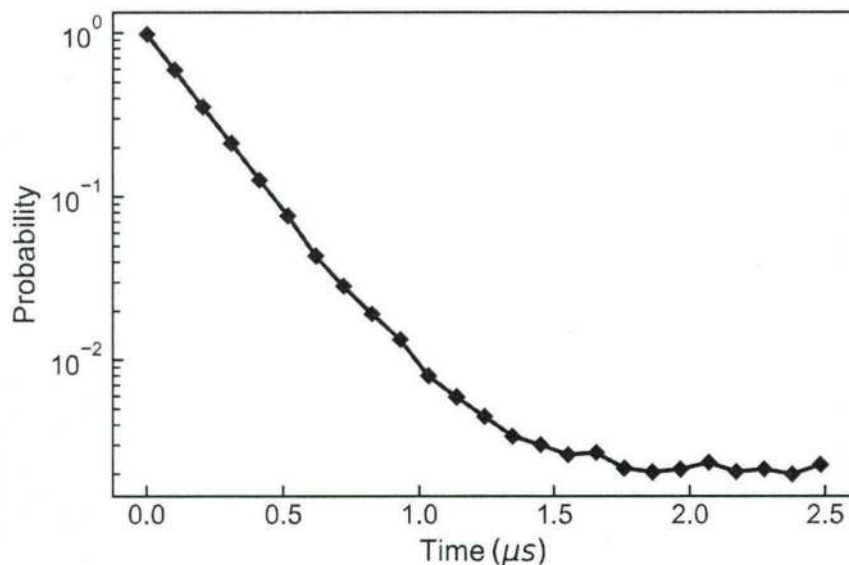


图 2.7 光泵浦衰减曲线

2.3.3 态探测

态探测是通过态依赖的荧光探测来实现的,如图2.8所示。我们用 369.5 nm 的近共振(在实验中红失谐 3 MHz)激光来激发 $|1\rangle \leftrightarrow {}^2P_{1/2} |F=0\rangle$ 的跃迁。一旦被激发到激发态 ${}^2P_{1/2} |F=0\rangle$, 就会很快的自发辐射光子落到 ${}^2S_{1/2} |F=1, m_F=0, \pm 1\rangle$, 但是却不能落到 ${}^2S_{1/2} |F=0\rangle$ 。而自发辐射落到 ${}^2S_{1/2} |F=1, m_F=0, \pm 1\rangle$ 的电子又会被激光激发到 ${}^2P_{1/2} |F=0\rangle$, 这样就构成了一个循环。所以,一旦塌缩到/处于 $|1\rangle$, 就能够不断的向外辐射光子, 我们可以在 PMT 上看到有光子读数, 也可以在 CCD 上面看到离子的像, 所以 $|1\rangle$ 也被称之为“亮态”。但是值得注意的是, ${}^2S_{1/2} |F=1, m_F=0, \pm 1\rangle$ 这三个态都是所谓的“亮态”。

相反的, 如果是塌缩到/处于 $|0\rangle$, 由于激光远离共振, 大约红失谐 12.642 GHz, 不能被激发到激发态, 所以就不会辐射光子, PMT/CCD 就不会看到相关的信号, 因此 $|0\rangle$ 通常被称之为“暗态”。

在探测的过程中, 探测光持续 500 μs 。自发辐射散射的光子被一个数值孔径 NA = 0.4 的物镜收集。被收集到的光子会打到 PMT 上计数。如果光子数大于一个, 我们就认为离子处于“亮态”。如果只有一个光子或者没有光子被探测到, 则离子处于“暗态” $|0\rangle$ 。对于一个任意的量子态 $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$, 测量会导致量子态塌缩 $|0\rangle$ 或者 $|1\rangle$, 对应的概率分别是 $|c_0|^2$ 和 $|c_1|^2$ 。一般来说, 我们进行一万次重复测量, 以获得可靠的概率分布。举个例子, 如果我们重复测量了 10 000 次, 其中有 2 000 次探测到的光子数小于等于一, 有 8 000 次探测到的光子

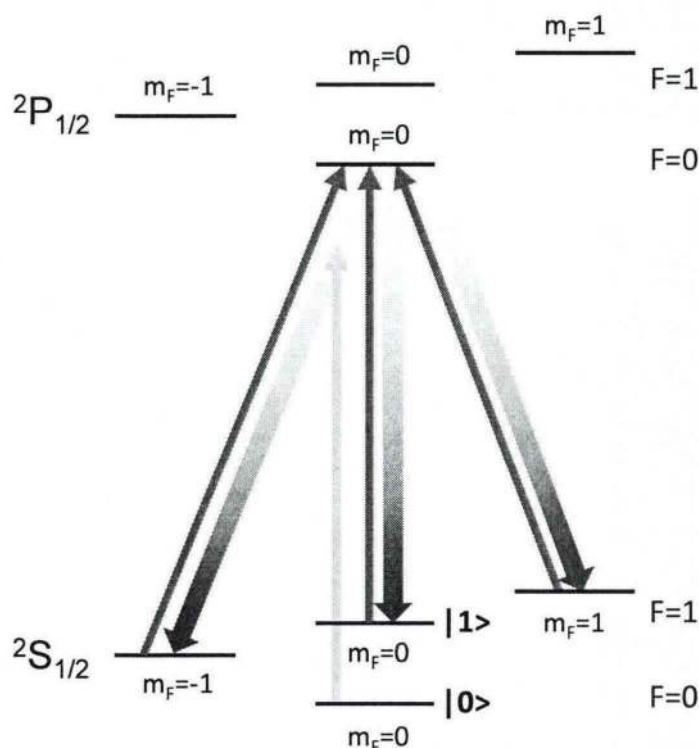


图 2.8 态探测相关的光跃迁

数大于一，则我们认为 $|c_0|^2 = 0.2$ 和 $|c_1|^2 = 0.8$ 。如果想确定 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的相对相位，就还需要在荧光探测之前，绕布洛赫球的 x/y 轴转动 $\pi/2$ 的角度 [17]。

我们的态探测保真度大约为 99.4%，如图 2.9 所示。蓝色部分，是我们通过光泵浦的方法，把态制备到 $|0\rangle$ ，然后探测 $500 \mu s$ ，并且重复 100 000 次上述过程，得到的光子数分布。黄色部分，是我们先把态制备到 $|0\rangle$ ，然后，用微波做一个 π 脉冲翻转把态制备到 $|1\rangle$ ，重复 100 000 次上述过程，得到的光子数分布。需要注意的是，在这个图中，纵坐标是概率，其取值范围是 0.001-1，所以概率小于 0.001 的事件在柱状图中不体现。

态探测误差来源分析：最主要的探测误差来源，是非共振跃迁导致亮态变成暗态。在探测的过程中，探测光有一定的概率会把亮态转换成为暗态。而当这发生的时候，不会再有光子被探测到。如果这个过程发生之前，我们探测到的光子数小于等于一，那么这个时候量子态会被误判为暗态 $|0\rangle$ 。这个现象在图 3.10 中是非常明显的。同时，这种机制也导致了我们不能通过增加探测时间的方法，来增加我们探测到的光子数。类似的，暗态也有机会变成亮态。但是，相比于让亮态变暗的 2.1 GHz 的激光频率失谐，让暗态变亮的 14.7 GHz 的激光频率失谐就大很多了，这也使得这种机制导致的暗态变量，在我们的探测中并不明显。但是，

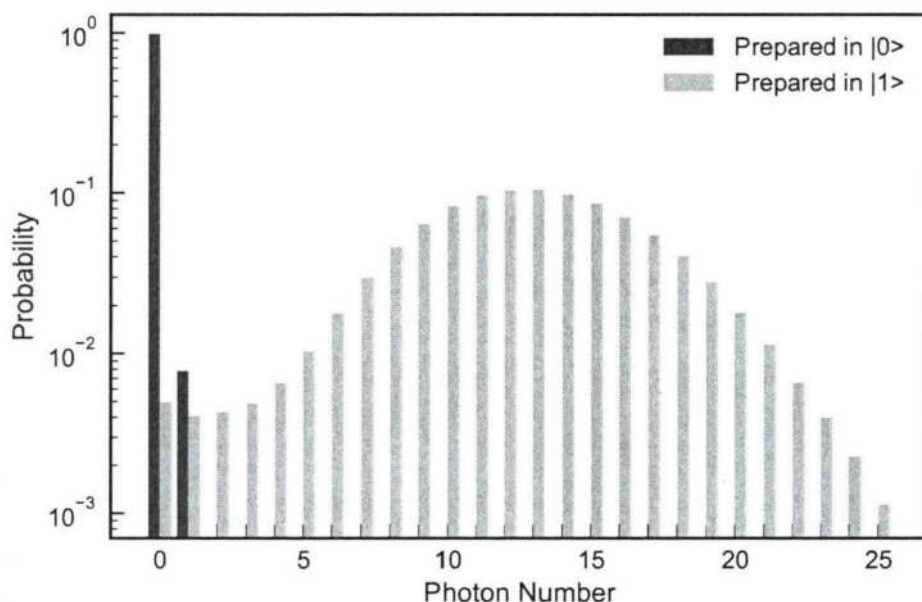


图 2.9 态荧光探测柱状图

背景光散射、PMT 暗计数等，往往会增加 PMT 的计数，错误的把暗态判断成为亮态。当我们把态制备到暗态 $|0\rangle$ 再去做态探测，依然可以探测到一个甚至多个光子，往往就是受到这些因素的影响。为了提高态探测保真度，我们可以使用更高数值孔径的物镜来提高光子收集效率，也可以使用探测效率更高的单光子探测器来做光子计数。只要平均光子数增多了，相应的提高判断阈值，就能有效的提高态探测保真度 [18]。近年兴起的机器学习，也可以用来实现快速的高保真度的态探测 [19]。

2.4 量子态微波调控

使用和比特跃迁频率共振的微波来驱动比特的两个能级之间的跃迁是最简单的方法。微波场中的震荡磁场可以耦合 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ ，驱动磁偶极跃迁，并形成 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的拉比震荡。

2.4.1 磁偶极相互作用

经典的单模电磁场与二能级的相互作用，是最基本也是最重要的相互作用形式。 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示离子超精细劈裂的两个能级，其对应的本征值是 $\hbar\omega_g$ 和 $\hbar\omega_e$ ，并且有 $\hbar\omega_e - \hbar\omega_g = \hbar\omega_0$ ， $\hbar\omega_0$ 为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的跃迁频率。可以得到自由哈密顿量为

$$H_0 = \hbar\omega_g|0\rangle\langle 0| + \hbar\omega_e|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z, \quad (2.11)$$

其中 $\sigma_z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|$ 。

考虑电磁场与超精细劈裂能级的相互作用。假设磁场行波沿着 z 方向传播且偏振沿着 x 方向, 为方便起见 $B = B_0 \cos(\omega t + \phi)$ 。而质自旋 μ 的磁偶极矩为

$$\mu = \mu_{10}|1\rangle\langle 0| + \mu_{01}|0\rangle\langle 1| = \mu_M(\sigma + \sigma^+), \quad (2.12)$$

在这里, 我们取 $\mu_{10} = \mu_{01} = \mu_M$, $\sigma = |0\rangle\langle 1|$, $\sigma^+ = |1\rangle\langle 0|$, 为了保证磁偶极具有偶宇称, 矩阵元 $\mu_{00} = \mu_{11} = 0$ 。在偶极近似下的相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_1 &= -\mu \cdot B \\ &= -\mu_M(\sigma + \sigma^+) \cdot B_0 \cos(\omega t + \phi) \\ &= \hbar \Omega_R(\sigma + \sigma^+) \cos(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中, $\Omega_R = -\mu_M B_0 / \hbar$, 被称之为拉比频率, 描述原子与电磁场之间耦合强度。系统的总哈密顿量为 $H = H_0 + H_1$ 。为了后面讨论问题更加方便, 我们把哈密顿量变换到相互作用绘景, 在自旋比特频率的旋转坐标系下, 可以得到

$$\begin{aligned} H_I &= e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar} \\ &= \hbar \Omega_R(\sigma e^{-i\omega_0 t} + \sigma^+ e^{i\omega_0 t}) \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} \hbar \Omega_R(\sigma e^{-i\omega_0 t} + \sigma^+ e^{i\omega_0 t})(e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}) \\ &= \frac{1}{2} \hbar \Omega_R(\sigma e^{-i(\Delta t - \phi)} + \sigma^+ e^{i(\Delta t - \phi)}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

上式中, 取旋波近似省略了高频项, 并且记 $\Delta = \omega_0 - \omega$ 为失谐项。然而, 在失谐 $\Delta \neq 0$ 时, 上式有含时项 $e^{i\Delta t}$ 和 $e^{-i\Delta t}$ 。所以, 为了去掉含时项, 我们还可以把哈密顿量变换到电磁场频率的旋转坐标系下, 取 $U = e^{-i\frac{1}{2}\omega\sigma_z t}$, 同样取旋波近似省略去高频项, 可以得到

$$\begin{aligned} H_{\mu m} &= i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} U + U^\dagger H U \\ &= \frac{1}{2} \hbar \Delta \sigma_z + \frac{1}{2} \hbar \Omega(\sigma e^{-i\phi} + \sigma^+ e^{i\phi}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

这样, 我们就得到了不显含时间的相互作用哈密顿量。其实, 无论是在哪个频率的旋转坐标下, 我们都可以正确的求解系统的演化, 但是会有一个额外的含时旋转项 $e^{-i\omega_s t}$ 存在。同时, 还值得注意的是, 在计算力学量的平均值时, 要取相同绘景中的力学量算符和态矢量。

求解薛定谔方程: 设系统量子态为

$$|\psi(t)\rangle = c_0(t)|0\rangle + c_1(t)|1\rangle, \quad (2.16)$$

代入薛定谔方程

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}H_I|\psi(t)\rangle, \quad (2.17)$$

这个方程的解可以在量子光学教材 [20, 21] 中找到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c_0(t) &= -i\frac{\Omega_R}{2}e^{i\phi}c_1(t)e^{-i\Delta t}, \\ \frac{d}{dt}c_1(t) &= -i\frac{\Omega_R}{2}e^{-i\phi}c_0(t)e^{-i\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

最终求解得到

$$\begin{aligned} c_0(t) &= \{c_0(0)[\cos(\frac{\Omega}{2}t) + i\frac{\Delta}{\Omega}\sin(\frac{\Omega}{2}t)] \\ &\quad - i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{i\phi}c_1(0)\sin(\frac{\Omega}{2}t)\}e^{-i\frac{\Delta}{2}t}, \\ c_1(t) &= \{c_1(0)[\cos(\frac{\Omega}{2}t) - i\frac{\Delta}{\Omega}\sin(\frac{\Omega}{2}t)] \\ &\quad - i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{-i\phi}c_0(0)\sin(\frac{\Omega}{2}t)\}e^{i\frac{\Delta}{2}t}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中 $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}$ 。

量子态的演化可以用 $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ 来描述，其中 U_t 为时间演化算符。在共振即 $\Delta = 0$ 的情况下，由上面薛定谔方程的解，我们可以得到

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -ie^{i\phi}\sin(\Omega t) \\ -ie^{-i\phi}\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} = R(\Omega t, \phi), \quad (2.20)$$

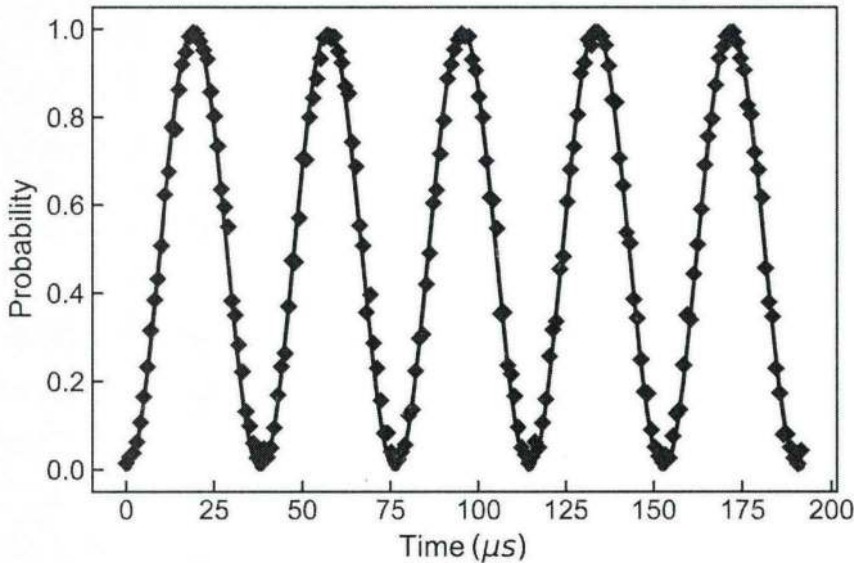


图 2.10 微波拉比振荡

矩阵 $R(\Omega t, \phi)$ 表示的是, 围绕布洛赫球赤道面上的 $\cos(\phi)\mathbf{x} + \sin(\phi)\mathbf{y}$ 轴, 旋转 $\theta = \Omega t$ 角度。一个围绕 x 轴的旋转可以用 $R_x(\theta) = R(\theta, 0)$ 描述, 通过控制拉比频率和演化时间实现。围绕 y 轴的旋转可以用 $R_y(\theta) = R(\theta, \phi)$ 描述, 实现方法跟绕 x 轴一样, 只是多一个相对相位 ϕ 。但是, 围绕 z 轴的旋转不能直接实现, 要通过绕 x 轴和 y 轴的操作间接实现, 例如 $R_z(\theta) = R_x(\pi/2)R_y(\theta)R_x(\pi/2)$ 。这样, 通过控制相位和相互作用的时间, 我们可以实现单比特的任意操作。

微波基本实验: 实验上, 微波是通过微波喇叭朝着离子方向播放出来。如图2.10所示, 是微波驱动的拉比振荡。

2.4.2 塞曼能级的调试

但是有时候, 我们需要用到多能级, 把比特编码到 $|0\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ 、 $|1\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ 和 $|2\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=1, m_F=\pm 1\rangle$ 。然而, $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 塞曼比特跃迁的频率为 $\omega_{0,\pm 1} = \omega_{hf} \pm 1.4 \text{ MHz/Gaussian}$, 对环境磁场一阶敏感, 通常该比特的相干时间只有一两毫秒。现在有很多的技术手段, 来改善该比特的相干时间。例如, 增加磁屏蔽, 主动磁场稳定, 和交流电源做同步, 以及改善产生磁场线圈的电流源等 [22–25]。

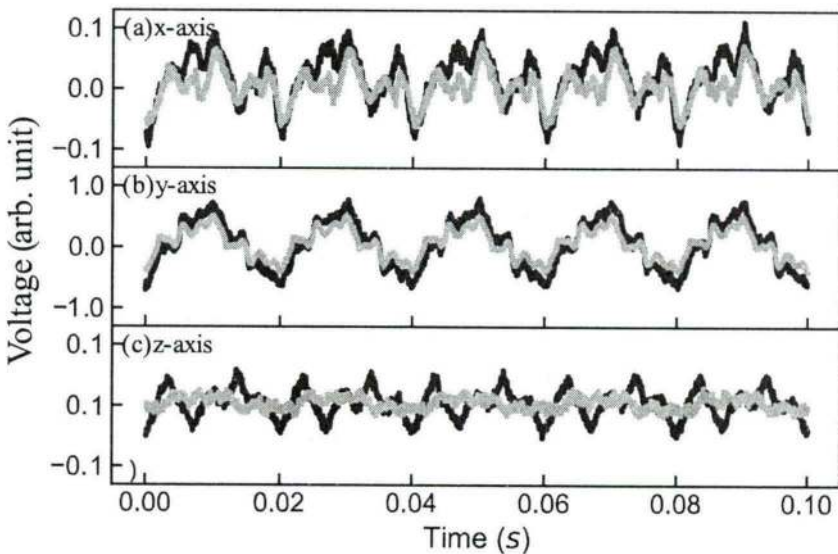


图 2.11 电压随时间变化

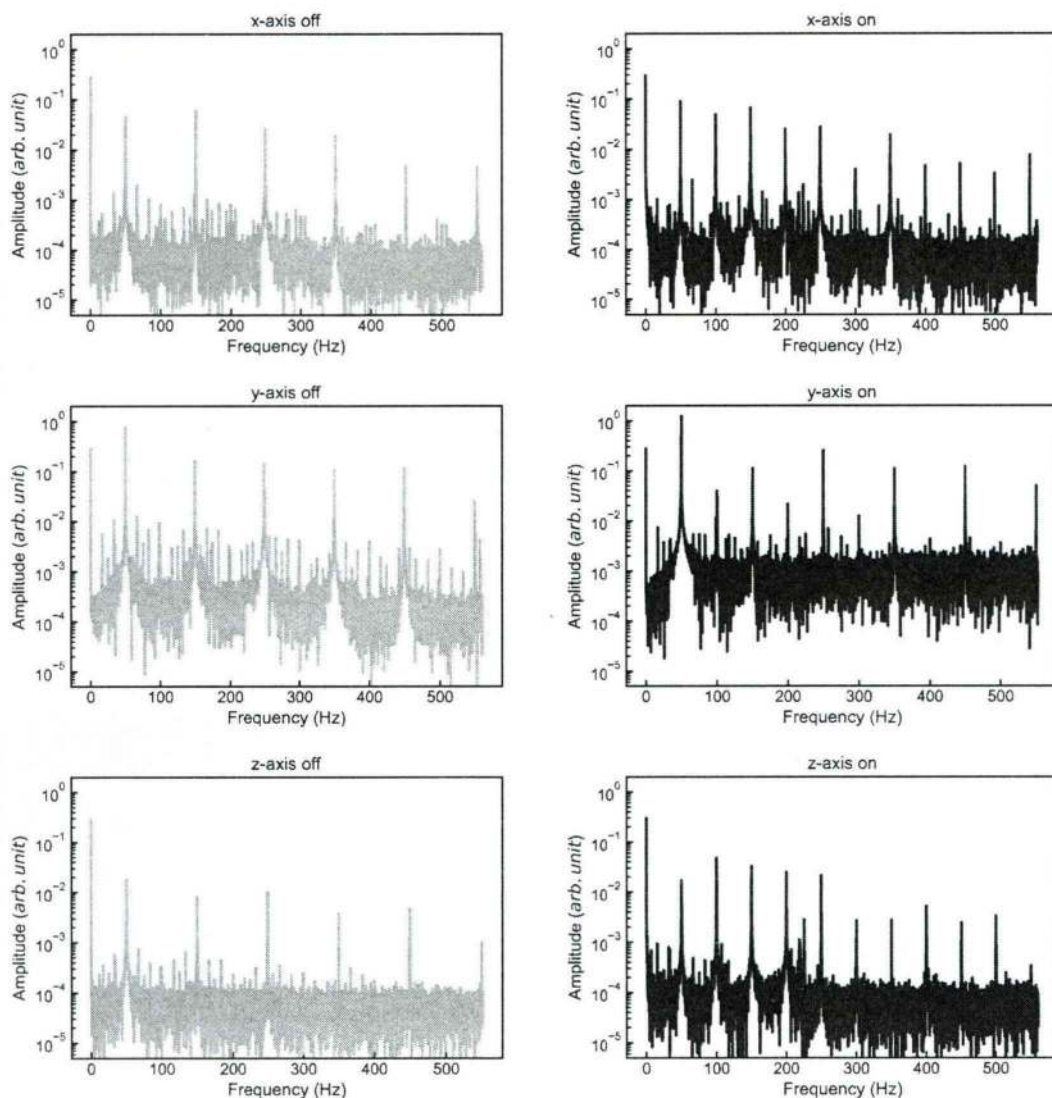


图 2.12 交变背景磁场频谱

在这一小节，我们主要测量了环境磁场，通过傅里叶变换得到环境磁场频谱，证明磁场主要是工频及其高阶成分，然后通过让实验时序与交流电源震荡同步，明显改善了塞曼比特的相干时间。

测量背景磁场的方法很多，最简单的就是利用商用的磁通门计，其分辨率可以到达 10^{-5} 高斯。但是考虑到我们的系统中有一个直流偏置磁场大约 6 高斯，超出了磁通门计的量程。另外磁通门计做模拟输出的时候，频率响应大约也只有百赫兹。为此，我们自制了一个大约 100 匝直径 10 cm 的线圈，并且放置在离子阱的底部。根据法拉第电磁感应定律，交变的背景磁场会在线圈两端产生感应电动势，而直流的偏置磁场则不会产生感应电动势。然后，我们用一个 24 位的数据采集卡以 15 Ksps 的采样率测量线圈两端的电压。

如图2.11所示,是测量所得的线圈两端的电压。从上到下分别是 x 轴方向, y 轴方向和 x 轴方向。而蓝色的曲线表示测量时,线圈附近的电器(包括电脑、灯管、离子泵、微波放大器以及偏置磁场线圈等)全开,而黄色的曲线表示测量时,线圈附近的电器全关。

有了线圈两端的电压数据,我们可以得到交流的背景磁场的频谱,如图2.12所示,同图2.11,从上到下分别是 x 轴方向, y 轴方向和 x 轴方向。而蓝色的曲线表示测量时,线圈附近的电器全开,而黄色的曲线表示测量时,线圈附近的电器全关。可以看出背景磁场主要是工频 50 Hz 以及其整数倍的频率,而且其中最主要的就是 50 Hz 的成分。很有意思的是,当线圈附近的电器全部关闭之后,偶数倍的频率成分消失了。

这样的涨落使得 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 跃迁展宽,或者是塞曼比特相干时间变差,跃迁频率是由塞曼劈裂决定,而塞曼劈裂的大小则是由瞬时磁场强度决定。在一般的实验中,实验时序和磁场涨落之间是完全随机的。也就是由于这种随机性,导致离子在演化的过程中,比特频率在完全随机的变化,经过长时间多次重复试验,最后的效果就是退相干。

为了避免在这个问题,我们需要同步交流电路和实验序列。这样的信号同步,使得我们每次执行实验操作时交流电路都处于相同的相位,从而消除了部分磁场随机变化。信号同步的原理示意图,如图2.13所示。在实验实现时,我们用一个变压器,在 220V 的交流电路中进行取样,得到一个 $V_{pp} \approx 4\text{ V}$ 的同频率的交流信号。接着我们用这个交流信号去触发函数信号发生器*,产生同频率的 TTL 信号。而执行实验时序的 FPGA 一直处于等待状态,直到接收到高电平,才开始执行实验时序。

时序同步的效果,可以在图2.14中看到。图中,是两个 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 拉比震荡。黄色线表示的是,没有时序同步的情况下,震荡很快就衰减了,拟合的 $\tau_{1/e} \approx 2.06\text{ ms}$ 。蓝色线表示的是,做了时序同步而其他条件完全相同,可以看到震荡几乎没有衰减,拟合的 $\tau_{1/e} \approx 24.51\text{ ms}$ 。

*RIGOL DG1022U

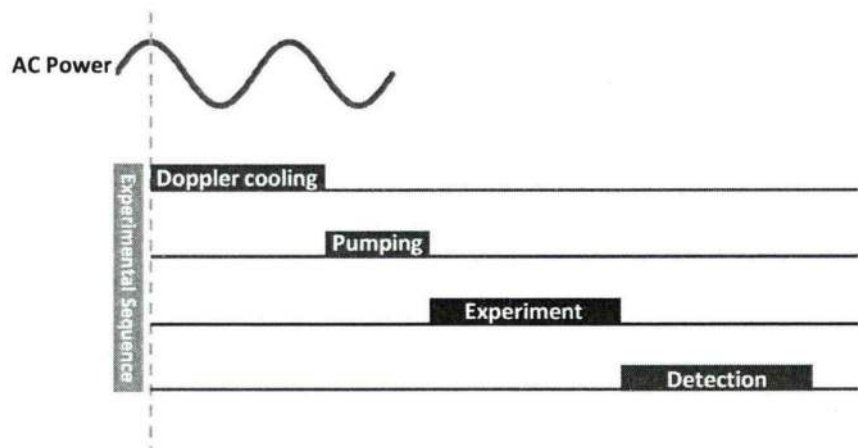


图 2.13 包含与交流电源同步的实验时序图

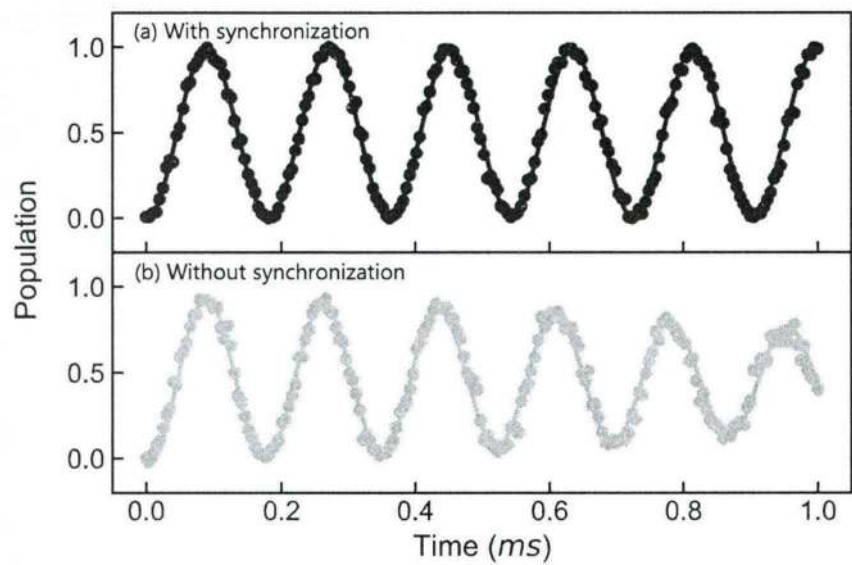


图 2.14 塞曼能级微波拉比振荡

2.5 小结

本章主要介绍了囚禁 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的基本的操作。首先，我们介绍了通过双光子光致电离的方法，将加热 oven 得到的原子蒸汽电离成为离子，并立刻被射频势场囚禁住。经过多普勒冷却，将离子冷却到多普勒极限约 $468.5\mu\text{K}$ 。随后，使用标准的光泵浦的方式，可以以非常高的保真度将离子内部电子态制备到 $|0\rangle$ ，实现对量子比特的初始化。然后，介绍了单离子核自选劈裂超精细量子比特最常用的微波操作，完整的描述了磁场与离子的磁偶极相互作用，为以后的实验打下了坚实的基础。特别地，为了开发高维资源，我们通过将实验时序与交流电做相位同步，有效延长了塞曼能级跃迁的相干时间，为以后在利用多能级进行量子信息处理等做好了技术储备。

参考文献

- [1] Olmschenk S, Younge K C, Moehring D L, et al. Manipulation and detection of a trapped Yb^+ hyperfine qubit. *Phys. Rev. A*, 2007, 76:052314.
- [2] McLoughlin J J, Nizamani A H, Siverns J D, et al. Versatile ytterbium ion trap experiment for operation of scalable ion-trap chips with motional heating and transition-frequency measurements. *Physical Review A*, 2011, 83(1):013406.
- [3] Timoney N, Baumgart I, Johanning M, et al. Quantum gates and memory using microwave-dressed states. *Nature*, 2011, 476(7359):185.
- [4] Kasture S, Lenzini F, Haylock B, et al. Frequency conversion between UV and telecom wavelengths in a lithium niobate waveguide for quantum communication with Yb^+ trapped ions. *Journal of Optics*, 2016, 18(10):104007.
- [5] Wang Y, Um M, Zhang J, et al. Single-qubit quantum memory exceeding ten-minute coherence time. *Nature Photonics*, 2017, 11(10):646.
- [6] Zywiets U, Reinhardt C, Evlyukhin A B, et al. Generation and patterning of Si nanoparticles by femtosecond laser pulses. *Applied Physics A*, 2014, 114(1):45–50.
- [7] Earnshaw S. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 1842, 7:97–112.
- [8] Paul W. Electromagnetic traps for charged and neutral particles. *Reviews of modern physics*, 1990, 62(3):531.
- [9] Deslauriers L. Cooling and heating of the quantum motion of trapped Cd^+ ions[D]. 2006.
- [10] Leibfried D, Blatt R, Monroe C, et al. Quantum dynamics of single trapped ions. *Reviews of Modern Physics*, 2003, 75(1):281.
- [11] Wang Z. The Yb^+ ion trap development for quantum simulation experiment[D]. 2016.
- [12] Macalpine W, Schildknecht R. Coaxial resonators with helical inner conductor. *Proceedings of the IRE*, 1959, 47(12):2099–2105.
- [13] Balzer C, Braun A, Hannemann T, et al. Electrodynamically trapped Yb^+ ions for quantum information processing. *Physical Review A*, 2006, 73(4):041407.
- [14] Wineland D. Trapped ions, laser cooling, and better clocks. *Science*, 1984, 226(4673):395–400.
- [15] Wineland D J, Itano W M. Laser cooling. *Physics Today*, 1987, 40:34–40.
- [16] Wineland D, Itano W M, Bergquist J, et al. Laser-cooling limits and single-ion spectroscopy. *Physical Review A*, 1987, 36(5):2220.
- [17] James D F, Kwiat P G, Munro W J, et al. Measurement of qubits. *Physical Review A*, 2001, 64(5):052312.
- [18] Noek R, Vrijsen G, Gaultney D, et al. High speed, high fidelity detection of an atomic hyperfine qubit. *Optics letters*, 2013, 38(22):4735–4738.

- [19] Seif A, Landsman K A, Linke N M, et al. Machine learning assisted readout of trapped-ion qubits. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2018, 51(17):174006.
- [20] Scully M O, Zubairy M S. *Quantum optics*, 1999.
- [21] Steck D A. *Quantum and atom optics*. Oregon Center for Optics and Department of Physics, University of Oregon, 2007, 47.
- [22] Schulz S. *Scalable microchip ion traps for quantum computation*. Lulu. com, 2010.
- [23] Smith A, Anderson B E, Chaudhury S, et al. Three-axis measurement and cancellation of background magnetic fields to less than $50\ \mu\text{G}$ in a cold atom experiment. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2011, 44(20):205002.
- [24] Ramm M. *Quantum correlations and energy transport in trapped ions[D]*. UC Berkeley, 2014.
- [25] Ruster T, Schmiegelow C T, Kaufmann H, et al. A long-lived Zeeman trapped-ion qubit. *Applied Physics B*, 2016, 122(10):254.

第三章 运动态操作

运动自由度 [1, 2] 是囚禁离子区别于其他原子系统的重要特征, 极大的丰富了囚禁离子在量子信息处理、精密测量等领域中的应用。而囚禁离子与光场的相互作用可以耦合离子的自旋态和运动态, 则给我们提供了有效的控制运动态的方法 [3, 4]。一方面, 将运动态冷却到基态可以减少量子信息处理过程中的误差。另一方面, 运动自由度也可以作为量子信息处理的辅助自由度 [5–8], 同时也可以直接用来编码量子比特, 为使用离散和连续变量的混合量子信息方案开辟了一条新的道路 [9]。

3.1 自旋与运动耦合

在这一节的讨论中, 我们只考虑电偶极相互作用。和前面一章讨论的磁偶极相互作用类似, 我们可以写出自旋态的哈密顿量 [2] 为 $H_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z$ 。而对于单离子来说, 其运动态主要由三个模, 分别朝向囚禁势阱的三个轴向。在这里, 我们只考虑 z 方向, 记 z 方向的声子模频率为 ω_z , 其对应的哈密顿量为 $H_m = \hbar\omega_z(n + 1/2)$ 。同时, 使用产生湮灭算符来重写上述方程, 可以得到运动态的哈密顿量为 $H_m = \hbar\omega_z a^\dagger a$ 在这里, 为了方便起见, 我们省略了常数系数项。所以不含时的自由哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_0 &= H_s + H_m \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega_z a^\dagger a, \end{aligned} \quad (3.1)$$

在我们的实验中, 我们使用受激拉曼跃迁的方法耦合自旋态和运动态, 这是一个双光子的过程, 在后面我们会给出具体的描述。在这里, 为了可以抓住问题的本质, 我们只需要考虑考虑单光子的电偶极跃迁, 相互作用哈密顿量为 $H_I = -\mu_d \cdot E_{(z,t)}$ 其中, μ_d 是电偶极算符, $\mu_d = \mu_d(\sigma_- + \sigma_+)$, $\mu_d = \langle 0|\mu_d|1\rangle = \langle 1|\mu_d|0\rangle$, E 是沿 z 方向传播 x 方向偏振的电磁波, $E = E_1 \hat{x} \cos(kz - \omega t + \phi)$ 。而位置算符 z 可以用产生湮灭算符表示, 为 $z = z_0(a + a^\dagger)$, 其中, z_0 是离子基态波函数沿 z 方向的展宽, $z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_z}}$ 。可以得到相互作用哈密顿量为

$$H_I = \frac{1}{2}\hbar\Omega(\sigma_- + \sigma_+)(e^{i(kz - \omega t + \phi)} + e^{-i(kz - \omega t + \phi)}), \quad (3.2)$$

其中 $\Omega = -\mu_d E_1 / 2\hbar$ 。根据 $H_I = e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar}$, 可以得到相互作用绘景下的

相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned}
 H_I = & \frac{1}{2} \hbar \Omega [\sigma_+ (e^{i(\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - (\omega - \omega_0)t + \phi)} \\
 & + e^{-i(\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - (\omega + \omega_0)t + \phi)}) \\
 & + \sigma_- (e^{i(\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - (\omega + \omega_0)t + \phi)} \\
 & + e^{-i(\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - (\omega - \omega_0)t + \phi)})],
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

这里, $\eta \equiv k_z z_0$ 是兰姆狄克 (Lamb-Dicke) 系数。记 $\delta \equiv \omega - \omega_0$, 作旋波近似可以得到

$$\begin{aligned}
 H_I = & \frac{1}{2} \hbar \Omega [\sigma_+ e^{i(\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - \delta t + \phi)} \\
 & + \sigma_- e^{-i(\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - \delta t + \phi)}],
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

假设系统量子态函数为

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\downarrow, n}(t) |\downarrow\rangle + (a_{\uparrow, n}(t) |\uparrow\rangle) |n\rangle, \quad (3.5)$$

这里, 为了区分自旋态和运动态, 我们使用 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 表示自旋态, $|n\rangle$ 表示运动态。在只考虑近共振的条件下, 即 $\delta \approx (m - n)\omega_z$, 其中 m 和 n 均为整数, 文献 [2] 给出上述哈密顿量对应的薛定谔方程的解为

$$\begin{aligned}
 \dot{C}_{\downarrow, m} &= -i^{(1+|n-m|)} e^{i\phi} \Omega_{n, m} C_{\uparrow, n}, \\
 \dot{C}_{\uparrow, n} &= -i^{(1-|n-m|)} e^{-i\phi} \Omega_{n, m} C_{\downarrow, m},
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Omega_{n, m} &= \Omega \left| \langle n | e^{i\eta(a + a^\dagger)} | m \rangle \right| \\
 &= \Omega e^{-\eta^2/2} \left(\frac{n < !}{n > !} \right)^{1/2} \eta^{|n-m|} L_{n < }^{|n-m|}(\eta^2),
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中, $n < (n >)$ 表示 n 与 m 之中较小(大)者, L_n^a 是广义拉盖尔多项式 (generalized Laguerre polynomial)

$$L_n^a(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+a}{n-m} \frac{x^m}{m!}, \quad (3.8)$$

其中, $\binom{n+a}{n-m}$ 为二项式系数 $\binom{n+a}{n-m} = \frac{(n+a)!}{(n-m)!(m+a)!}$ 。为了方便使用, 这里直接给出

几种常用的广义拉盖尔多项式

$$\begin{aligned}
 L_0^a(x) &= 1, \\
 L_1^a(x) &= 1 + a - x, \\
 L_2^a(x) &= \frac{(a+1)(a+2)}{2} - (a+2)x + \frac{x^2}{2}, \\
 L_3^a(x) &= \frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{6} - \frac{(a+2)(a+3)x}{2} + \frac{(a+3)x^2}{2} - \frac{x^3}{6},
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

兰姆狄克极限 (Lamb-Dicke Limit). 离子的运动振幅远小于光场的波长, 即 $(\langle \psi_{motion} | k^2 z^2 | \psi_{motion} \rangle)^{1/2} \ll 1$, 这个条件被称之为拉姆迪克极限。这个条件比要求 $\eta \ll 1$ 更为严格, 因为 η 的大小只与基态波函数有关, 而不关心实际的空间波函数分布。在满足这个条件的情况下, $\eta^2 \bar{n} \ll 1$, 这样我们的哈密顿量以及态演化的计算都可以得到极大的简化, 我们只需要考虑包含 η 的低阶项, 而舍去高阶项。

拉姆迪克极限在离子阱的计算中, 几乎是必不可少的, 应用非常广泛。然而, 为了减少不同能级之间的串扰, 我们一般还需要要求系统满足 $\Omega \ll \omega_z$, 此时边带跃迁清晰可辨。下面, 我们考虑三种最基本的跃迁, 给出各自对应的简化之后的哈密顿量, 以及对应的拉比频率。

载波跃迁。 $\delta = 0$, $|n\rangle|\downarrow\rangle \leftrightarrow |n\rangle|\uparrow\rangle$, 对应的拉比频率为 Ω , 对应的哈密顿量为

$$H_{car} = \frac{1}{2} \hbar \Omega (\sigma_+ e^{i\phi} + \sigma_- e^{-i\phi}), \tag{3.10}$$

一阶红边带跃迁。 $\delta = -\omega_z$, $|n\rangle|\downarrow\rangle \leftrightarrow |n-1\rangle|\uparrow\rangle$, 对应的拉比频率为 $\Omega_{n,n-1} = \Omega \sqrt{n} \eta$, 对应的哈密顿量为

$$H_{rsb} = \frac{1}{2} \hbar \eta \Omega (a \sigma_+ e^{i\phi} + a^\dagger \sigma_- e^{-i\phi}), \tag{3.11}$$

一阶蓝边带跃迁。 $\delta = +\omega_z$, $|n\rangle|\downarrow\rangle \leftrightarrow |n+1\rangle|\uparrow\rangle$, 对应的拉比频率为 $\Omega_{n,n+1} = \Omega \sqrt{n+1} \eta$, 对应的哈密顿量为

$$H_{bsb} = \frac{1}{2} \hbar \eta \Omega (a^\dagger \sigma_+ e^{i\phi} + a \sigma_- e^{-i\phi}), \tag{3.12}$$

3.2 受激拉曼跃迁

这一节, 我们将讨论双光子受激拉曼跃迁, 给出自旋态和运动态耦合的一些结论。如图3.1所示, 有三个能级, $|\downarrow\rangle$, $|\uparrow\rangle$ 以及 $|e\rangle$, 其对应的能量分别为 $\hbar\omega_1$, $\hbar\omega_2$ 和 $\hbar\omega_3$ 。 $|\downarrow\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle$ 的跃迁频率约为 12.642 GHz, 而 $|\downarrow\rangle$ (或者 $|\uparrow\rangle$) $\leftrightarrow |e\rangle$ 的跃迁频率约为 369.5 nm。

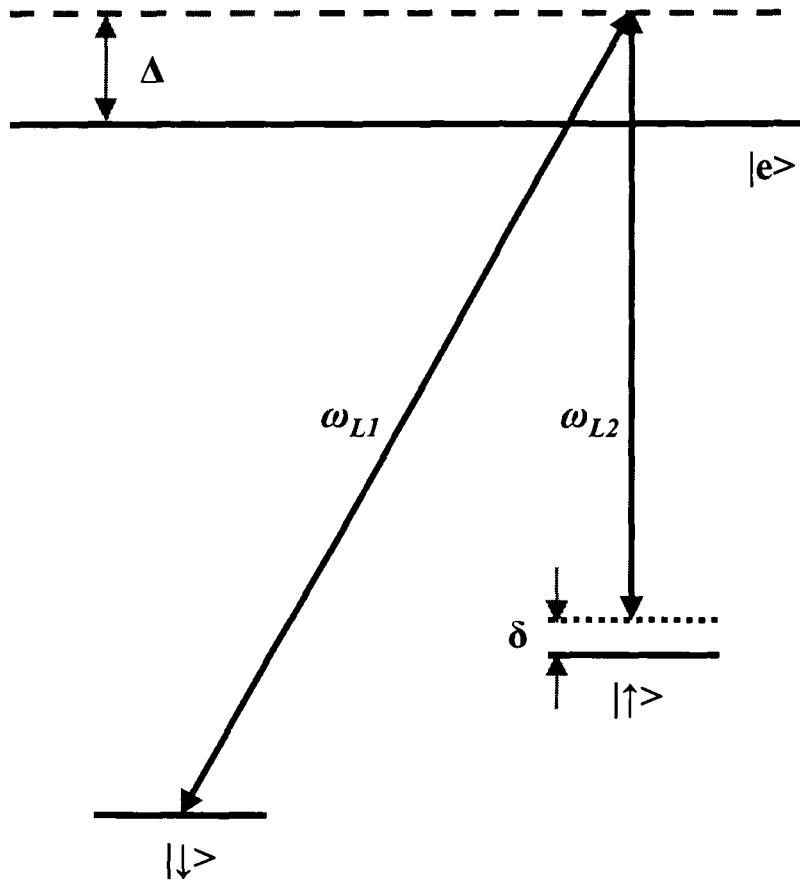


图 3.1 三能级受激拉曼跃迁

耦合 $|\downarrow\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 的激光频率为 ω_{L1} ，与 $|e\rangle$ 能级失谐为 Δ 。耦合 $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 的激光频率为 ω_{L2} ，与 $|e\rangle$ 能级失谐为 Δ ，与 $|\uparrow\rangle$ 能级失谐为 δ 。对应的电场为 $\mathbf{E}_i(t) = \hat{e}_i E_{1,i} \cos(k_i z - \omega_{L,i} t + \phi_i)$ ，这里 i 取 1 或者 2，分表表示两束激光， $\hat{e}_i$ 表示激光的偏振方向， $E_{1,i}$ 表示激光的电场强度， $\omega_{L,i}$ 表示激光的频率， ϕ_i 表示激光的相位。

光场与基态到激发态之间的电偶极跃迁哈密顿量为 $H_L = -\mu_{d1} \mathbf{E}_1(t) - \mu_{d2} \mathbf{E}_2(t)$ 。代入具体形式，可以得到

$$\begin{aligned} H_L = & \hbar g_{13} \cos(k_1 z - \omega_{L1} t + \phi_1) |\downarrow\rangle \langle e| \\ & + \hbar g_{23} \cos(k_2 z - \omega_{L2} t + \phi_2) |\uparrow\rangle \langle e| \\ & + H.c., \end{aligned} \quad (3.13)$$

其中， $g_{13} = -\langle e | \mu_{d1} \hat{e}_1 | \downarrow \rangle \frac{E_{1,1}}{\hbar}$ ， $g_{23} = -\langle e | \mu_{d2} \hat{e}_2 | \uparrow \rangle \frac{E_{1,2}}{\hbar}$ ，为耦合系数。内态的自由哈密顿量可以写成 $H_0 = \hbar \omega_1 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| + \hbar \omega_1 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + \hbar \omega_1 |e\rangle \langle e|$ 。这样，在相互作用

用绘景下, 我们可以得到相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned}
 H_I = & \frac{1}{2} \hbar g_{13} e^{k_1 z + \phi_1} e^{-i\Delta t} (1 + e^{i2\omega_{L_1} t}) |\downarrow\rangle\langle e| \\
 & + \frac{1}{2} \hbar g_{23} e^{k_2 z + \phi_2} e^{-i(\Delta - \delta)t} (1 + e^{i2\omega_{L_2} t}) |\uparrow\rangle\langle e| \\
 & + H.c.,
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

设态函数为

$$\psi(t) = C_\downarrow |\downarrow\rangle + C_\uparrow |\uparrow\rangle + C_e |e\rangle, \quad (3.15)$$

和相互作用哈密顿量一起, 代入薛定谔方程, 可以得到三能级系统关于概率幅的微分方程

$$\begin{aligned}
 \dot{C}_\downarrow = & -i \frac{g_{13}}{2} e^{i(k_1 z + \phi_1)} e^{-i\Delta t} C_e, \\
 \dot{C}_\uparrow = & -i \frac{g_{23}}{2} e^{i(k_2 z + \phi_2)} e^{-i(\Delta - \delta)t} C_e, \\
 \dot{C}_e = & -i \frac{g_{13}^*}{2} e^{-i(k_1 z + \phi_1)} e^{+i\Delta t} C_\downarrow, \\
 & -i \frac{g_{23}^*}{2} e^{-i(k_2 z + \phi_2)} e^{+i(\Delta - \delta)t} C_\uparrow,
 \end{aligned} \quad (3.16)$$

对上述关于 $\dot{C}_e$ 的微分方程两边积分, 利用分部积分的方法, 可以得到

$$\begin{aligned}
 C_e = & -i \frac{g_{13}^*}{2} e^{-i(k_1 z + \phi_1)} \left(\frac{C_\downarrow}{i\Delta} e^{i\Delta t} - \frac{1}{i\Delta} \left[\frac{\dot{C}_\downarrow}{i\Delta} e^{i\Delta t} - \int \frac{\ddot{C}_\downarrow}{i\Delta} e^{i\Delta t} dt \right] \right) \\
 & -i \frac{g_{23}^*}{2} e^{-i(k_2 z + \phi_2)} \left(\frac{C_\uparrow}{i(\Delta - \delta)} e^{i(\Delta - \delta)t} - \frac{1}{i\Delta} \right) \\
 & -i \frac{g_{23}^*}{2} e^{-i(k_2 z + \phi_2)} \left(-\frac{1}{i(\Delta - \delta)} \left[\frac{\dot{C}_\uparrow}{i(\Delta - \delta)} e^{i(\Delta - \delta)t} - \int \frac{\ddot{C}_\uparrow}{i(\Delta - \delta)} e^{i(\Delta - \delta)t} dt \right] \right),
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

考虑到 $g \ll \Delta \approx 33 \text{ THz}$, 并且 $C_\downarrow$ 以及 $C_\uparrow$ 变化也比较缓慢, 所以我们可以舍去含有 $\frac{g}{\Delta^2}$ 以及 $\frac{g}{(\Delta - \delta)^2}$ 的项, 可以得到

$$\begin{aligned}
 C_e = & -i \frac{g_{13}^*}{2\Delta} e^{-i(k_1 z + \phi_1)} e^{i\Delta t} C_\downarrow \\
 & -i \frac{g_{23}^*}{2\Delta} e^{-i(k_2 z + \phi_2)} e^{i(\Delta - \delta)t} C_\uparrow
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

如果内态的初态被制备为 $\psi(t) = |\downarrow\rangle$, 即 $C_\downarrow(t=0) = 1$, $C_\uparrow(t=0) = C_e(t=0) = 0$, 那么在接下来的演化中, 电子布居在激发态 $|e\rangle$ 上的最大的概率为 $(g_{13}/2\Delta)^2$, 记激发态能级的自然线宽为 Γ , 则最大的自发辐射出光子的速率为 $g_{13}^2 \Gamma / 4\Delta^2$ 。将

上式中代入到公式3.16中,可以得到

$$\begin{aligned}\dot{C}_{\downarrow} &= i \frac{|g_{13}|^2}{4\Delta} C_{\downarrow} + i \frac{g_{23}^* g_{13}}{4(\Delta - \delta)} e^{i(\Delta k \cdot z + \Delta \phi)} e^{-i\delta t} C_{\uparrow}, \\ \dot{C}_{\uparrow} &= i \frac{|g_{23}|^2}{4(\Delta - \delta)} C_{\uparrow} + i \frac{g_{23} g_{13}^*}{4\Delta} e^{-i(\Delta k \cdot z + \Delta \phi)} e^{i\delta t} C_{\downarrow},\end{aligned}\quad (3.19)$$

其中, $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta \phi = \phi_1 - \phi_2$ 。到这里,我们可以由概率幅的微分方程,给出对应同样演化的哈密顿量

$$\begin{aligned}H_I &= -\hbar \frac{|g_{13}|^2}{4\Delta} |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \\ &\quad - \hbar \frac{|g_{23}|^2}{4(\Delta - \delta)} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \\ &\quad - \hbar \frac{g_{23}^* g_{13}}{4(\Delta - \delta)} e^{i(\Delta k \cdot z + \Delta \phi)} e^{-i\delta t} |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \\ &\quad - \hbar \frac{g_{23} g_{13}^*}{4\Delta} e^{-i(\Delta k \cdot z + \Delta \phi)} e^{i\delta t} |\uparrow\rangle\langle\downarrow|,\end{aligned}\quad (3.20)$$

哈密顿量的前两项,是由光场引起的 AC Stark 位移,在利用 355nm 脉冲激光进行的受激拉曼跃迁中,由此引起的频率移动约为拉比频率的 1.88×10^{-4} ,可以忽略不计 [10]。把这两项写到自由哈密顿量里面,可以看到,二能级的能量发生变化。由于 $\delta \ll \Delta$ 所以, $\Delta - \delta \approx \Delta$ 。所以,得到化简后的哈密顿量如下

$$\begin{aligned}H_I &= \hbar \Omega e^{i(\Delta k \cdot z + \Delta \phi)} e^{-i\delta t} |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \\ &\quad \hbar \Omega^* e^{-i(\Delta k \cdot z + \Delta \phi)} e^{i\delta t} |\uparrow\rangle\langle\downarrow|,\end{aligned}\quad (3.21)$$

可以看到,这个哈密顿量形式上和前一节耦合自旋和运动的哈密顿量是一致的。不同之处在于,在这里 $\Omega = \frac{g_{23}^* g_{13}}{4\Delta}$,并且用 Δk 和 $\Delta \phi$ 替换了 k 和 ϕ 。

3.3 脉冲激光控制

脉冲激光在量子比特相干控制方面具有连续波激光不可比拟的优点。当脉冲足够弱时,拉比频率 Ω 远小于阱频 ω_{trap} ,可以实现边带跃迁或者离子-离子纠缠,并且与连续波激光的工作原理基本相同。

近十年来,射频梳由于具有宽谱线间隔的脉冲重复率稳定,这使得它可以作为远距离频率之间的精确连接。因此,锁模激光器的频率梳已经成为光学频率计量领域必不可少的工具 [11-15]。在精密测量中,该特性用作标尺,梳状线之间的间隔用作刻度。在相干控制中,该特性可用于以可控的方式直接链接较大的能级间频率。该技术已被有效地用于控制多种量子系统,包括多能级原子 [16-18]、分子 [19, 20] 和离子 [10, 21-23] 等。因此,锁模激光器作为一种量子比特处理工

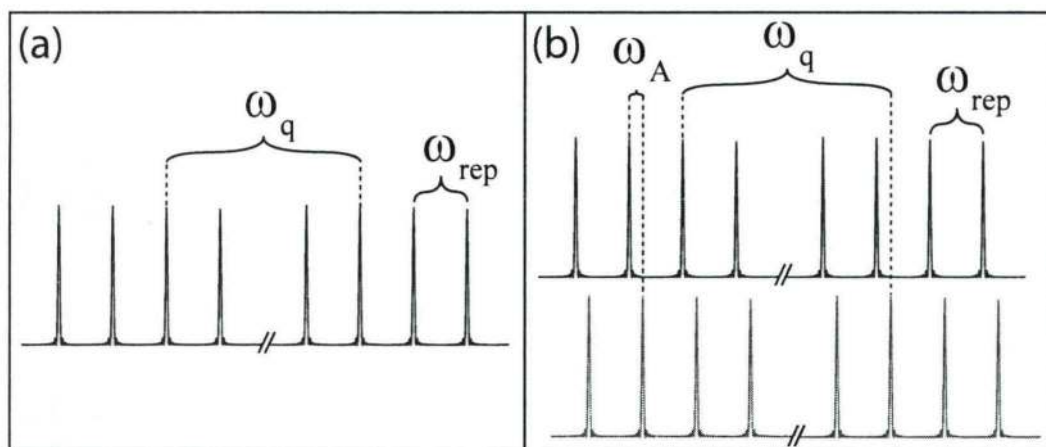


图 3.2 射频梳与比特跃迁频率 [24]

具在许多不同的量子计算中有着光明的前景。

从技术角度来看,频率梳固有的大带宽消除了驱动拉曼跃迁所需要的一些复杂性和开销。对于离子中的超精细量子比特,比特频率通常都达到好几个 GHz。要想用连续波光驱动这样的能级跃迁,需要两台独立的锁相激光器或一个高频 EOM。相比之下,一台锁模激光器可以直接驱动跃迁而不需要任何高频频移。此外,不需要稳定载波包络相位甚至锁模激光器的重复频率,这使得使用商用工业激光器来完成受激拉曼跃迁成为可能。

关于脉冲激光和离子相互作用,在弱脉冲情况下,在频域中分析更便于理解。具有固定相位关系的等时间间隔的脉冲的傅里叶变换是频率梳,对应的梳齿间隔为脉冲的重复频率 ω_{rep} 。对于理想的锁模激光,一个有 N 个脉冲的脉冲序列,其单个梳齿的宽度是 ω_{rep}/N 。如果单个梳齿的宽度远小于梳齿间隔(即 $N \gg 1$),那么频率梳可以看做是连续激光的集合。所以,最重要就是要使得频率梳频谱包含与量子比特频率 ω_{hf} 共振的光拍频。

如图3.2(a)所示,在同一个频率梳中,如果存在梳齿之间的频率差等于比特频率,即满足 $\omega_{hf} = n\omega_{rep}, n \in \mathbb{Z}$,那么单个频率梳可以驱动拉曼跃迁。这样的拉曼跃迁在调试的时候非常有用,能帮助我们更好的调节光路。但是,在实际的实验中,要满足上述方程并不容易。并且,由于是同一个频率梳之间的梳齿引起的跃迁,所以这组拉曼光必然具有相同的偏振,以及相同的传播方向, $\Delta k = 0$,不能耦合运动态,不能产生自旋依赖力 (spin-dependent forces)。

为了避免上述困难,如图3.2(b)所示,通过使用 AOM 我们可以很容易的产生两个频率梳,两个频率梳之间的频率差等于 ω_A ,当满足 $\omega_{hf} = n\omega_{rep} \pm \omega_A, n \in \mathbb{Z}$,两个频率梳可以驱动拉曼跃迁。需要注意的是,由于拉曼跃迁是由两个频率梳驱动的,所以其对应的两列锁模激光脉冲应该同时到达离子所在的位置。同时,为

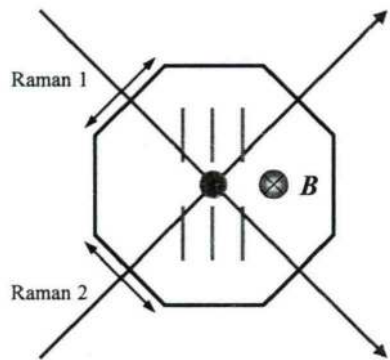


图 3.3 拉曼光传播方向与磁场方向

了驱动运动态，这两列光不能同向传播，在我们的实验中，两列光的传播方向与磁场方向相互垂直，如图3.3所示。

值得注意的是，由于比特跃迁是由梳齿之间的频率差决定的，而不是由绝对的光学频率决定，所以我们不需要稳定载波频率及相位。所以，在这里我们主要讨论如何稳定梳齿之间的频率差。一般来说，锁模激光器的重复频率 ω_{rep} 在短时间内具有非常好的稳定性。然而，在时间比较长的情况下，由于受到温度变化等的影响，锁模激光器的内腔会有所变化，所以重复频率 ω_{rep} 会有漂移。

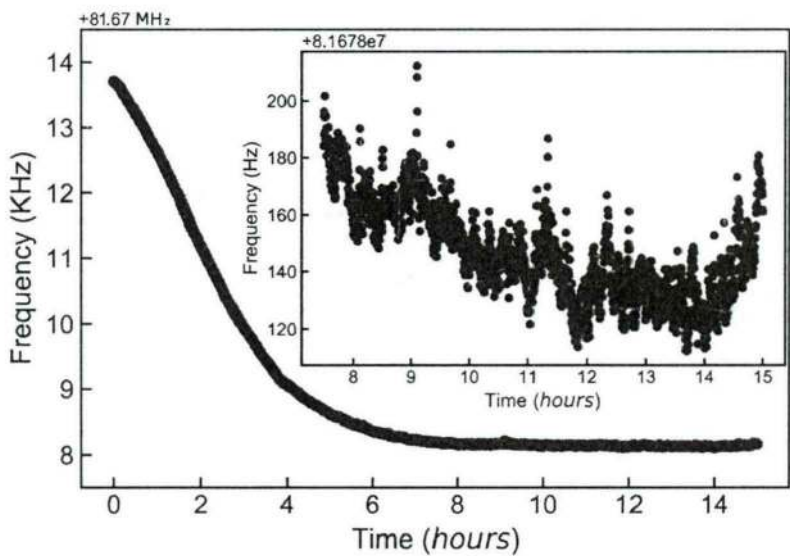


图 3.4 重复频率 ω_{rep} 随时间变化

如图3.4所示,在锁模激光器开机之后的前七八个小时,尽管激光器本身可以锁模稳定输出皮秒脉冲激光,但是重复频率 ω_{rep} 有非常明显的漂移,大约 1.2 KHz 每小时。此后,虽然重复频率 ω_{rep} 没有明显的长漂,但是也不太稳定。

为了消除重复频率 ω_{rep} 变化带来的不良影响,常用的方法有两种。第一种方法是在锁模激光器的内腔安装压电陶瓷端镜,通过主动锁定锁模激光器的内腔,来达到消除重复频率 ω_{rep} 漂移。第二种方法则是采用补偿的方法,通过前馈控制,稳定两组梳齿之间的频率差。第一种方法其实更为通用,但是需要改装激光器。而第二种方法虽然不是通用的方法,但是可以很好地满足我们实验的需求,并且不需要改装激光器,所以在我们的实验中,我们选择了使用第二种方法。

如图3.5所示,是使用 AOM 来实现前馈控制的原理图。两个 AOM 取相反的衍射阶次。共振情况下满足:

$$\omega_{hf} = n\omega_{rep} + \omega_{A1} + \omega_{A2}, n \in \mathbb{Z}, \quad (3.22)$$

这里, $\omega_{hf} \approx 12.642$ GHz 为比特频率, $n = 150$ 为所选择的梳齿的阶数, $\omega_{rep} \approx 81.675$ MHz 为射频梳的重复频率并且随时间变化, $\omega_{A1} \approx 199$ MHz 为压控振荡器 (VCO) 的输出频率, $\omega_{A2} = 192$ MHz 为任意波形发生器的频率。首先,我们使用快速探头*获得射频梳,射频梳依次经过带通滤波器和微波放大器,然后和一个频率设置为 12.450 GHz 的微波源†混频得到差频。

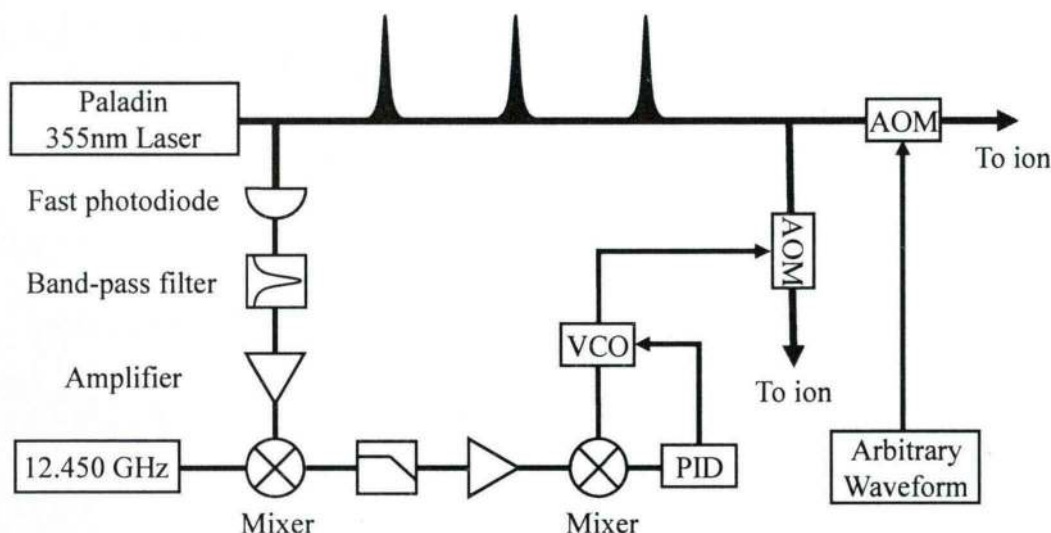


图 3.5 稳定拍频频率的前馈环路

*Alphas UPD-30-VSG-P

†Rohde & Schwarz SMB-B120

然后，这个差频信号经过放大后，与 VCO 混频，输出信号接到 PID 伺服器*，并顺馈到 VCO 的压控端。然后，VCO 的信号经过放大后用来驱动 AOM，两套梳齿之间的拍频 $150\omega_{rep} + \omega_{A1} = 12.450 \text{ GHz}$ 就稳定了。

3.4 可分辨边带冷却

运动自由度是最能显示囚禁离子系统特色的一个自由度，而要想利用好运动自由度，首先就要把离子冷却到运动基态，现在已经有了大量关于基态冷却的报道 [25–45]。

如果一个量子态的有效线宽 γ 小于声子频率 ω_z ，那么这个独立的运动边带就是可以分辨的。这样，如果把激光调节到一阶红边带，在没有其他的加热机制的情况下，那么离子将会被冷却到基态。为了实现这样的可分辨的边带冷却 (Resolved sideband cooling)，四极跃迁和拉曼跃迁是最好的选择。

在这里，我们考虑单个囚禁在一维谐振势阱中的原子离子，其声子频率是 ω_z ，我们寻找一组光跃迁，对应的有效线宽 γ_{eff} 非常的窄，满足 $\gamma_{eff} \ll \omega_z$ 。假设激光频率为 ω 沿着离子运动方向传播。如果我们改变激光频率，我们会发现离子的吸收光谱会包括，频率为 ω_0 的载波，以及一些被调制的边带，这些边带的频率为 $\omega_0 + (n - m)\omega_z$ 。吸收谱中的这些边带，是由于多普勒效应产生的。如图 3.6 所示，是我们实验中用拉曼跃迁测得的拉曼边带谱，横坐标对应的是 AOM 的频率，固定跃迁时间为 $10 \mu s$ ，纵坐标为探测到电子处于 $|1\rangle$ 态的概率。

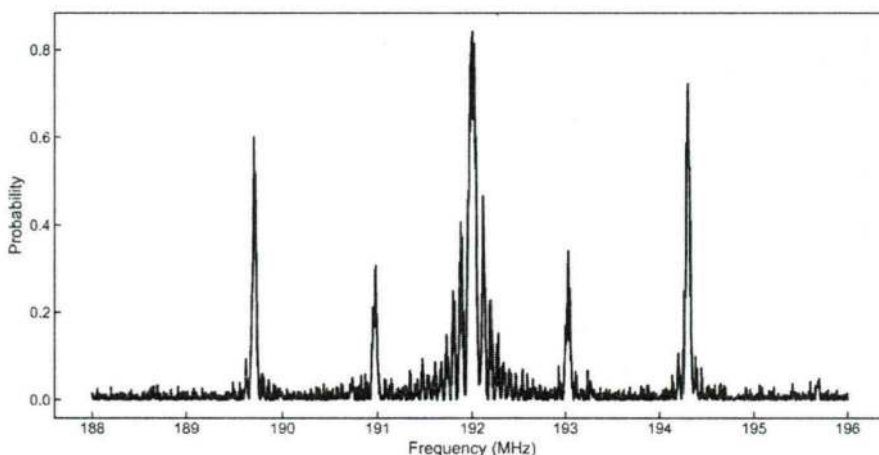


图 3.6 单离子拉曼谱

*New Focus LB1005

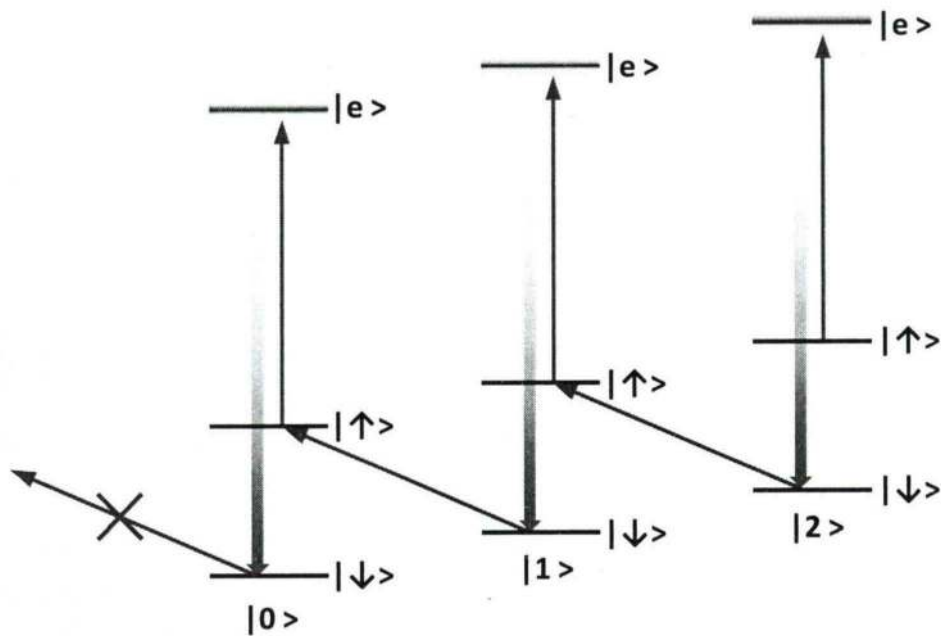


图 3.7 边带冷却跃迁

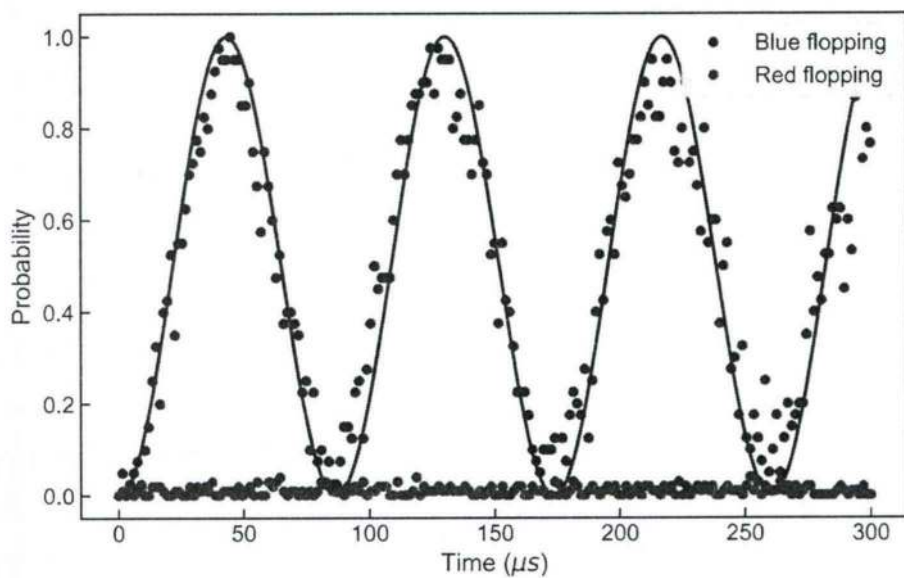


图 3.8 基态边带震荡

当激光的频率被调节为与红边带共振时, 也就是 $\omega = \omega_0 - \omega_z$ 。在这种情况下, 每吸收一个光子获得能量为 $\hbar(\omega_0 - \omega_z)$, 自发辐射放出一个光子能量为 $\hbar\omega_0 - R$, 这里 $R \equiv (\hbar k)^2/2m = \hbar\omega_R$ 是离子的单光子反冲的能量。所以, 如果 $\omega_z \gg \omega_R$, 那么每经历一次吸收光子释放光子的过程, 离子的能量就会减少 $\hbar\omega_z$ 。由于 $\omega_R/\omega_z = \eta^2$, 所以这也就要求拉姆迪克系数 η 比较小。边带冷却的过程会一直持续下去, 直到平均声子数 $\bar{n} \approx (\gamma_{eff}/2\omega_z) \ll 1$ 。在我们的实验中, 我们使用双光子受激拉曼跃迁来实现边带冷却 [3, 46], 基本的原理, 和上面描述的是一样的。如图3.7所示为边带冷却所需主要跃迁。

步骤如下: (a) 在实验开始的时候, 我们先进行多普勒冷却持续 1 ms, (b) 接着使用标准的光泵浦方法把自旋态制备到 $|\downarrow\rangle$ 。(c) 利用受激拉曼跃迁驱动一阶红边带跃迁 $|\downarrow\rangle|n\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle|n-1\rangle$, 运动能量减少一个 $\hbar\omega_z$ 。然后, 重复上述步骤 (b) 和 (c), 直到把离子的态制备到 $|\downarrow\rangle|0\rangle$ 。然而, 由于离子的初始运动态是热态, 并且一个红边带的拉比频率为 $\Omega_{n,n-1} = \Omega\sqrt{n}\eta$ 与 n 相关, 所以上述的过程, 效率并不是 100% 的。尽管如此, 我们依然可以通过调节每次循环的持续时间, 以非常高的保真度, 把量子态制备到 $|\downarrow\rangle|0\rangle$ 。在完成边带冷却之后, 我们测量了红边带震荡和蓝边带震荡, 如图3.8所示。

到这里, 单离子的一维基态冷却, 就完成了。而对于多 (N) 离子的多 (3) 维的情况, 其实也是一样的方法。首先我们还是需要把所有的拉曼边带谱扫出来, 然后依次把拉曼光的频率设置为各个模式一阶红边带, 然后实施上面所说的步骤 (b) 和 (c), 重复上述过程即可。

3.5 运动态分布分析

回顾前面关于自旋态与运动态耦合的章节, 一阶红边带跃迁 $|n\rangle|\downarrow\rangle \leftrightarrow |n-1\rangle|\uparrow\rangle$, 对应的拉比频率为 $\Omega_{n,n-1} = \Omega\sqrt{n}\eta$, 一阶蓝边带跃迁 $|n\rangle|\downarrow\rangle \leftrightarrow |n+1\rangle|\uparrow\rangle$, 对应的拉比频率为 $\Omega_{n,n+1} = \Omega\sqrt{n+1}\eta$ 。拉比频率与声子数相关为确定运动态的分布提供了一种有效工具。这种方法只需要测量蓝边带震荡或者红边带震荡即可 [6, 47]。

首先, 我们把自旋态制备到 $|\downarrow\rangle|n\rangle$, 打开拉曼光做拉比振荡, 测量 $|\uparrow\rangle$ 态的概率。对于单离子来说, $|\uparrow\rangle$ 态的概率为

$$P_{\uparrow}(t) = \sin^2(\Omega_{m,n} \cdot t), \quad (3.23)$$

然而, 一般来说离子的运动态不会是一个纯 Fock 态, 而是服从某些分布, 在这里我们假设 $|n\rangle$ 的概率为 P_n 。由于离子的运动是谐振运动, 不同谐振能级之间跃迁频率一致, 所以对于一个特定的边带跃迁, 所有的 Fock 都会被驱动, 不同

之处在于拉比频率不一样。这样，我们在计算的时候需要考虑所有的跃迁，并按照 Fock 态对应的概率加权，可以得到

$$P_{\uparrow}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sin^2(\Omega_{m,n} \cdot t), \quad (3.24)$$

考虑最简单的情况，也是我们实验中经常遇到的情况，拉曼光驱动的跃迁是一阶蓝边带跃迁，或者是一阶红边带跃迁，则对应的概率随时间震荡为

$$P_{\uparrow}^{Blue \text{ Sideband}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sin^2(\Omega_{n+1,n} \cdot t), \quad (3.25)$$

$$P_{\uparrow}^{Red \text{ Sideband}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin^2(\Omega_{n-1,n} \cdot t), \quad (3.26)$$

在实验中，我们只需要驱动边带跃迁，测出概率震荡曲线，结合我们可以通过实验测出的 Ω ，就可以很简单的估计出声子态分布。这个在运动态实验中应用十分广泛，几乎是所有声子测量的基础。

3.6 离子加热速率的测量

在边带冷却之后，我们需要测量平均声子数，以确定冷却的效果。同时，我们还需要测量在边带冷却之后，声子加热的速率。

一般来说，上一节中给出的方程 (3.25) 和 (3.26) 完全可以用来估计确定时刻的声子态分布，自然也就可以确定平均声子数，但是这个方法却不够方便快捷，特别是当平均声子数比较小的时候。这里，考虑到待测的声子态呈热态分布，我们将给出最简单有效的测量这种情况的方法。

记平均声子数为 $\bar{n}$ ，由于多普勒冷却以及边带冷却之后，声子数分布服从热态分布，所以有

$$P_n^{thermal} = \frac{(\bar{n})^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}}, \quad (3.27)$$

我们将式 (3.27) 代入方程 (3.25) 和 (3.26) 中，然后两式相除，可以得到

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{P_{\uparrow}^{Red\ Sideband}(\tau)}{P_{\uparrow}^{Blue\ Sideband}(\tau)} \\
 &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin^2(\Omega_{n-1,n} \cdot \tau)}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n \sin^2(\Omega_{n+1,n} \cdot \tau)} \\
 &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} \sin^2(\Omega_{n,n+1} \cdot \tau)}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n \sin^2(\Omega_{n+1,n} \cdot \tau)} \\
 &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^{n+1}}{(\bar{n}+1)^{n+2}} \sin^2(\Omega_{n,n+1} \cdot \tau)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^n}{(\bar{n}+1)^{n+1}} \sin^2(\Omega_{n+1,n} \cdot \tau)} \\
 &= \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1},
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

由上式，我们可以得到

$$\bar{n} = \frac{R}{R + 1}, \tag{3.29}$$

这样，我们只需要测量出 R ，即可知道平均声子数 $\bar{n}$ 。如图 3.9 所示，是我们采用上述方法，测量得到的离子声子数随时间自由演化变化曲线。在曲线中我们可以知道加热速率约为 0.015 phonons/ms。

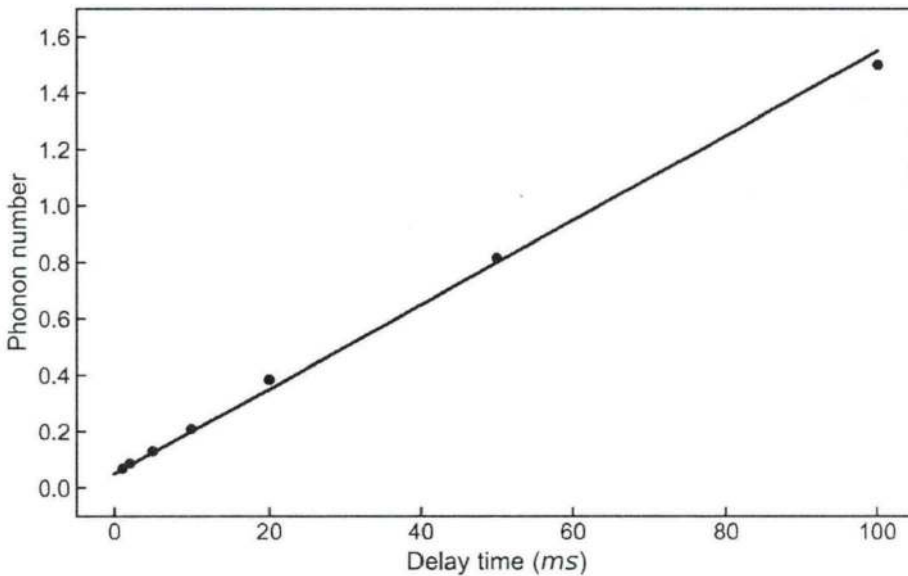


图 3.9 运动态热率

3.7 运动态的相干态制备

相干态的概念最先是薛定谔引入的 [48]。相干态波包拥有最小的不确定度, 在满足量子力学的条件下最接近经典场 [49]。1963 年 Glauber 将相干态引入到量子电动力学中, 并且提出完全量子化的电磁场理论 [50, 51], 相干态从此受到广泛的关注, 而 Glauber 本人也因此获得 2005 年的诺贝尔物理学奖。在本小节中, 我们将演示, 将离子的运动态制备到相干态, 并且估计出 Fock 态的分布。

离子运动态的相干态, 其实就是离子的基态波包震荡在势阱中的位移。相干态的 Fock 态分布服从泊松分布, $P_n = (\bar{n}^n e^{-\bar{n}})/n!$ 。想要产生离子运动的相干态, 有很多种可行的办法, 例如由空间均匀的经典驱动场、一对驻波场或者是势阱中心的非绝热位移 [52–56] 等。

这里, 我们考虑一个力 $F(t) = F \sin[(\omega_z - \delta)t + \phi]$ 作用在离子上, 文献 [4] 给出相互作用哈密顿量为

$$H_I = \frac{z_0 F^* e^{i\phi}}{2} a e^{-i\delta t} + \frac{z_0 F e^{i\phi}}{2} a^\dagger e^{i\delta t}, \quad (3.30)$$

对应的演化算符为

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp(\alpha(t)a^\dagger + \alpha^*(t)a) \\ &= D(\alpha(t)), \end{aligned} \quad (3.31)$$

这里, $D(\alpha(t))$ 为平移算符, 作用到 Fock 态 $|0\rangle$ 上面可以得到相干态, $D(\alpha(t))|0\rangle = |\alpha(t)\rangle$ 。 $\alpha(t) = \frac{z_0 F e^{i\phi}}{2\hbar\delta}(1 - e^{i\delta t})$ 。

在实验实施上, 我们考虑一种比较容易实现的情况, 同时施加一阶红边带和一阶蓝边带的相互作用, 其哈密顿量只需要简单的相加即可

$$\begin{aligned} H_I &= \frac{1}{2}\hbar\eta\Omega(a\sigma_+ e^{-i\delta t} e^{i\phi_r} + a^\dagger\sigma_- e^{i\delta t} e^{-i\phi_r}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\hbar\eta\Omega(a^\dagger\sigma_+ e^{i\delta t} e^{i\phi_b} + a\sigma_- e^{-i\delta t} e^{-i\phi_b}), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$H_I = \frac{1}{2}\hbar\eta\Omega(ae^{-i\delta t} e^{-i\phi_M} + a^\dagger e^{i\delta t} e^{i\phi_M}) \cdot (\sigma_- e^{i\phi_S} + \sigma_+ e^{-i\phi_S}), \quad (3.33)$$

其中, δ 是一阶边带失谐, 且红边带红失谐蓝边带蓝失谐; 而 ϕ_r 和 ϕ_b 分别表示驱动红边带和蓝边带的光场的相位。其实, 重新排列上式各项, 我们可以轻易地得到其中, $\phi_S = -(\phi_b + \phi_r)/2$ 是和自旋有关的相位, 而 $\phi_M = -(\phi_b - \phi_r)/2$ 则是和运动有关的相位。对比方程 (3.30) 和方程 (3.33), 我们轻易的看出来, 在不考虑自旋态的时候, 这两个方程形式上是一样的。所以, 我们可以用这样的方法来产生力, 进而制备出相干态。

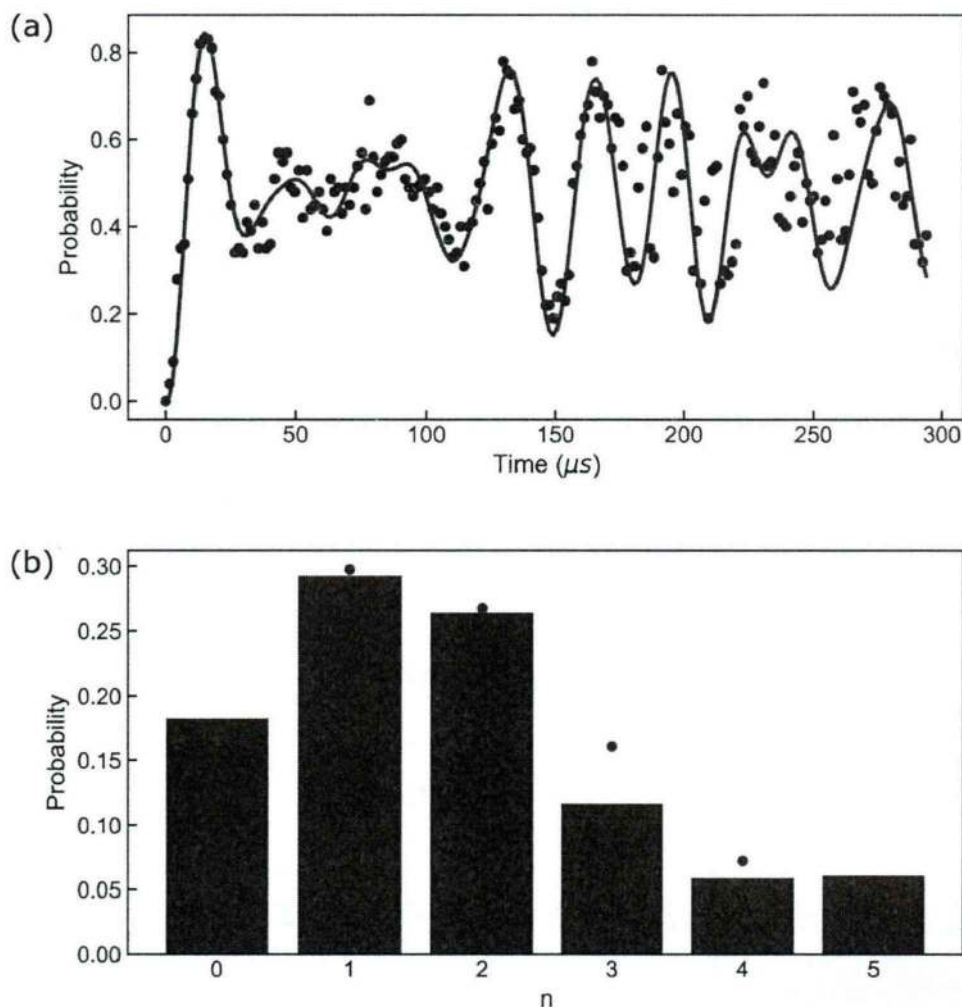


图 3.10 相干态声子数分布

我们在制备了运动态的相干态之后,进行了蓝边带振荡操作, $P_{\uparrow}^{bsb}$ 如图3.10(a)所示。可以看到在刚刚开始的时候有明显震荡,随后震荡消失,最后又出现震荡。在图中,蓝色的点是实验数据,红色的曲线是根据泊松分布拟合的, $\bar{n} = 1.8$ 。而3.10(b)所示,则是对应的 Fock 态概率分布,蓝色的直方图由方程 (3.25)估算各个 Fock 态概率得到,红色的点由泊松分布给出。

在进行实验之前,还有一些准备工作。我们需要主动稳定拉曼激光的功率 [57]、指向,还需要做好气流屏蔽,减少气流扰动对拉曼光相位的影响 [10]。同时,还需要精细的调节电极电压以减少微运动带来的影响 [58],以及主动稳定囚禁势阱深度以保持声子频率不变 [59]。

3.8 小结

在本章中，我们系统地介绍了有关离子外部运动态操作。首先，我们以单模光场为例子，阐明了利用光场耦合离子内部的自旋态和外部的运动态，给出了最常用的一阶红边带跃迁和一阶蓝边带跃迁对应的条件以及相应的哈密顿量。然后，讨论了双光子受激拉曼跃迁，利用绝热消除使得激发态概率趋近零，给出双光子受激拉曼跃迁与离子耦合的哈密顿量，并证明了该哈密顿量在形式上与前面讨论的单模光场是一致的。接着，我们选择了利用锁模激光器来实现受激拉曼跃迁，并且通过前馈环路，很好的锁定了两路光之间的频率差，为后面的实验操作运动态打下了坚实的基础。随后，我们实现了单离子的边带冷却，实现了单离子运动基态的制备，并且测量了系统的加热速率。最后我们成功的把运动态制备成了相干态的形式。

参考文献

- [1] Cirac J, Parkins A, Blatt R, et al. Nonclassical states of motion in ion traps. *Proceedings of Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*. Elsevier, 1996: 237–296.
- [2] Wineland D J, Monroe C, Itano W M, et al. Experimental issues in coherent quantum-state manipulation of trapped atomic ions. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 1998, 103(3):259.
- [3] Monroe C, Meekhof D, King B, et al. Resolved-sideband Raman cooling of a bound atom to the 3D zero-point energy. *Physical Review Letters*, 1995, 75(22):4011.
- [4] Leibfried D, Blatt R, Monroe C, et al. Quantum dynamics of single trapped ions. *Reviews of Modern Physics*, 2003, 75(1):281.
- [5] Cirac J I, Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions. *Physical review letters*, 1995, 74(20):4091.
- [6] Monroe C, Meekhof D, King B, et al. Demonstration of a fundamental quantum logic gate. *Physical review letters*, 1995, 75(25):4714.
- [7] Kielpinski D, King B, Myatt C, et al. Sympathetic cooling of trapped ions for quantum logic. *Physical Review A*, 2000, 61(3):032310.
- [8] Debnath S, Linke N M, Figgatt C, et al. Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits. *Nature*, 2016, 536(7614):63.
- [9] Flühmann C, Nguyen T L, Marinelli M, et al. Encoding a qubit in a trapped-ion mechanical oscillator. *Nature*, 2019, 566(7745):513.
- [10] Mizrahi J A. Ultrafast control of spin and motion in trapped ions[D]. 2013.
- [11] Udem T, Holzwarth R, Hänsch T W. Optical frequency metrology. *Nature*, 2002, 416(6877):233.
- [12] Hall J L. Nobel Lecture: Defining and measuring optical frequencies. *Reviews of Modern Physics*, 2006, 78(4):1279.
- [13] Diddams S A, Hollberg L, Mbele V. Molecular fingerprinting with the resolved modes of a femtosecond laser frequency comb. *Nature*, 2007, 445(7128):627.
- [14] Adler F, Cossel K C, Thorpe M J, et al. Phase-stabilized, 1.5 W frequency comb at 2.8–4.8 μm . *Optics letters*, 2009, 34(9):1330–1332.
- [15] Diddams S A. The evolving optical frequency comb. *JOSA B*, 2010, 27(11):B51–B62.
- [16] Stowe M C, Cruz F C, Marian A, et al. High resolution atomic coherent control via spectral phase manipulation of an optical frequency comb. *Physical review letters*, 2006, 96(15):153001.
- [17] Stowe M C, Peier A, Ye J. Control of four-level quantum coherence via discrete spectral shaping of an optical frequency comb. *Physical review letters*, 2008, 100(20):203001.

- [18] Jayich A M, Long X, Campbell W. Direct frequency comb laser cooling and trapping. *Physical Review X*, 2016, 6(4):041004.
- [19] Shi W, Malinovskaya S. Implementation of a single femtosecond optical frequency comb for rovibrational cooling. *Physical Review A*, 2010, 82(1):013407.
- [20] Spaun B, Changala P B, Patterson D, et al. Continuous probing of cold complex molecules with infrared frequency comb spectroscopy. *Nature*, 2016, 533(7604):517.
- [21] Hayes D, Matsukevich D N, Maunz P, et al. Entanglement of atomic qubits using an optical frequency comb. *Physical review letters*, 2010, 104(14):140501.
- [22] Wong-Campos J, Moses S, Johnson K, et al. Demonstration of two-atom entanglement with ultrafast optical pulses. *Physical review letters*, 2017, 119(23):230501.
- [23] Johnson K, Wong-Campos J, Neyenhuis B, et al. Ultrafast creation of large Schrödinger cat states of an atom. *Nature communications*, 2017, 8(1):697.
- [24] Mizrahi J, Neyenhuis B, Johnson K, et al. Quantum control of qubits and atomic motion using ultrafast laser pulses. *Applied Physics B*, 2014, 114(1-2):45–61.
- [25] Diedrich F, Bergquist J, Itano W M, et al. Laser cooling to the zero-point energy of motion. *Physical Review Letters*, 1989, 62(4):403.
- [26] Marzoli I, Cirac J, Blatt R, et al. Laser cooling of trapped three-level ions: Designing two-level systems for sideband cooling. *Physical Review A*, 1994, 49(4):2771.
- [27] Morigi G, Eschner J, Keitel C H. Ground state laser cooling using electromagnetically induced transparency. *Physical review letters*, 2000, 85(21):4458.
- [28] Li X, Corcovilos T A, Wang Y, et al. 3D projection sideband cooling. *Physical review letters*, 2012, 108(10):103001.
- [29] Clark J B, Lecocq F, Simmonds R W, et al. Sideband cooling beyond the quantum backaction limit with squeezed light. *Nature*, 2017, 541(7636):191.
- [30] Morigi G, Eschner J, Cirac J, et al. Laser cooling of two trapped ions: Sideband cooling beyond the Lamb-Dicke limit. *Physical Review A*, 1999, 59(5):3797.
- [31] Eschner J, Morigi G, Schmidt-Kaler F, et al. Laser cooling of trapped ions. *JOSA B*, 2003, 20(5):1003–1015.
- [32] Goodwin J F, Stutter G, Thompson R C, et al. Resolved-sideband laser cooling in a penning trap. *Physical review letters*, 2016, 116(14):143002.
- [33] Triana J F, Estrada A F, Pachón L A. Ultrafast optimal sideband cooling under non-Markovian evolution. *Physical review letters*, 2016, 116(18):183602.
- [34] Machnes S, Plenio M B, Reznik B, et al. Superfast laser cooling. *Physical review letters*, 2010, 104(18):183001.

- [35] Rossi M, Kralj N, Zippilli S, et al. Enhancing sideband cooling by feedback-controlled light. *Physical review letters*, 2017, 119(12):123603.
- [36] Bushev P, Rotter D, Wilson A, et al. Feedback cooling of a single trapped ion. *Physical review letters*, 2006, 96(4):043003.
- [37] Schwedes C, Becker T, Zanthier J, et al. Laser sideband cooling with positive detuning. *Physical Review A*, 2004, 69(5):053412.
- [38] Cirac J, Parkins A, Blatt R, et al. Cooling of a trapped ion coupled strongly to a quantized cavity mode. *Optics communications*, 1993, 97(5-6):353–359.
- [39] Blockley C, Walls D. Cooling of a trapped ion in the strong-sideband regime. *Physical Review A*, 1993, 47(3):2115.
- [40] Webster S. Raman sideband cooling and coherent manipulation of trapped ions[D]. University of Oxford, 2005.
- [41] Cirac J I, Blatt R, Zoller P, et al. Laser cooling of trapped ions in a standing wave. *Physical Review A*, 1992, 46(5):2668.
- [42] Lechner R, Maier C, Hempel C, et al. Electromagnetically-induced-transparency ground-state cooling of long ion strings. *Physical Review A*, 2016, 93(5):053401.
- [43] Roos C, Leibfried D, Mundt A, et al. Experimental demonstration of ground state laser cooling with electromagnetically induced transparency. *Physical review letters*, 2000, 85(26):5547.
- [44] King B, Wood C, Myatt C, et al. Cooling the collective motion of trapped ions to initialize a quantum register. *Physical Review Letters*, 1998, 81(7):1525.
- [45] Deslauriers L, Haljan P, Lee P, et al. Zero-point cooling and low heating of trapped Cd^{+} 111 ions. *Physical Review A*, 2004, 70(4):043408.
- [46] Appasamy B, Siemers I, Stalgies Y, et al. Quantized infrared-optical triple resonance on a single cold Barium ion. *Applied Physics B*, 1995, 60(5):473–477.
- [47] Turchette Q, King B, Leibfried D, et al. Heating of trapped ions from the quantum ground state. *Physical Review A*, 2000, 61(6):063418.
- [48] Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik. *Naturwissenschaften*, 1926, 14(28):664–666.
- [49] Scully M O, Zubairy M S. *Quantum optics*, 1999.
- [50] Glauber R J. The quantum theory of optical coherence. *Physical Review*, 1963, 130(6):2529.
- [51] Glauber R J. *Quantum theory of optical coherence: selected papers and lectures*. John Wiley & Sons, 2007.
- [52] Wineland D J, Bollinger J J, Itano W M, et al. Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy. *Physical Review A*, 1992, 46(11):R6797.

- [53] Cirac J, Parkins A, Blatt R, et al. "Dark"squeezed states of the motion of a trapped ion. *Physical review letters*, 1993, 70(5):556.
- [54] Meekhof D, Monroe C, King B, et al. Generation of nonclassical motional states of a trapped atom. *Physical Review Letters*, 1996, 76(11):1796.
- [55] Gerry C C. Generation of Schrödinger cats and entangled coherent states in the motion of a trapped ionby a dispersive interaction. *Physical Review A*, 1997, 55(3):2478.
- [56] Alonso J, Leupold F, Solèr Z, et al. Generation of large coherent states by bang–bang control of a trapped-ion oscillator. *Nature communications*, 2016, 7:11243.
- [57] Kim D I, Rhee H G, Song J B, et al. Laser output power stabilization for direct laser writing system by using an acousto-optic modulator. *Review of Scientific Instruments*, 2007, 78(10):103110.
- [58] Berkeland D, Miller J, Bergquist J C, et al. Minimization of ion micromotion in a Paul trap. *Journal of applied physics*, 1998, 83(10):5025–5033.
- [59] Johnson K, Wong-Campos J, Restelli A, et al. Active stabilization of ion trap radiofrequency potentials. *Review of Scientific Instruments*, 2016, 87(5):053110.

第四章 量子绝热性的实验验证

绝热近似的有效性条件是理解和预测量子力学的有效工具。值得注意的是,振荡量子系统中的共振现象对绝热定理提出了挑战。在这种情况下,定量绝热条件应用的不一致性导致了一系列新的绝热方法。在此,通过采用不同的策略,我们引入了一种不同的绝热近似验证机制,将量子系统放到到一个非惯性参照系。更具体地说,我们首先考虑几个相关的绝热近似条件,并证明了,通过引入合适的震荡的哈密顿量,这几个绝热近似条件都将失效。然后,在旋转非惯性坐标系中,我们证明了所有这些条件,包括标准绝热条件,能够正确地描述原坐标系中的绝热动力学,无论是远离谐振点还是在谐振点。我们还证明了该验证机制可以推广到一般的多粒子量子系统,建立了该验证机制在惯性或非惯性坐标系中描述绝热行为等价的条件。为了实验研究验证我们的方法,我们在离子阱系统中设计了合适的哈密顿量,并进行了实验。通过检测量子演化,明确了在非惯性坐标系中绝热条件的一致性。

4.1 绝热定理简介

绝热定理 [1–3] 是量子力学中许多应用的基本组成部分。在绝热动力学下,量子系统遵循一个足够缓慢变化的哈密顿量演化,这阻止了能量本征能级的变化。特别地,如果在 $t = 0$ 的时刻,系统被制备到哈密顿量 $H(t)$ 的本征态 $|E_n(0)\rangle$ 上,接下来系统将沿着相应的瞬时本征态 $|E_n(t)\rangle$ 演化。绝热的概念在很多的领域都扮演着十分重要的角色。例如分子能级交叉 [4, 5], 量子场论 [6], 几何相位 [7, 8], 量子计算 [9–13], 量子热力学 [14, 15], 等等。然而,尽管应用如此广泛,绝热定理定量条件的充分性和必要性都受到了挑战 [16]。特别是,对于振荡的哈密顿函数,由于能级之间的共振跃迁,在应用绝热定理时可能会出现不一致 [17, 18]。而这种不一致导致了对绝热定理的修正,产生了许多新的绝热条件 (ACs) 的方案,以及在更一般的情况下能量差距的界限 (see, e.g., Refs. [19–22])。

这方面,杜江峰等人最早进行实验研究。他们利用核磁共振 (NMR) 技术控制单个核自旋 $1/2$ 粒子,对这些方案行进了比较 [23]。在他们的实验中。结果表明,该方法既违背了传统绝热条件的充分性,又违背了其必要性,但通过其他一些广义绝热条件取得了部分成功。值得注意的是,对于单个量子比特 (qubit) 系统,这种可能的违背行为非常明显。更具体地说,文献 [23] 中分析的绝热条件

可以转换为绝热系数 $C_n(t)$ 的形式, 对于单比特来说, 可以写成如下形式:

$$C_1 = \max_{t \in [0, \tau]} \left| \frac{|\langle E_0(t) | \dot{H}(t) | E_1(t) \rangle|}{[E_0(t) - E_1(t)]^2} \right|, \quad (4.1a)$$

$$C_2 = \max_{t \in [0, \tau]} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\langle E_0(t) | \dot{H}(t) | E_1(t) \rangle}{[E_0(t) - E_1(t)]^2} \right) \right| \tau, \quad (4.1b)$$

$$C_3 = \max_{t \in [0, \tau]} \left| \frac{|d_{10}(t)|}{|E_1(t) - E_0(t) - \Delta_{10}(t)|} \right|, \quad (4.1c)$$

$$C_4 = \max_{t \in [0, \tau]} \left\{ \frac{\tau^2 \|\dot{H}(t)\|^3}{|E_0(t) - E_1(t)|^4}, \frac{\tau^2 \|\dot{H}(t)\| \cdot \|\ddot{H}(t)\|}{|E_0(t) - E_1(t)|^3} \right\}, \quad (4.1d)$$

其中 $|E_n(t)\rangle$ 是 $H(t)$ 的本征态, 而对应的本征能量是 $E_n(t)$, τ 是总的演化时间, $\Delta_{10}(t) = i\gamma_1(t) - i\gamma_0(t) + \frac{d}{dt} \arg[id_{10}(t)]$, $d_{10}(t) = \frac{\langle E_1(t) | \dot{H}(t) | E_0(t) \rangle}{E_0(t) - E_1(t)}$, 以及 $\gamma_n(t) = \langle E_n(t) | \dot{H}(t) | E_n(t) \rangle$, $\dot{}$ 符号表示时间导数以及 $\|\cdot\|$ 表示通常的操作符范数。绝热系数 C_1 是著名的标准 (传统) 绝热条件 [3, 18, 24], 而 C_2 、 C_3 和 C_4 则是分别由 Tong *et al* [20], Wu *et al* [21, 22] 以及 Ambainis-Regev [19] 等人给出。一般而言, 量子系统中的绝热过程满足 $C_n \ll 1$ 。在文献 [23] 中, 对于保证绝热过程来说, 绝热条件 C_1 是既不充分也不必要条件。然而, 绝热条件 C_2 、 C_3 以及 C_4 似乎成功地预测了在特定实验中观察到的共振现象, 尽管这些绝热条件的有效性在更一般的量子系统中是有争议的。

在这里, 我们没有寻找新的绝热条件的方案, 而是采用了不同的策略来分析条件如方程(4.1)所给出的绝热条件。更具体地说, 我们考虑系统在非惯性参照系中的动力学, 在那里有可能显示所有的绝热条件 (4.1), 包括标准绝热条件, 对薛定谔方程的精确解没有任何的违背。这种方法意味着验证机制已经适用于目前采用的绝热条件, 产生了一个分析绝热性的通用而简单的解决方案, 包括共振的情况。最后, 我们设计了一个哈密顿量, 这个哈密顿量会导致 (4.1) 中所有的绝热系数都不适用, 这意味着 (4.1) 中所有的绝热系数在我们所举的这个例子中都是既不充分也不必要条件的。然后, 通过应用我们的方法, 改变参考系, 上述的这些绝热条件都会变成充要条件。值得注意的是, 我们可以把我们的结果推广到一个一般的多体哈密顿量, 并且我们提供了在惯性和非惯性参考系绝热行为的等价的条件。

4.2 非惯性参考系中的绝热条件

让我们从考虑哈密顿量开始

$$H(t) = (\omega_0/2)\sigma_z + (\omega_T/2)\sin(\omega t)\sigma_x, \quad (4.2)$$

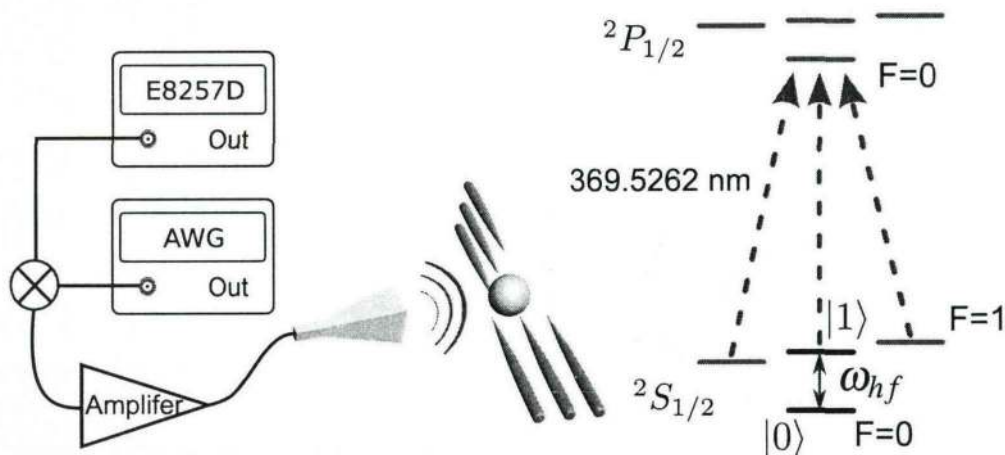


图 4.1 非惯性系绝热动力学验证的实验装置。囚禁在针尖电极的 Paul 阱中的单个 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子，其中的两个核自旋劈裂超精细能级可以用来编码量子比特。我们可以通过使用任意波形发生器来相干的调控量子比特。而 369.5nm 的光则可以用来实现态探测等。

在这里我们假设 $|\omega_0| \gg |\omega_T|$ 。 $H(t)$ 的本征态用 $|E_n(t)\rangle = \mathcal{N}_n^{-1}(t)[-(-1)^n \alpha_n(t)|0\rangle + |1\rangle]$ 表示，其中 $\mathcal{N}_n^2(t) = 1 + \alpha_n^2(t)$ ， $\alpha_n(t) = \frac{1}{2} \cos \theta \csc(\omega t) [-2(-1)^n \cos \theta + \Sigma]$ ，且有 $\Sigma^2 = 3 + \cos(2\theta) - 2 \cos(2\omega t) \sin^2(\theta)$ ， $\theta = \arctan(\omega_0/\omega_T)$ 并且满足 $n \in \{0, 1\}$ 。而本征能量则是 $E_n(t) = -(-1)^n \omega_0 \Sigma/2$ 。这里，我们用以下方程来描述系统的动力学演化

$$\dot{\rho}(t) = (-i/\hbar)[H(t), \rho(t)]. \quad (4.3)$$

我们利用了囚禁在针尖电极 Paul 阱中的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子来演示这个实验，实验装置图如图 4.1 所示。我们使用的比特是超精细比特，编码在 $^{171}\text{Yb}^+$ 的 $2S_{1/2}$ 能级的两个超精细劈裂能级上，记为 $|0\rangle \equiv 2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ 和 $|1\rangle \equiv 2S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ [25]。我们给离子加一个 6.40 高斯的偏置静磁场，此时 $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ 的跃迁频率为 $\omega_{hf} = 2\pi \times 12.642825 \text{ GHz}$ 。首先，我们需要给离子做多普勒冷却，然后我们使用标准的光泵浦方法把离子的内态初始化到 $|0\rangle$ 。然后，我们可以用微波来对比特进行相干操作，而所有的这些操作都是通过编程任意波形发生器来实现。任意波形发生器的频率大约是 200 MHz，需要与一个约 12.442 GHz 的固定点源混频，产生最终的和比特相互作用的微波场。在这之后，我们可以通过荧光探测的方法，来确定比特在 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的概率分布。

由于系统已经被初始化到 $|0\rangle$ 态，系统按照 $|\psi_{\text{ad}}(t)\rangle = |E_1(t)\rangle$ 沿着哈密顿量基态演化，当然还会带有一个全局相位，所以这是一个绝热动力学。可以看出，哈密顿量呈现近似共振的情形，当我们设置 $|\omega - \omega_0| \ll |\omega_T|$ 。因此，为了研究公式 (4.2) 中哈密顿量的绝热有效性条件，我们计算了公式 (4.1) 中不同 ω 对应的系数。在我们的实验中，我们设置了失谐为 $\omega_0 = 2\pi \times 1.0 \text{ MHz}$ ，耦合强度为 $\omega_T = 2\pi \times 20.0 \text{ KHz}$ ，并且 $\omega = a \times \omega_0$ （其中 a 的取值分别为 10.0, 1.0173, 1.0，

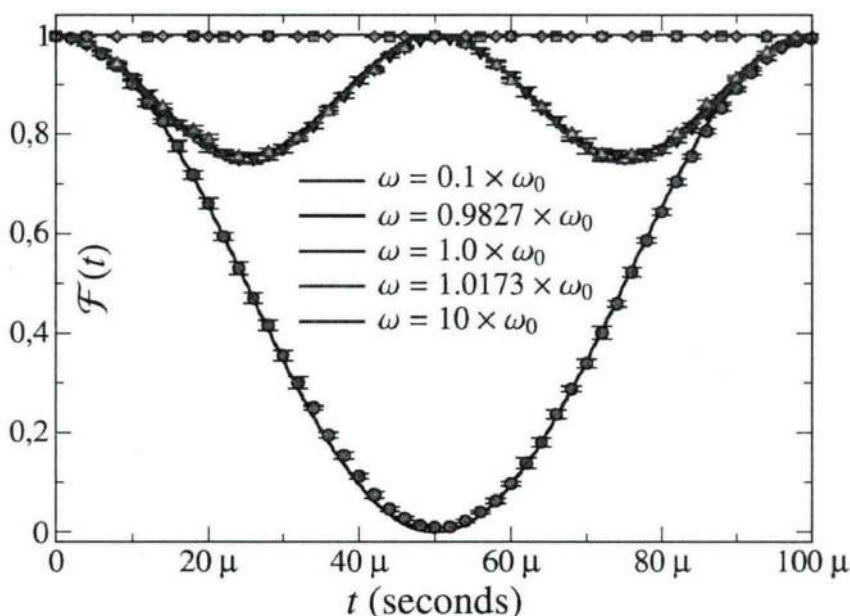


图 4.2 量子动力学的理论和实验的保真度。点和线分别代表实验数据和理论结果。在我们的实验中，参数为 $\omega_0 = 2\pi \times 1.0$ MHz, $\omega_T = 2\pi \times 20.0$ KHz, and $\tau = 100$ μ s, 每个数据点的误差杆都是通过 60,000 次二值测量得到的。

0.9827 和 0.1)。

如图 4.2, 我们通过实验, 得到系统处于 $|\psi_{\text{ad}}(t)\rangle$ 的保真度, 这里保真度的定义为 $\mathcal{F}(t) = |\text{Tr}[\rho(t)\rho_{\text{ad}}(t)]|$, 其中 $\rho(t)$ 是实验得到的密度矩阵, 而且 $\rho_{\text{ad}}(t) = |E_1(t)\rangle\langle E_1(t)|$ 。我们展示了三种不同情况下的实验结果, 包括 $\omega \gg \omega_0$, $\omega \ll \omega_0$ 以及 $\omega \approx \omega_0$ 。

当条件满足 $|\omega - \omega_0| \gg |\omega_T|$, 绝热条件应该能够给出 $C_n \ll 1$ 。然而, 如图 4.3a 所示, 我们可以看到当 $\omega \gg \omega_0$ 时, 并没有得到这样的结果。因此, 方程 (4.1) 给的所有的绝热条件, 都不是必要的。因为, 在绝热条件不满足的情况下, 我们其实依然得到了绝热演化过程。另一方面, 在接近共振的情况下, 因为保真度远小于 1, 所以我们没有绝热演化过程, 而与此相反, 在图 4.3a 中, 我们可以看到绝热系数 $C_n \lesssim 10^{-2}$ 。因此, 这些绝热条件对于研究我们系统的绝热演化过程来说, 也不是充分条件。总之, 与文献 [23] 中考虑的系统不同, 方程 (4.1) 提供的所有绝热条件都不适用于方程 (4.2) 中哈密顿量控制的动力学。这些结果意味着直接应用这些绝热条件, 将会是既不充分也非必要。

在这一点上, 为绝热提供一个新的判定条件可能是一条非常自然的道路。然而, 为了研究绝热条件的适用性, 我们将会像在经典力学中一样, 将薛定谔方程放到非惯性参考系中。通过考虑量子力学中的表象表示方法, 方程 (4.3) 在惯性参考系中可以被认为是薛定谔方程 [27]。为了引入一个非惯性坐标系, 我们可以使用么正含时算符 $\mathcal{O}(t) = e^{i\omega t \sigma_z}$ 进行旋转。在这个参考系中, 系统动力学表示如

下

$$\dot{\rho}_O(t) = (-i/\hbar)[H_O(t), \rho_O(t)], \quad (4.4)$$

其中 $H_O(t) = O(t)H(t)O^\dagger(t) + i\hbar\dot{O}(t)O^\dagger(t)$, 以及 $\rho_O(t) = O(t)\rho(t)O^\dagger(t)$ 。而 $H_O(t)$ 中 $i\hbar\dot{O}(t)O^\dagger(t)$ 这部分, 可以理解成一个“虚构的势” [27]。这个过程其实是一种常用的策略, 例如, 在核磁共振中, 人们就经常使用非惯性参考系来描述系统动力学 [28, 29]。通过计算非惯性参考系中的哈密顿量 $H_O(t)$, 我们得到

$$H_O(t) = (\omega_0 - \omega)\sigma_z/2 + \sin(\omega t) \tan \theta \vec{\omega}_{xy}(t) \cdot \vec{\sigma}_{xy} \quad (4.5)$$

其中 $\vec{\omega}_{xy}(t) = \omega_0[\cos(\omega t)\hat{x} - \sin(\omega t)\hat{y}]/2$, $\vec{\sigma}_{xy} = \sigma_x\hat{x} + \sigma_y\hat{y}$ 。

现在, 我们使用新的哈密顿量 $H'(t)$ 的本征态和本征值, 来计算绝热系数 C_n , 我们可以得到新的曲线, 如图 4.3b 所示。因此, 考虑到图 4.2 以及 4.3b 的结果, 在非惯性系中计算得到的绝热系数 C_n 成功地描述了惯性系的绝热特性。这与之前的结果形成了对比, 之前的结果表明, 当我们考虑谐振条件下的振荡或旋转场时, 绝热条件可能存在问题 [17, 18]。特别需要注意的是, 当我们在非惯性参考系中分析这类问题的时候, 即使是标准的绝热条件, 对于如单比特旋转哈密顿量 (4.2) 所描述的绝热演化, 也是充分必要的。

4.3 绝热条件的验证机制

现在, 我们来建立一种广泛适用的联系起惯性参考系与非惯性参考系的绝热条件验证机制, 并且特别关注在共振条件下的情况。这种方法不仅适用于以前考虑过的单量子比特系统, 也适用于更一般的多粒子量子系统。

这里, 我们考虑惯性参考系的哈密顿量 $H(t)$ 以及与之对应的非惯性参考系中的哈密顿量 $H_O(t)$, 其中参考系的变化由一个含时么正算符 $O(t)$ 表示。哈密顿量 $H(t)$ 和 $H_O(t)$ 都服从本征方程 $H(t)|E_n(t)\rangle = E_n(t)|E_n(t)\rangle$ and $H_O(t)|E_n^O(t)\rangle = E_n^O(t)|E_n^O(t)\rangle$, 并且一般而言有 $[H(t), H(t')] \neq 0$ 和 $[H_O(t), H_O(t')] \neq 0$ 。惯性系中的绝热动力学由哈密顿量 $H(t)$ 控制, 可以通过其相应的演化算符来定义, 即 $U(t, t_0) = \sum_n e^{i\int_{t_0}^t \theta_n(\xi) d\xi} |E_n(t)\rangle \langle E_n(t_0)|$, 其中 $\theta_n(t) = -E_n(t)/\hbar + i\langle E_n(t)|\dot{E}_n(t)\rangle$ 是绝热相位, 包括了动力学相位和几何相位两部分。然后, 我们可以通过下面的定理把惯性参考系和非惯性参考系中的绝热演化联系起来。

定理 4.3.1. 考虑一个哈密顿 $H(t)$ 和它的在非惯性参考系中对应的哈密顿量 $H_O(t) = O(t)H(t)O^\dagger(t) + i\hbar\dot{O}(t)O^\dagger(t)$, 其中 $O(t)$ 一个任意的么正变换。哈密顿量 $H(t)$ 和 $H_O(t)$ 的本征态分别由 $|E_k(t)\rangle$ 和 $|E_m^O(t)\rangle$ 表示。接着, 如果一个量子系统 S 在 $t = t_0$ 时刻, 被制备到哈密顿量 $H(t_0)$ 的其中一个本征态 $|E_k(t_0)\rangle$, 然

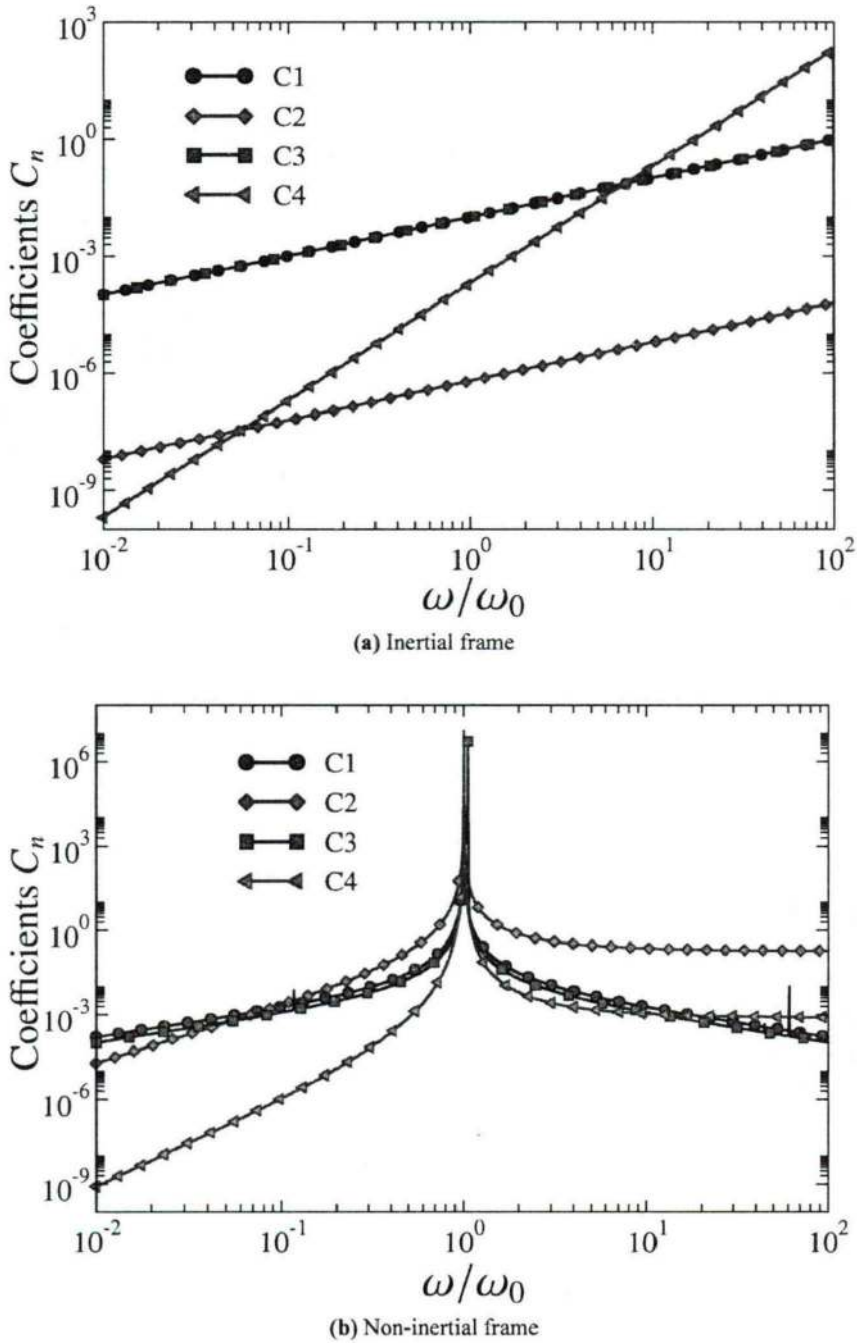


图 4.3 (a) 图是在惯性坐标系下, C_n 系数随着 ω/ω_0 变化的曲线。(b) 图是在非惯性坐标系下, C_n 系数随着 ω/ω_0 变化的曲线。在实验中, 我们设置的参数如下, $\omega_0 = 2\pi \times 1.0 \text{ MHz}$, $\omega_T = 2\pi \times 20.0 \text{ KHz}$ 和 $\tau = 100 \mu\text{s}$ 。

后, 如在惯性参考系中由哈密顿量 $H(t)$ 控制的绝热演化 S , 将会与非惯性系中由哈密顿量 $H_O(t)$ 控制的绝热演化 S 有关联。当且仅当

$$|\langle E_m^O(t) | \mathcal{O}(t) | E_k(t) \rangle| = |\langle E_m^O(t_0) | \mathcal{O}(t_0) | E_k(t_0) \rangle| \quad \forall t, m, \quad (4.6)$$

其中 $t \in [t_0, \tau]$, τ 表示总的演化时间。反之, 如果非惯性参考系中的绝热动力学从 $|E_m^{Ocal}(t_0)\rangle$ 开始, 则当且仅当满足公式 (4.6) 时, 惯性系中的动力学也是绝热的。

同样需要注意,假设演化开始于初始哈密顿量的某一本征态,由定理 4.3.1 也同样可以得到,当满足公式 (4.6) 时,如果非惯性参考系中的非绝热行为可以推论出在原始系中也是非绝热行为,反之亦然。

接下来,我们可以将这个结论应用于一般的共振哈密顿。当物理系统与高强度静场 $\vec{B}_0$ 以及含时的横场 $\vec{B}_T(t)$ 耦合时,就会出现共振现象,其中 $||\vec{B}_T(t)|| \ll ||\vec{B}_0||$ 。在这里,我们将考虑横向场 $\vec{B}_T(t)$ 与频率为 ω 的单个旋转或振荡场相关联。在这种情况下,我们可以把一般的多量子比特哈密顿量写成

$$H(\omega, t) = \hbar\omega_0 H_0 + \hbar\omega_T H_T(\omega, t), \quad (4.7)$$

其组成部分 $\hbar\omega_0 H_0$ 和 $\hbar\omega_T H_T(\omega, t)$ 分别取决于 $\vec{B}_0$ 和 $\vec{B}_T(t)$ 。由于 $\vec{B}_0 \perp \vec{B}_T(t)$, 所以可以知道 $[H_T(\omega, t), H_0] \neq 0$ 。在满足 $||\vec{B}_T(t)|| \ll ||\vec{B}_0||$ 的情况下,哈密顿量 $H(\omega, t)$ 的本征态 $|E_n(t)\rangle$ 可以写成 $|E_n(t)\rangle \approx |E_n^0\rangle$, 其中 $|E_n^0\rangle$ 是哈密顿量 $\hbar\omega_0 H_0$ 的一个固定的本征态。

如果处于一个远离共振的情况,我们可以将从 $H(\omega, t)$ 得到的动力学近似为由 $\hbar\omega_0 H_0$ 驱动的动力学。然而,在近共振场结构中,研究系统动力学最方便的方法是采用改变参考系的方法。选择合适的 $\mathcal{O}(\omega, t) = e^{i\omega H_0 t}$, 是一种通用的改变参考系的方法。从方程 (4.7), 我们可以得到

$$H_{\mathcal{O}}(\omega, t) = \hbar(\omega_0 - \omega) H_0 + \hbar\omega_T H_{\mathcal{O},T}(\omega, t). \quad (4.8)$$

其中 $H_{\mathcal{O},T}(\omega, t) = \mathcal{O}(t) H_T(t) \mathcal{O}^\dagger(t)$ 。值得一提的是,由于 $[H_T(\omega, t), H_0] \neq 0$, 所有我们就可以容易得到 $[H_{\mathcal{O},T}(\omega, t), H_0] \neq 0$ 。此外,由于 $H_{\mathcal{O},T}(\omega, t)$ 是强制通过一么正变换转换成 $H_T(t)$, $||H_T(\omega, t)|| = ||H_{\mathcal{O},T}(\omega, t)||$ 。因此,由于 $H_{\mathcal{O}}(\omega, t)$ 的第一项系数是 $\omega_0 - \omega$, 所以在新的参考系中 $H_T(\omega, t)$ 的贡献是非常重要的。

考虑如方程 (4.7) 的一般哈密顿量,我们可以得到,如果量子系统处于远离共振的情况 $|\omega - \omega_0| \gg |\omega_T|$, 定理 4.3.1 中的方程 4.6 会自动满足。通过对非惯参考系绝热特性的分析,可以预测惯性参考系的绝热动力学。因此,如图 4.3b 中的曲线,能正确描述图 4.2 所表现出的绝热行为,当 $|\omega| \gg |\omega_0|$ 和 $|\omega| \ll |\omega_0|$ 的时候,对应的 $C_n \ll 1$ 。另一方面,在共振(或接近共振)的情况下,即 $|\omega - \omega_0| \ll |\omega_T|$, 方程 4.6 在定理 4.3.1 中可归结为更简单的条件 $|\langle E_m^{\mathcal{O}}(t) | E_k^0 \rangle| = |\langle E_m^{\mathcal{O}}(t_0) | E_k^0 \rangle|$ 。因此,一个由方程 (4.7) 给出的一般的哈密顿量在共振(或接近共振)的情况下,如果在非惯性参考系下其相对应的哈密顿量有含时的本征态,且服从 $|\langle E_m^{\mathcal{O}}(t) | E_k^0 \rangle| = \text{constant}$, $\forall t, m$, 对于特定的初始状态 $|E_k^0\rangle$, 那么非惯性系的非绝热演化就意味着惯性系的非绝热演化。这就是方程 (4.2) 所描述的哈密顿函数的情况,图 4.3b 为所有考虑的绝热条件在共振时的绝热破坏的情况。

4.4 验证机制的实验检验

现在我们将一般处理方法应用于文献 [23] 中讨论的核磁共振哈密顿量。该动力学描述了一个自旋 $1/2$ 粒子耦合到一个静态场 $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ 和一个震荡的横场 $\vec{B}_1(t) = B_1[\cos(\omega)\hat{x} + \sin(\omega)\hat{y}]$, 哈密顿量如下

$$H_{\text{nmr}}(t) = (\omega_0/2)\sigma_z + (\omega_1/2)[\cos(\omega t)\sigma_x + \sin(\omega t)\sigma_y], \quad (4.9)$$

其中 $|\omega_0| \gg |\omega_1|$ 。实验开始的时候, 系统被制备到 σ_z 的本征态上, 并且选择合适的频率, 以使得标准的绝热条件适用 [23]。在这样的情况下, 关于绝热条件在该系统中的违反和适用已经在文献中得到了广泛的讨论 [30–33]。这里我们从另一个角度来分析这个哈密顿量。通过写出非惯性系的系统动力学 $\mathcal{O}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\omega}{2}t\sigma_z}$, 我们得到 $H_{\mathcal{O}} = (\omega_0 - \omega)\sigma_z/2 + (\omega_1/2)\sigma_x$ 。由于这个哈密顿量是不含时的, 所以在远离共振的时候, $H_{\mathcal{O}}$ 所描述的演化是平庸绝热的, 对方程 (4.1) 中所有的绝热条件都适用。因此, 这是没有直接可视化的谐振点。然而, 定理 4.3.1 不能直接应用于共振附近, 因为在这种情况下, $H_{\mathcal{O}}$ 与 σ_x 近似成正比, 初始状态不是 $H_{\mathcal{O}}$ 的一个本征态。我们可以利用哈密顿量 $H_{\mathcal{O}}$ 不含时这个特点来规避这个问题。更具体地说, 我们可以从非惯性系中的演化算符 $U_{\mathcal{O}}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\mathcal{O}}(t-t_0)}$ 开始, 研究在什么条件下我们可以得到惯性参考系中的绝热动力学。下面将要介绍的定理 4.4.1 可以很好地解决这个问题。

定理 4.4.1. 考虑一个哈密顿量 $H(t)$ 以及其在非惯性系中对应的哈密顿量 $H_{\mathcal{O}} = \mathcal{O}(t)H(t)\mathcal{O}^\dagger(t) + i\hbar\dot{\mathcal{O}}(t)\mathcal{O}^\dagger(t)$, 其中 $\mathcal{O}(t)$ 是任意的么正变换, $H_{\mathcal{O}}$ 是一个恒定的哈密顿。哈密顿量 $H(t)$ 和 $H_{\mathcal{O}}$ 的本征态分别由 $|E_k(t)\rangle$ 和 $|E_m^{\mathcal{O}}\rangle$ 表示。然后, 如果量子系统 S 在 $t = t_0$ 被制备到哈密顿量 $H(t_0)$ 的其中一个本征态上, 那么在惯性系中 S 做绝热演化, 当且仅当满足下面条件时发生

$$|\langle E_k(t)|U_{\mathcal{O}}(t, t_0)|E_n(t_0)\rangle| = |\langle E_k(t_0)|E_n(t_0)\rangle| \quad \forall t, k, \quad (4.10)$$

其中 $t \in [t_0, \tau]$, 而 τ 表示总的演化时间, 且 $U_{\mathcal{O}}(t, t_0) = \mathcal{O}^\dagger(t)e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\mathcal{O}}(t-t_0)}\mathcal{O}(t_0)$ 。

文献 [23] 中的实验结果可以用定理 4.4.1 来验证, 因为方程 (4.9) 中的哈密顿量在远离共振的情况下满足方程 (4.10), 而在共振时则违背。事实上, 初态 $|\psi(0)\rangle$ 可以近似写成 $|\psi(0)\rangle = |E_n(0)\rangle \approx |n\rangle$ [with $\sigma_z|n\rangle = (-1)^{(n+1)}|n\rangle$]。因此, 方程 (4.10) 提供了条件 $|\langle k|e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\mathcal{O}}t}|n\rangle| = |\langle k|n\rangle| = \delta_{kn}, \forall k$ and $\forall t \in [0, \tau]$ 。在远离共振的情况下, 我们有 $H_{\mathcal{O}} \approx \frac{\omega_0 - \omega}{2}\sigma_z$, 并且我们可以得到结论 $|\langle k|e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\mathcal{O}}t}|n\rangle| \approx \delta_{kn}$ 。这表明惯性参考系中的动力学在远离共振的时候是 (近似地) 绝热的。另一方面, 在接近共振的情况下, 我们有 $H_{\mathcal{O}} \approx \frac{\omega}{2}\sigma_x$, 我们能马上得出结论, 对于任意的 $t \in [0, \tau]$, 都有 $|\langle k|e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\mathcal{O}}t}|n\rangle| \neq \delta_{kn}$ 。

4.5 小结

我们引入了一个全新的理论来验证一般的多粒子哈密顿量的绝热条件, 该理论对于分析共振情况下的量子系统非常方便。这个理论基于在适当的非惯性参考系中对绝热条件的分析。特别地, 我们在理论和实验上都证明了方程 (4.1) 给出的几个相关的绝热条件包括标准的绝热条件, 描述量子比特在如方程 4.2 所给的振荡场中的绝热行为是充分必要的。在这种情况下, 充分性和必要性基本上是通过非惯性坐标系映射得到的, 所有条件都不能指出原始坐标系中的绝热行为。我们在离子阱系统中进行了实验, 实验结果与理论计算结果吻合的很好。而更为普遍的是, 利用定理 4.3.1 和定理 4.4.1, 绝热条件的验证机制可以扩展到任意的哈密顿量, 详细的条件给出了一大类型如方程 (4.7) 的哈密顿量。因此, 我们没有寻找定义绝热条件的新方法, 而是引入了一种基于与非惯性参考系关联的“虚拟势”的机制, 来揭示绝热条件的正确性, 包括共振和非共振的情况。此外, 作为一个进一步的例子, 我们讨论了如何通过非惯性参考系验证机制来描述文献 Ref. [23] 中给出的核磁共振中单个自旋 $1/2$ 美元的绝热动力学。而更一般的设置, 如退相干效应, 留到未来研究。

参考文献

- [1] Born M, Fock V. Beweis des adiabatensatzes. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 1928, 51(3):165.
- [2] Kato T. On the adiabatic theorem of quantum mechanics. J. Phys. Soc. Jpn., 1950, 5(6):435.
- [3] Messiah A. Quantum Mechanics. Quantum Mechanics, North-Holland Publishing Company, 1962.
- [4] Landau L D. Zeitschrift, 1932, 2:46.
- [5] Zener C. Non-adiabatic crossing of energy levels. Proc. R. Soc. A, 1932, 137(833):696.
- [6] Gell-Mann M, Low F. Bound States in Quantum Field Theory. Phys. Rev., 1951, 84:350–354.
- [7] Berry M V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. Proc. R. Soc. A, 1984, 392(1802):45.
- [8] Wilczek F, Zee A. Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical Systems. Phys. Rev. Lett., 1984, 52:2111–2114.
- [9] Farhi E, Goldstone J, Gutmann S, et al. A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of an NP-complete problem. Science, 2001, 292(5516):472–475.
- [10] Bacon D, Flammia S T. Adiabatic Gate Teleportation. Phys. Rev. Lett., 2009, 103:120504.
- [11] Hen I. Quantum gates with controlled adiabatic evolutions. Phys. Rev. A, 2015, 91:022309.
- [12] Santos A C, Silva R D, Sarandy M S. Shortcut to adiabatic gate teleportation. Phys. Rev. A, 2016, 93:012311.
- [13] Albash T, Lidar D A. Adiabatic quantum computing. Rev. Mod. Phys., 2018, 90:015002.
- [14] Abah O, Lutz E. Energy efficient quantum machines. Europhys. Lett. (EPL), 2017, 118(4):40005.
- [15] He J, Chen J, Hua B. Quantum refrigeration cycles using spin- $\frac{1}{2}$ systems as the working substance. Phys. Rev. E, 2002, 65:036145.
- [16] Marzlin K P, Sanders B C. Inconsistency in the Application of the Adiabatic Theorem. Phys. Rev. Lett., 2004, 93:160408.
- [17] Duki S, Mathur H, Narayan O. Comment I on “Inconsistency in the Application of the Adiabatic Theorem”. Phys. Rev. Lett., 2006, 97:128901.
- [18] Amin M. Consistency of the adiabatic theorem. Phys. Rev. Lett., 2009, 102(22):220401.
- [19] Ambainis A, Regev O. An elementary proof of the quantum adiabatic theorem. preprint arXiv: quant-ph/0411152, 2004..
- [20] Tong D M, Singh K, Kwek L C, et al. Sufficiency Criterion for the Validity of the Adiabatic Approximation. Phys. Rev. Lett., 2007, 98:150402.
- [21] Wu J d, Zhao M s, Chen J l, et al. Adiabatic approximation condition. preprint arXiv:0706.0264, 2007..

- [22] Wu J d, Zhao M s, Chen J l, et al. Adiabatic condition and quantum geometric potential. *Phys. Rev. A*, 2008, 77:062114.
- [23] Du J, Hu L, Wang Y, et al. Experimental Study of the Validity of Quantitative Conditions in the Quantum Adiabatic Theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 101:060403.
- [24] Sarandy M S, Wu L A, Lidar D A. Consistency of the adiabatic theorem. *Quantum Information Processing*, 2004, 3(6):331.
- [25] Olmschenk S, Younge K C, Moehring D L, et al. Manipulation and detection of a trapped Yb^{+} hyperfine qubit. *Physical Review A*, 2007, 76(5):052314.
- [26] Hu C K, Cui J M, Santos A C, et al. Experimental implementation of generalized transitionless quantum driving. *Opt. Lett.*, 2018, 43(13):3136–3139.
- [27] Klink W. Quantum Mechanics in Noninertial Reference Frames. *Ann. Phys.*, 1997, 260(1):27–49.
- [28] Oliveira I, Sarthour Jr R, Bonagamba T, et al. NMR quantum information processing. Oxford, UK: Elsevier, 2011.
- [29] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. 10th ed., New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2011.
- [30] Tong D M. Quantitative Condition is Necessary in Guaranteeing the Validity of the Adiabatic Approximation. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 104:120401.
- [31] Comparat D. Comment on “Quantitative Condition is Necessary in Guaranteeing the Validity of the Adiabatic Approximation”. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, 106:138902.
- [32] Zhao M, Wu J. Comment on “Quantitative Condition is Necessary in Guaranteeing the Validity of the Adiabatic Approximation”. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, 106:138901.
- [33] Tong D M. Tong Replies:. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, 106:138903.

第五章 退相干下的绝热量子动力学

5.1 开放系统绝热定理

开放量子系统不可能与其周围环境解耦,这推动了人们发展各种方法,以尽量减少对量子演化的有害的非幺正的影响 [1]。在一些特殊的情况下,根据绝热定理,对于缓慢变化的哈密顿量来说,这种效应是可以被平滑化的 [2–4]。绝热演化在几何相位 [5],量子计算 [6–10],量子热力学 [11–15],量子博弈理论 [16] 等领域 [17–19],得到了广泛的应用。对于封闭系统,绝热性与量子哈密顿量能谱中不同能量本征值对应的本征空间解耦动力学有关。特别地,假设在演化过程中没有能量谱上的平交点,如果一个量子态在初始时刻被制备到一个足够缓慢变化的哈密顿量 $H(t)$ 的瞬时非简并本征态上,那么在以后的时间它将演化到相应的瞬时本征态上。值得注意的是,在共振条件下由振荡场驱动的量子系统受到了挑战 [20],这可能意味着预期绝热行为的失败。特别是,这个问题已经在核磁共振系统中进行了实验研究 [21],并且该研究表明,许多以前引入的定量绝热条件 [22–24] 在共振时可能会失效。为了解决这一问题,我们最近引入了一种验证绝热性的机制,并通过离子阱进行了实验实现 [25]。在这种方法中,通过采用非惯性参照系,绝热条件可以得到一致的验证。

对于开放量子系统,在由 Lindbladian 超算符 $\mathcal{L}_t$ 决定的主方程控制下的非幺正演化,可以直接推广绝热定理 [26, 28–30]。在这种情况下,正如文献 [26] 中最初推导的那样,开放系统的绝热性可以通过替换哈密顿函数 $H(t)$ 的本征空间解耦演化的概念,用于 Lindbladian 超算符 $\mathcal{L}_t$ 的 Jordan blocks [27] 的解耦演化来重新定义。退相干的消失意味着,开系统的绝热行为退化为闭合系统的情况。一般来说,由于绝热需要缓慢演化,而由于弛豫需要快速演化,这两者之间存在竞争 [28],所以我们需要在有限最优时间内解耦 Jordan blocks。这与传统的闭合系统的情况有很大的不同,在传统的封闭系统中可以进行漫长的演化,绝热性在没有时间限制下是非常精确的。

本文介绍了开系统绝热定理的一种实现方法,研究了在退相干环境中共振和非共振条件下的绝热行为。基于单个囚禁离子的超精细量子比特,离子超精细能级被用作两能级系统的自由度 [25, 31]。为了说明我们的方法,我们实验演示了一个振荡的 Landau-Zener 哈密顿量,并且特别引入共振的影响,以及 Deutsch 问题的绝热量子算法,其中的保真度可以用计算结果来解释。此外,对于这两种

情况, 我们提供了一类密度算符, 它的开放系统绝热性发生在无限时间, 避开了通常绝热和弛豫时间尺度之间的竞争。除此之外, 这个结论还表明, 对于一类初始量子态, 由文献 [26] 可以得到简化定量条件。

5.2 开放量子系统的绝热近似

让我们考虑一个由密度算符 $\rho(t)$ 描述的离散 D 维开放量子系统。假设系统的非幺正演化是由一个主方程驱动的

$$\dot{\rho}(t) = \mathcal{L}_t[\rho(t)], \quad (5.1)$$

其中 $\mathcal{L}_t[\bullet]$ 是 Lindbladian 算符, 下标 t 表示 $\mathcal{L}_t[\bullet]$ 有可能是随时间变化的。如文献 [26] 指出, 采用超算符形式 [32], 可以方便地导出开系统的绝热动力学。在超算符形式下, 方程 (5.1) 可以写成如下形式

$$|\dot{\rho}(t)\rangle\rangle = \mathbb{L}(t)|\rho(t)\rangle\rangle, \quad (5.2)$$

其中, $|\rho(t)\rangle\rangle$ 是 D^2 维的相干矢量, $\mathbb{L}(t)$ 是一个 $(D^2 \times D^2)$ 维的矩阵。由公式 $\varrho_n(t) = \text{Tr}\{\rho(t)\sigma_n^\dagger\}$ 可以得到矢量 $|\rho(t)\rangle\rangle$ 的组成部分 $\varrho_n(t)$, 而 $\mathbb{L}(t)$ 的矩阵元 $\mathbb{L}_{mn}(t)$ 可以写成 $\mathbb{L}_{mn}(t) = (1/D)\text{Tr}\{\sigma_m^\dagger \mathcal{L}_t[\sigma_n]\}$, 这里 $\{\sigma_n\}$ 是矩阵的基并且服从 $\text{Tr}\{\sigma_n\} = D\delta_{n0}$ 和 $\text{Tr}\{\sigma_n\sigma_m^\dagger\} = D\delta_{mn}$ 。在这些定义中, 我们可以确定两个元素 $|\rho(t)\rangle\rangle$ 和 $|\lambda(t)\rangle\rangle$ 的内积为 $\langle\langle\lambda(t)|\rho(t)\rangle\rangle = D\text{Tr}\{\rho(t)\lambda^\dagger(t)\}$ 。在这里, 我们将考虑一个特殊的情况, 一个超算符 $\mathbb{L}(t)$, 它的 Jordan 分解 [27] 只允许一维 Jordan blocks, 该 Jordan blocks 将与不同的非交叉随时间变化的本征值 $\lambda_\alpha(t)$ 单独关联。绝热行为将遵循绝热量子条件 (AQC)。

$$\max_{t \in [0, \tau]} \xi_{\beta\alpha}(t) \ll 1, \quad (5.3)$$

这里 $\xi_{\beta\alpha}(t)$ 是绝热系数, 定义如下

$$\xi_{\beta\alpha}(t) = \left| \frac{e^{\int_0^t \Re[\lambda_\alpha(t') - \lambda_\beta(t')] dt'} \langle\langle \mathcal{E}_\beta(t) | \dot{\mathcal{D}}_\alpha(t) \rangle\rangle}{\lambda_\beta(t) - \lambda_\alpha(t)} \right|, \quad (5.4)$$

其中 $\mathbb{L}(t)|\mathcal{D}_\alpha(t)\rangle\rangle = \lambda_\alpha(t)|\mathcal{D}_\alpha(t)\rangle\rangle$ 以及 $\langle\langle \mathcal{E}_\alpha(t) | \mathbb{L}(t) = \langle\langle \mathcal{E}_\alpha(t) | \lambda_\alpha(t)$ 。也就是说, $\{|\mathcal{D}_\alpha(t)\rangle\rangle\}$ 和 $\{\langle\langle \mathcal{E}_\alpha(t) | \}$ 分别是 $\mathbb{L}(t)$ 的右本征态和左本征态, 共同的本征值为 $\lambda_\alpha(t)$ 。 $\Re[z]$ 表示 $z \in \mathbb{C}$ 的实部。方程 (5.3) 确保了 Jordan-Lindblad 本征空间的解耦演化 [26]。能量尺度 $|\lambda_\alpha(t) - \lambda_\beta(t)|$ 同时包括了哈密顿能谱和退相干速率。对于任意时刻 t 的相干矢量可以展开成一下形式, $|\rho(t)\rangle\rangle = \sum_\alpha c_\alpha(t) e^{\int_0^t \lambda_\alpha(t') dt'} |\mathcal{D}_\alpha(t)\rangle\rangle$, 其中 $c_\alpha(t)$ 是时间的复函数, 并且与 $\mathbb{L}(t)$ 的右本征态相关联。值得强调的是, 不

像封闭系统的情况 [22–24, 33, 34], 由于存在 $\eta_{\beta\alpha}(t) \equiv e^{\int_0^t \Re[\lambda_\alpha(t') - \lambda_\beta(t')] dt'}$ 这个因素, 方程 (5.4) 中的绝热系数是这样的 $\xi_{\beta\alpha}(t) \neq \xi_{\alpha\beta}(t)$ 。这意味着, 如果我们会有 $\max_{t \in [0, \tau]} \xi_{\beta\alpha}(t) \ll 1$, 则 $\dot{c}_\beta(t)$ 的动力学与系数 $c_\alpha(t)$ 解耦, 但是这并不意味着 $\dot{c}_\alpha(t)$ 与 $c_\beta(t)$ 解耦。此外, 因子 $\eta_{\beta\alpha}(t)$ 的实指数与开放系统中绝热行为的一般有限最优时间有关 [26]。然而, 我们可以证明, 在退相干条件下, 对于一类初始量子态, 绝热仍然可能发生在无限的时间范围内, 就像它发生在封闭系统中。事实上, 假设 $\mathbb{L}(t)$ 是一个 Lindblad 超算符, 它可以接受具有不同本征值 $\lambda_n(t)$ 的一维 Jordan blocks。假设系统的初态可以写成 $\mathbb{L}(0)$ 的两个独立本征矢的叠加, 并且在演化时间内 $\mathbb{L}(t)$ 的能谱中没有本征值交叉。这样, 对于一个缓慢变化的 Lindblad 超算符 $\mathbb{L}(t)$, 就可以得到开系统的绝热动力学。

5.3 共振情况下的绝热量子条件

5.3.1 退相干情况下的 Landau-Zener 模型

为了在可控实验条件下研究开放系统的绝热行为, 我们首先考虑单量子比特的 Landau-Zener 哈密顿量, 其形式如下

$$H(t) = (\omega_0/2)\sigma_z + (\omega_x/2)\sin(\omega t)\sigma_x. \quad (5.5)$$

当 $\omega_0 \approx \omega$ 的时候, 这个哈密顿量表示的是一个共振的情况。事实上, 它可以用来说明, 由于共振现象, 如果在传统惯性参照系中进行分析, 为封闭系统设计的几个定量绝热条件 [21–24, 33, 34] 将是既不充分也非必要 [25]。考虑退相干, 我们认为量子比特处于一个退相干的环境中, 其演化遵守如下的 Lindblad 主方程

$$\dot{\rho}(t) = -i[H(t), \rho(t)] + \gamma[\sigma_z \rho(t) \sigma_z - \rho(t)], \quad (5.6)$$

其中 γ 表示时间无关的退相位速率。把方程 (5.6) 写成超算符的形式, 我们得到了一个 4×4 维的超算符 $\mathbb{L}(t)$ 。其矩阵元为 $\mathbb{L}_{nm}(t) = (1/2)\text{Tr}\{-i\sigma_n[H(t), \sigma_m] + \gamma\sigma_n[\sigma_z \sigma_m \sigma_z - \sigma_m]\}$ 。可以得到

$$\mathbb{L}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\gamma & -\omega_0 & \omega_0 \sin(\omega t) \tan \theta \\ 0 & \omega_0 & -2\gamma & 0 \\ 0 & -\omega_0 \sin(\omega t) \tan \theta & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

我们将系统初始化到 $H(0)$ 的基态, 其密盾矩阵为 $\rho(0) = |1\rangle\langle 1|$ 。然后, 初始的相干向量 $|\rho(0)\rangle\rangle$ 可以写成 $|\rho(0)\rangle\rangle = |\mathcal{D}_0(0)\rangle\rangle - |\mathcal{D}_1(0)\rangle\rangle$, 其中超算符的本征

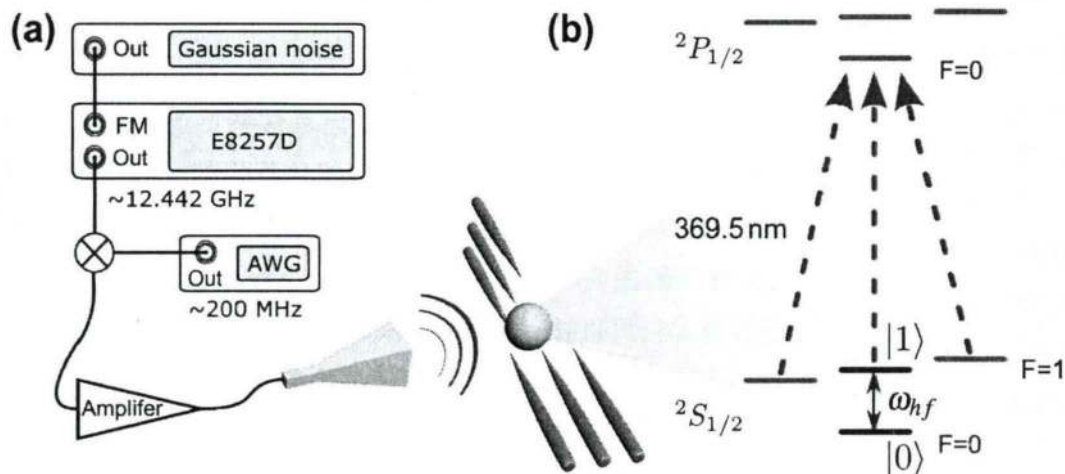


图 5.1 用于演示退相干下绝热量子动力学的实验装置。(a) 用于产生实验操作波形的微波装置，其中最核心的是可编程任意波形发生器（AWG）产生设计的哈密顿量，而在这里高斯噪声则起到一个环境的作用。(b) 针尖 Paul 阱中的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子，以及相关的能级。

矢是 $|\mathcal{D}_0(t)\rangle = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^t$ 和 $|\mathcal{D}_1(t)\rangle = [0 \ 0 \ \sin(\omega t) \tan \theta \ 1]^t$ ，对应的本征值分别是 $\lambda_0 = 0$ 和 $\lambda_1 = -2\gamma$ ，其中， $\theta = \arctan[\omega_x/\omega_0]$ 。而 $\mathbb{L}(t)$ 其他的本征值分别是 $\lambda_2 = -\gamma - \Delta(t) \sec(\theta)/2$ 和 $\lambda_3 = -\gamma + \Delta(t) \sec(\theta)/2$ ，其中 $\Delta(t)$ 是一个纯复数，定义为 $\Delta^2(t) = 2\gamma^2 + \omega_0^2[2 \cos(2t\omega) \sin^2(\theta) - 3] + (2\gamma^2 - \omega_0^2) \cos(2\theta)$ 。因此，绝热动力学抑制了从本征矢 $|\mathcal{D}_0(t)\rangle$ 和 $|\mathcal{D}_1(t)\rangle$ 到 $\mathbb{L}(t)$ 的其他的本征态的跃迁。

5.3.2 Landau-Zener 模型的实验实现

我们从实验和理论两方面研究了在退相干的环境中共振情况下的 Landau-Zener 哈密顿量的绝热行为。为了实验实现该模型，我们依然是利用囚禁的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子，并且实施如方程(5.6)所描述的动力学，实验装置图如图 5.1 所示。在本实验中编码比特的能级、态初始化态探测等，和前面章节提到的一样。要想在实验中实施 Landau-Zener 哈密顿量，也只需要给任意波形发生器编程，即可获得想要的操作。在这里不再赘述。

然而，并没有一种方便可行的方法来实施或者是控制二能级与环境相互作用。人们通常都是改变环境磁场噪声，由于受到磁场涨落的影响，量子比特在演化的过程中积累了大量随机相位，而产生退相干。这样的方法，原则上也是可行的，但是非常不方便，很难甚至是不可能制造出人们想要的退相干速率，更不可能制造出含时（微秒尺度）的退相干环境了。在这里，我们引入了一种新的方法，它基于使用高斯噪声来对 $2\pi \times 12.442 \text{ GHz}$ 的载波微波进行频率调制。这可以用来模拟具有高可控性的任意目标退相位速率 γ 的退相位信道 [31]。

如图 5.2 所示，是通过过程态层析的方法，得到的过程矩阵，实验测量结果的实部为 (a) 和 (b)，对应的理论计算结果的实部和虚部分别是 (c) 和 (d)。如图所

示 5.3，是退相位速率的平方根 $\sqrt{\gamma}$ 随着噪声幅度变化的曲线，呈现出非常好的线性变化。

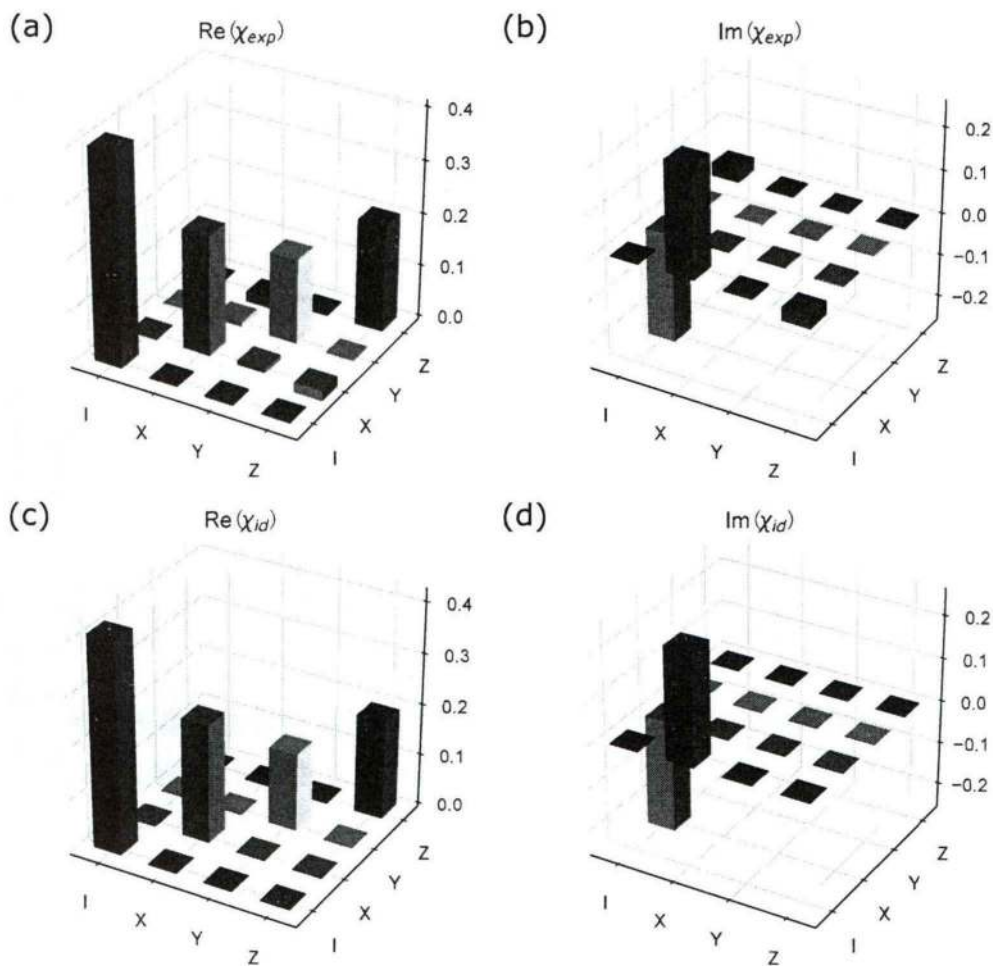


图 5.2 过程矩阵

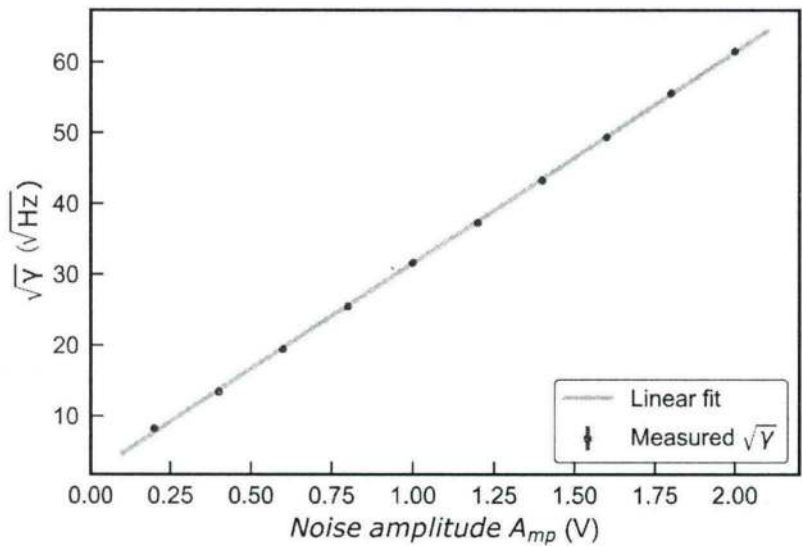


图 5.3 退相干速率随噪声幅度变化

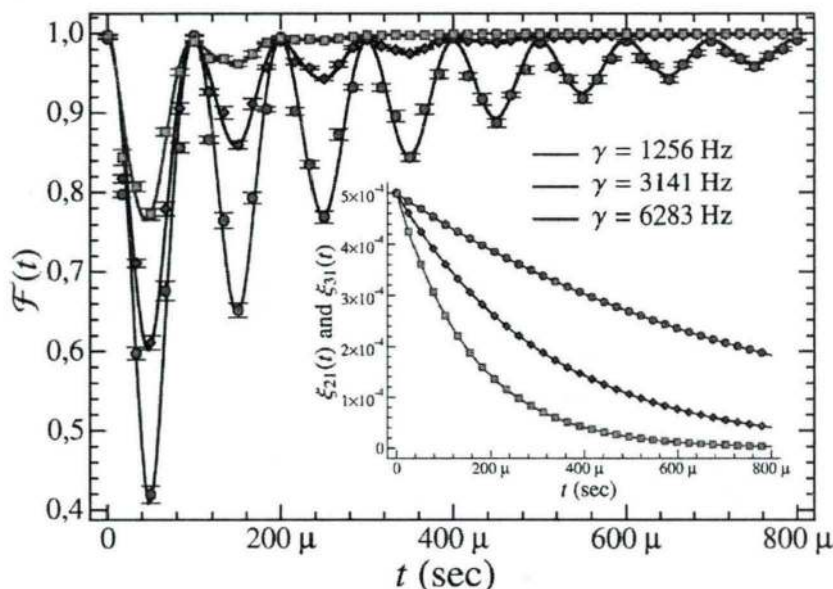


图 5.4 主图: 对应于几个不同的退相干速率 γ 的理论计算的保真度 $\mathcal{F}_{\text{The}}(t)$ (实线) 和对应的实验给出的保真度 $\mathcal{F}_{\text{Exp}}(t)$ (点) 随时间 t 的变化曲线。插图: 绝热参数 $\xi_{21}(t)$ 和 $\xi_{31}(t)$ 。注意, 在插图中的点是数值计算的结果。在这里, 我们使用的主要的实验参数为 $\omega_0 = 2\pi \times 1 \text{ MHz}$ and $\omega_x = 2\pi \times 20 \text{ KHz}$, 当满足 $\omega = \omega_0$ 系统共振。

为了验证开放系统绝热条件的有效性, 我们使用保真度来衡量量子态演化的结果。保真度可用作两个密度矩阵 ρ_1 和 ρ_2 之间的可分辨性度量, 且有 $\mathcal{A}[\rho_1, \rho_2] = \text{Tr}[(\rho_1^{1/2} \rho_2 \rho_1^{1/2})^{1/2}]$ 。实验结果数据和理论预测如图 5.4 所示, 理论和实验过程保真度分别由 $\mathcal{F}_{\text{The}}(t) = \mathcal{A}[\rho_{\text{ad}}(t), \rho_{\text{N-sol}}(t)]$ 和 $\mathcal{F}_{\text{Exp}}(t) = \mathcal{A}[\rho_{\text{ad}}(t), \rho_{\text{Exp}}(t)]$ 给出, 其中 $\rho_{\text{N-sol}}(t)$ 是方程 (5.6) 的数值解, 而 $\rho_{\text{Exp}}(t)$ 则是由实验量子态重构给出。

关于预期的绝热行为, 我们首先注意到, 由于本征矢 $|\mathcal{D}_0(t)\rangle = |\mathcal{D}_0\rangle$ 是不随时间变化的, 对应的左本征态 $\langle\langle \mathcal{E}_0(t) | = \langle\langle \mathcal{E}_0 |$ 也是不随时间变化的, 所以我们可以利用 $\langle\langle \mathcal{E}_\beta(t) | \dot{\mathcal{D}}_\alpha(t) \rangle\rangle = -\langle\langle \dot{\mathcal{E}}_\beta(t) | \mathcal{D}_\alpha(t) \rangle\rangle$ 这个关系来计算出 $\xi_{0\alpha} = \xi_{\alpha 0} = 0$ 。因此, 我们没有从 $|\mathcal{D}_0\rangle$ 到任何其他态的跃迁。此外, $\xi_{0\alpha} = \xi_{\alpha 0} = 0$ 对于任何开放量子系统总是有效的。另一方面, $\xi_{\alpha 2}$ 是非零的。其行为如图 5.4 中的插图所示。这使得我们可以得出这样的结论, 对于实验中选择的参数的取值范围, 方程 (5.4) 所示的绝热近似确实是满足的。由于系数 $\xi_{\alpha 2}$ 很小, 并且随时间衰减, 因此可以预期, 随着时间的增加 $t \rightarrow \infty$, 保真度将增加到接近 100%。事实上, 绝热演化可以写成

$$\rho_{\text{ad}}(t) = \frac{1}{2} \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2} e^{-2\gamma t} \sin(\omega t) \sec(\theta) \sigma_y - e^{-2\gamma t} \sigma_z \right]. \quad (5.8)$$

从图 5.4 可以看出, 绝热密度算符 $\rho_{\text{ad}}(t)$ 的保真度随着演化时间的延长而增加, 但在中间时间尺度上却经历了强烈的振荡。这是共振现象的结果。如果演化的时间不充分长, 量子比特的演化将可以近似地认为是在一个闭合系统进行,

因为退相干效应不会在很大程度上驱使系统进行非么正演化。事实上,我们知道,在这种情况下,共振限制了绝热定理的适用性。为了在闭合系统中提供正确的绝热预测,需要改变为使用非惯性参考系的视点 [25]。值得注意的是,在开放系统场景中,随着时间的增加,退相干起着越来越重要的作用,使得系统对方程 (5.3) 建立的绝热近似预测的绝热演化具有较高的保真度。这对于闭合系统是相当不同的,在闭合系统中,共振现象挑战了绝热定理在任意时间尺度上的适用性 [20, 21, 25]。

5.4 绝热 Deutsch 算法

5.4.1 退相干情况下的 Deutsch 算法

现在让我们考虑在开放系统中绝热 Deutsch 算法在量子计算中的应用 [28]。Deutsch 问题主要涉及,一个二态函数 $f: x \in \{0, 1\} \rightarrow f(x) \in \{0, 1\}$ 是常数函数 [$f(0) = f(1)$], 还是平衡函数 [$f(0) \neq f(1)$] [36]。该算法是通过使用一个含时的哈密顿量来控制量子比特的绝热动力学来实现的, 这个哈密顿量形式如下

$$H_{\text{DA}}(t) = -\omega [\cos(\pi Ft/2\tau) \sigma_x + \sin(\pi Ft/2\tau) \sigma_y], \quad (5.9)$$

其中, $F = 1 - (-1)^{f(0)+f(1)}$, τ 是总的演化时间。实验开始的时候, 比特被制备到 $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ 态。通过系统的绝热演化, 可以从最终的量子态得到函数 f 的全局行为, 当 f 是常数型的时候, 末态是 $|\psi(\tau)\rangle = |+\rangle$, 而当 f 是平衡型的时候。末态是 $|\psi(\tau)\rangle = |-\rangle$ 。在这里, 我们将考虑退相位对 Deutsch 算法的影响, 由主方程 (5.6) 来描述。

该算法的绝热动力学可由超算符得到

$$\mathbb{L}_{\text{DA}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\gamma & 0 & \omega \sin \pi t/\tau \\ 0 & 0 & -2\gamma & \omega \cos \pi t/\tau \\ 0 & -\omega \sin \pi t/\tau & -\omega \cos \pi t/\tau & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

这里, $\mathbb{L}_{\text{DA}}(t)$ 有关的本征值为 $\lambda_0 = 0$ 和 $\lambda_1 = -2\gamma$, 而对应的本征矢为 $|\mathcal{D}_0^{\text{DA}}(s)\rangle = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ and $|\mathcal{D}_1^{\text{DA}}(s)\rangle = [0 \ \cos(F\pi s/2) \ -\sin(F\pi s/2) \ 0]^T$ 这里 $s = t/\tau \in [0, 1]$ 是归一化的演化时间。而其他的本征值为 $\lambda_2 = -(\gamma + \Delta)$ 何 $\lambda_3 = -(\gamma - \Delta)$, 而 $\Delta^2 = \gamma^2 - \omega^2$ 。因此, 从这组本征矢, 我们可以得到 Deutsch 算法方案中的初态 $|\psi(0)\rangle$ 是他们的叠加态 $|\psi^{\text{DA}}(0)\rangle = |\mathcal{D}_0^{\text{DA}}(0)\rangle + |\mathcal{D}_1^{\text{DA}}(0)\rangle$, 并且演化后的绝

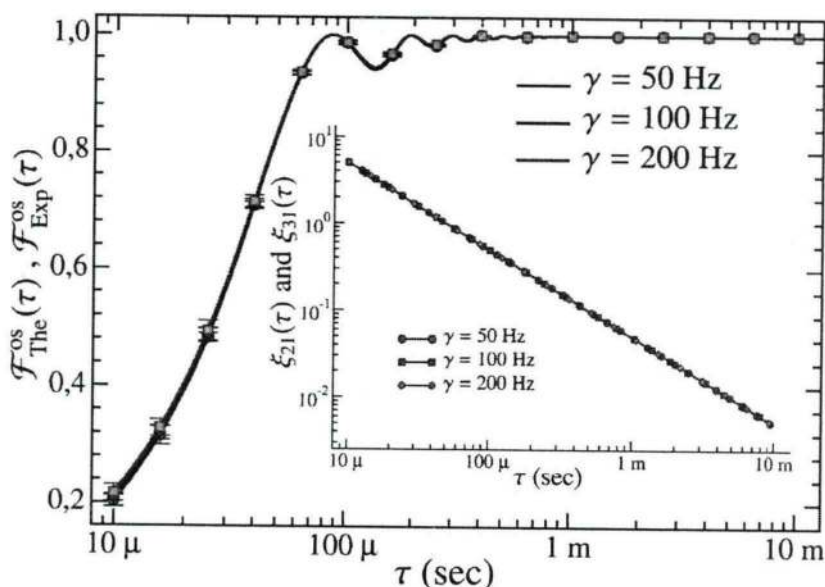


图 5.5 主图: Deutsch 算法在开放系统中的绝热行为的保真度。在图中演示了不同的退相干速率 γ 下的理论的保真度 $\mathcal{F}_{\text{The}}^{\text{os}}(\tau)$ (实线) 和对应的实验的保真度 $\mathcal{F}_{\text{Exp}}^{\text{os}}(\tau)$ (点) 随着时间 τ 变化的情况。插图: 开放系统中的绝热参数 $\xi_{21}(\tau)$ 和 $\xi_{31}(\tau)$ 。注意, 在插图中的点是数值计算的结果, 只是用来区分不同 γ 值对应的结果。在我们的实验中, 使用的参数为 $\omega = 2\pi \times 10 \text{ KHz}$ 。

热密度矩阵如下

$$\rho_{\text{DA}}^{\text{os}}(s) = \frac{1}{2} \left[\mathbb{1} + e^{-2\gamma\tau s} (-1)^{f(0)+f(1)} \sigma_x \right]. \quad (5.11)$$

上面的绝热解提供了在退相干环境下 $s = 1$ 时的算法的目标态。如图 5.5 给出了系统的动力学以及系统态到 $\rho_{\text{DA}}(s)$ 的距离并以保真度来度量, 并且不失一般性的, 我们考虑了平衡函数 ($f(0) = 0$ 和 $f(1) = 1$) 的算法实施。如前所述, 在开放系统中实现绝热动力学的理论和实验的保真度, 分别由 $\mathcal{F}_{\text{The}}^{\text{os}}(\tau) = \mathcal{A}[\rho_{\text{DA}}^{\text{os}}(1), \rho_{\text{N-sol}}(\tau)]$ 和 $\mathcal{F}_{\text{Exp}}^{\text{os}}(\tau) = \mathcal{A}[\rho_{\text{DA}}^{\text{os}}(1), \rho_{\text{Exp}}(\tau)]$ 定义, 其中 $\rho_{\text{N-sol}}(\tau)$ 由包含了哈密顿量主方程 $H_{\text{DA}}(t)$ 的主方程 (5.6) 的数值解给出, 而 $\rho_{\text{Exp}}(t)$ 则由实验量子态层析给出。

值得注意的是, 通过研究 Deutsch 算法的绝热退相干动力学, 在文献 [26] 中讨论了绝热近似应该有一个最佳时间。由于绝热和退相干时间尺度之间的竞争的关系, 这里的保真度会增加到它的最大值 $\tau \rightarrow \infty$, 这在一般情况下是正确的。因为假定 $\mathbb{L}_{\text{DA}}(t)$ 允许一维 Jordan blocks, 并且没有本征值重合, 初始密度矩阵是 $\mathbb{L}_{\text{DA}}(0)$ 的两个 blocks 的叠加。

5.4.2 最佳绝热时间窗的实验研究

在退相干条件下实现绝热量子算法的一个挑战是在实现绝热演化所需的时间和退相干效应的限制性时间尺度之间取得一个良好的平衡。如前所述, 保真度

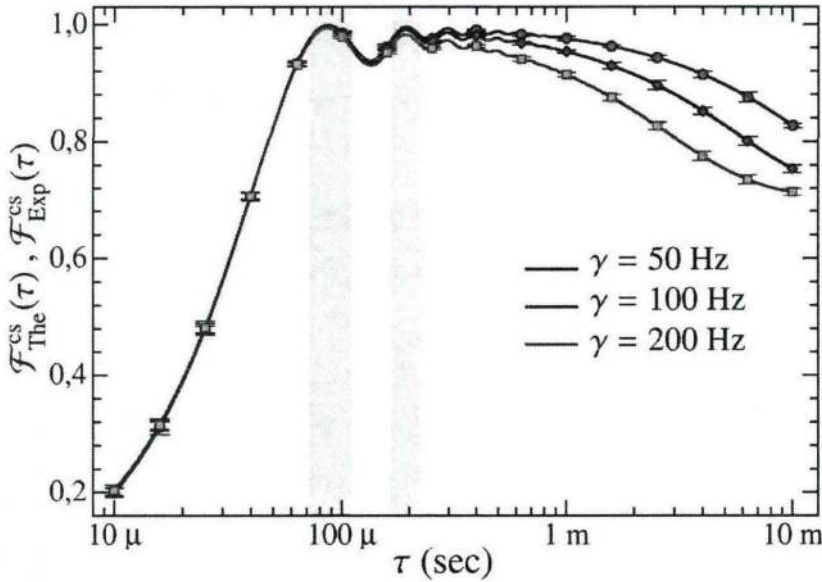


图 5.6 在 Deutsch 算法中对应于多个退相干速率 γ 的以纯态为目标态的保真度。连续的实线表示 $\mathcal{F}_{\text{The}}^{\text{cs}}(t)$ ，而点则表示对应的实验结果 $\mathcal{F}_{\text{Exp}}^{\text{cs}}(t)$ 。在我们的实验中，使用的参数为 $\omega = 2\pi \times 10 \text{ KHz}$ 。两个高保真度时间窗口以淡绿色突出显示。

的振荡行为是闭合量子系统和开放量子系统中绝热演化中的一种常见现象。特别是，在不同的绝热协议和系统中，有可能识别出接近于 100% 的第一个最大保真度 [31, 37–40]。为了研究保真度极大值的有用性，我们在图 5.6 中展示了实现 Deutsch 算法期望目标态的保真度，而这个最大值正是算法期望输出的。在这种情况下，平衡函数 f 的期望输出是纯状态 $|-\rangle$ ，可以用密度矩阵表示

$$\rho_{\text{DA}}^{\text{out}}(1) = (1/2)(1 - \sigma_x). \quad (5.12)$$

注意，由于我们是在退相干的状态下进行演化的，由方程 (5.12) 提供的目标状态与由方程 (5.11) 给出的绝热解是不同的，绝热解在退相干消失的极限下到目标状态。为了量化该算法在去相干条件下的有效性，我们定义了真实的动力学相对于目标输出密度算子的保真度。理论值为 $\mathcal{F}_{\text{The}}^{\text{cs}}(\tau) = \mathcal{A}[\rho_{\text{DA}}^{\text{out}}(1), \rho_{\text{N-sol}}(\tau)]$ ，而对应的实验值为 $\mathcal{F}_{\text{Exp}}^{\text{cs}}(\tau) = \mathcal{A}[\rho_{\text{DA}}^{\text{out}}(1), \rho_{\text{Exp}}(\tau)]$ 。

这里，如图 5.6 中相对于纯目标态的保真度会随着退相干速率的增加而不断衰减。这与图 5.5 中开放系统的混态绝热演化的保真度形成对比，在开放系统中当 $t \rightarrow \infty$ 保真度慢慢变成 100%。这是因为在开放系统中的绝热性与 Jordan blocks 在非幺正演化过程中的解耦有关，在弱耦合状态下，这与经过计算过程后达到纯目标状态只是近似等价。因此，通过关注目标纯态，可以看到一个显示最大保真度的首选时间窗口。在图 5.6 中，我们展示了两个高保真度的窗口，并用浅绿色高亮显示。注意，这些窗口还对应于图 5.5 中的高保真度，这意味着开放系统中的绝热性确实能够在比较合适的测量时间内提供高保真度的 Deutsch 算

法的目标态。

5.5 小结

本文从理论和实验两方面讨论了开放系统绝热近似的共振灵敏度和时间最优性等问题。首先，我们从闭合情况的例子中清楚地表明，退相干情况下的绝热有效性条件对共振现象可能具有鲁棒性。其次，我们实现了 Deutsch 算法的绝热版本，并且分析了它在开放系统中最优的运行时长。与之前在文献 [26, 28] 中得到的一般情况相反，我们证明了在 Deutsch 算法中，开放系统的绝热近似在 $t \rightarrow \infty$ 时依然成立，这是 Lindblad 超算符 $\mathbb{L}_{\text{DA}}(t)$ 的一维 Jordan 分解的任意有效的结果，没有能级交叉，并且系统初始化为 $\mathbb{L}_{\text{DA}}(t)$ 的两个本征态的叠加。值得一提的是，如果我们想要将测量目标纯态的概率最大化作为算法的结果，而不是采用开放系统的绝热混态密度矩阵，那么系统的测量就有一个最优时间窗。

关于实验结果，据我们所知，我们首次报道了在完全可控的开放系统中进行绝热近似的实验研究，并且在系统中可以自由设置退相干率来验证绝热行为的定量有效性条件。利用捕获离子基态能级编码的超精细量子比特，成功地实现了上述理论预测。在此背景下，本文将文献 [21] 中为闭合系统设计的共振绝热实验分析推广到开放系统场景中。此外，本文还提供了一个方法，在退相干环境中实现绝热量子计算，抓住如算法的最优运行时间，绝热演化和弛豫时间尺度之间的竞争以及结果的保真度等。开放系统的可扩展性和更一般的特性（如非马尔科夫性质），仍然有待以后继续研究。

参考文献

- [1] Breuer H P, Petruccione F. The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, Oxford, UK: Cambridge University Press, 2007.
- [2] Born M, Fock V. Beweis des adiabatensatzes. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 1928, 51(3):165.
- [3] Messiah A. Quantum Mechanics. Quantum Mechanics, North-Holland Publishing Company, 1962.
- [4] Kato T. On the adiabatic theorem of quantum mechanics. J. Phys. Soc. Jpn., 1950, 5(6):435.
- [5] Berry M V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. Proc. R. Soc. A, 1984, 392(1802):45.
- [6] Farhi E, Goldstone J, Gutmann S, et al. A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of an NP-complete problem. Science, 2001, 292(5516):472–475.
- [7] Bacon D, Flammia S T. Adiabatic Gate Teleportation. Phys. Rev. Lett., 2009, 103:120504.
- [8] Barends R, Shabani A, Lamata L, et al. Digitized adiabatic quantum computing with a superconducting circuit. Nature, 2016, 534(7606):222.
- [9] Johnson M W, Amin M H, Gildert S, et al. Quantum annealing with manufactured spins. Nature, 2011, 473(7346):194.
- [10] Hen I. Quantum gates with controlled adiabatic evolutions. Phys. Rev. A, 2015, 91:022309.
- [11] Alicki R. The quantum open system as a model of the heat engine. J. Phys. A: Math. Gen., 1979, 12(5):L103.
- [12] Kosloff R. A quantum mechanical open system as a model of a heat engine. The Journal of chemical physics, 1984, 80(4):1625–1631.
- [13] Quan H, Liu Y x, Sun C, et al. Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines. Phys. Rev. E, 2007, 76(3):031105.
- [14] Geva E, Kosloff R. A quantum-mechanical heat engine operating in finite time. A model consisting of spin-1/2 systems as the working fluid. J. Chem. Phys., 1992, 96(4):3054–3067.
- [15] Henrich M J, Rempp F, Mahler G. Quantum thermodynamic Otto machines: A spin-system approach. Eur. Phys. J. Special Topics, 2007, 151(1):157–165.
- [16] Ponte M, Santos A C. Adiabatic quantum games and phase-transition-like behavior between optimal strategies. Quantum Information Processing, 2018, 17(6):149.
- [17] Vitanov N, Suominen K, Shore B. Creation of coherent atomic superpositions by fractional stimulated Raman adiabatic passage. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 1999, 32(18):4535.
- [18] Amnat-Talab M, Saadati-Niari M, Guérin S. Quantum state engineering in ion-traps via adiabatic passage. Eur. Phys. J. D, 2012, 66(8):216.
- [19] Chu T S, Han K L. Effect of Coriolis coupling in chemical reaction dynamics. Phys. Chem. Chem. Phys., 2008, 10(18):2431–2441.

- [20] Marzlin K P, Sanders B C. Inconsistency in the Application of the Adiabatic Theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 93:160408.
- [21] Du J, Hu L, Wang Y, et al. Experimental Study of the Validity of Quantitative Conditions in the Quantum Adiabatic Theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 101:060403.
- [22] Tong D M, Singh K, Kwek L C, et al. Sufficiency Criterion for the Validity of the Adiabatic Approximation. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, 98:150402.
- [23] Wu J d, Zhao M s, Chen J l, et al. Adiabatic approximation condition. *arXiv preprint arXiv:0706.0264*, 2007..
- [24] Ambainis A, Regev O. An elementary proof of the quantum adiabatic theorem. *arXiv preprint arXiv: quant-ph/0411152*, 2004..
- [25] Hu C K, Cui J M, Santos A C, et al. Validation of Quantum Adiabaticity through Non-Inertial Frames and Its Trapped-Ion Realization. *arXiv preprint arXiv:1810.02644*, 2018..
- [26] Sarandy M S, Lidar D A. Adiabatic approximation in open quantum systems. *Phys. Rev. A*, 2005, 71:012331.
- [27] Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999..
- [28] Sarandy M S, Lidar D A. Adiabatic Quantum Computation in Open Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95:250503.
- [29] Venuti L C, Albash T, Lidar D A, et al. Adiabaticity in open quantum systems. *Phys. Rev. A*, 2016, 93:032118.
- [30] Venuti L C, Albash T, Marvian M, et al. Relaxation versus adiabatic quantum steady-state preparation. *Phys. Rev. A*, 2017, 95:042302.
- [31] Hu C K, Cui J M, Santos A C, et al. Experimental implementation of generalized transitionless quantum driving. *Opt. Lett.*, 2018, 43(13):3136–3139.
- [32] Alicki R, Lendi K. *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*. Lecture Notes in Physics, Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [33] Sarandy M S, Wu L A, Lidar D A. Consistency of the adiabatic theorem. *Quantum Information Processing*, 2004, 3(6):331.
- [34] Amin M. Consistency of the adiabatic theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 102(22):220401.
- [35] Olmschenk S, Younge K C, Moehring D L, et al. Manipulation and detection of a trapped Yb^+ hyperfine qubit. *Phys. Rev. A*, 2007, 76:052314.
- [36] Deutsch D. Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1985, 400(1818):97–117.
- [37] Santos A C, Sarandy M S. Generalized shortcuts to adiabaticity and enhanced robustness against decoherence. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2018, 51(2):025301.
- [38] Albash T, Lidar D A. Decoherence in adiabatic quantum computation. *Phys. Rev. A*, 2015, 91:062320.

- [39] Coulamy I B, Saguia A, Sarandy M S. Dynamics of the quantum search and quench-induced first-order phase transitions. *Phys. Rev. E*, 2017, 95:022127.
- [40] Peterson J P, Batalhão T B, Herrera M, et al. Experimental characterization of a spin quantum heat engine. *arXiv preprint arXiv:1803.06021*, 2018..

第六章 惯性定理控制协议的实验验证

在本章中，我们在实验上利用囚禁离子的两个超精细能级验证了惯性定理 (inertial theorem)。该定理为缓慢“加速”的非绝热驱动的系统生成了一个解析解，消除了突变和绝热极限之间的差距。在实验和理论上，证明了 $SU(2)$ 代数的这些解对小偏差是稳定的。因此，惯性解为封闭量子系统和开放量子系统的快速量子控制铺平了道路。然而对于较大的偏离惯性条件，振幅发散，而相位依然保持准确。

6.1 惯性定理

现代量子技术进步的先决条件是对量子动力学的精确控制 [1–19]。一种“普适”的控制技术词汇出现了。它们已被广泛应用于各种实验平台，例如 NV 色心 [20–22]，囚禁离子 [1, 23, 24]，以及超导比特 [25–27] 等。普遍控制场景的一个主要例子依赖于绝热定理。该定理表明，相对于系统谱隙的平方反比，控制时间尺度较慢。另一个极端的控制场景依赖于突变限制，其中控制时间尺度比考虑中的系统快得多。对于中间时间尺度，缺乏一个通用的控制范式。因此，人们不得不依赖于自定义的数值方案，如最优控制理论得到的数值方案 [28, 29]。

本文的目的是通过实验证明一种基于惯性定理的通用量子控制方案 [30]。绝热解和惯性解的类似结构意味着这种控制可能在量子信息处理 [31–34] 以及量子传感 [35] 中得到应用。实验演示使用了在 Paul 阱中由一个 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子组成的量子系统来实现 $SU(2)$ 代数。

6.1.1 惯性定理协议

为了使量子控制方案具有通用性，必须依赖于适用平台的简单原则。控制程序要求有一个对应法则 Λ_t ，满足从初态到末态的对应关系 $\hat{\rho}(t) = \Lambda_t \hat{\rho}(0) = \hat{U} \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger$ 。现在，我们考虑一个生成动力学对应法则的控制哈密顿量：

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \sum_j g_j(t) \hat{G}_j \quad (6.1)$$

其中， $\hat{H}_0$ 是偏移哈密顿量， $g_j(t)$ 是控制场，而 $\hat{G}_j$ 是控制算符。从含时控制哈密顿量生成这种映射的主要障碍是时间排序的操作，因为不同时间的哈密顿量

不对易 $[\hat{H}(t), \hat{H}(t')] \neq 0$ 。在绝热控制中,人们往往是通过使用一个慢变的 $g_j(t)$,使得 $[\hat{H}(t), \hat{H}(t')] \sim 0$ [36–40], 来避免这个问题。而另一个极端,在突变的极限,控制场非常的强大,它能够掩盖偏移哈密顿量所产生的动力学。

而本章中新的控制范例是以惯性定理为基础的 [30], 为此我们引入了动力学对应法则 Λ_t 的显式解法。惯性定理是用一个李代数来表示的, 这个李代数由一组算符组成, $\mathcal{G}$, 这些算子与对易关系密切。我们假设这些算符在控制哈密顿量方程 (6.1) 中, $\hat{H}_0$ 和 $\hat{G}_j$ 是算符代数的成员算符。因此, $\mathcal{G}$ 的海森堡方程是封闭的 [41]。在 Liouville 空间中, 一个向量空间由 $\mathcal{G}$ 算符与标量积 $(\hat{G}_i, \hat{G}_j) \equiv \text{tr}(\hat{G}_i^\dagger \hat{G}_j)$ 组成, 海森堡方程变成

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(t) = -i\mathcal{M}(t) \vec{v}(t) , \quad (6.2)$$

其中, $\mathcal{M}$ 是一个 $N \times N$ 矩阵, 且其矩阵元随时间变化, 而 $\vec{v}$ 是一个以 $\{\mathcal{G}\}$ 为基长度为 N 的矢量算符。现在, 时间顺序问题转化到了 $\mathcal{M}(t)$ 上面。为了克服这一问题, 我们可以将依赖于时间的操作算符基和控制协议 $g_j(t)$ 结合起来, 从而对显式依赖于时间的特性进行分解。

$$\mathcal{M}(t) = \Omega(t) \mathcal{B}(\vec{\chi}) . \quad (6.3)$$

这里, $\Omega(t)$ 是含时的实函数, 而矩阵 $\mathcal{B}(\vec{\chi})$ 是常数系数 $\{\chi\}$ 的函数。对于 $SU(2)$, $SU(3)$ 和 Heisenberg-Weyl 代数, 这种分解已经得到了。我们猜想这样的分解是普遍的。因为我们已经得到了分解的具体形式, 所以动力学可以表示为

$$\frac{d}{d\theta} \vec{v}(\theta) = -i\mathcal{B}(\vec{\chi}) \vec{v}(\theta) . \quad (6.4)$$

这里, $\theta \equiv \theta(t) = \int_0^t dt' \Omega(t')$ 是归一化时间。而方程(6.4)的解可以通过对角化 $\mathcal{B}$ 来得到, 也就是

$$\vec{v}(\theta) = \sum_k^N c_k \vec{F}_k(\vec{\chi}) e^{-i\lambda_k \theta} , \quad (6.5)$$

其中, $\vec{F}_k$ 和 λ_k 分别是 $\mathcal{B}$ 的本征矢量和本征值, c_k 是常数系数。每一个本征矢量 $\vec{F}_k$ 都对应于本征算符 $\hat{F}_k = \sum_j f_{kj}(t) \hat{G}_j$ 。

惯性定理允许超越分解方程(6.3)给出的限制来求解动力学。对一个缓慢变化的 $\mathcal{B}$, 与绝热定理类似, 惯性定理指出, 一个缓慢变化的 $\mathcal{B}$ 的特征算子在积累相位阶段保持不变。惯性解得到这种形式

$$\vec{v}(\chi, \theta) = \sum_k c_k e^{-i \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' \lambda_k} e^{i\phi_k} \vec{F}_k(\vec{\chi}(\theta)) , \quad (6.6)$$

其中, $\vec{F}_k$ 和 λ_k 是在归一化时间 θ 下的 $\mathcal{B}$ 的本征矢量和本征值。 $-i \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' \lambda_k$ 是动

力学相位, 而 $\lambda_k = \lambda_k(\theta)$, $\theta_0 = \theta(0)$ 并且 $\theta = \theta(t)$ 。第二个指数包含一个新的几何相位

$$\phi_k(\theta) = i \int_{\vec{\chi}(\theta_0)}^{\vec{\chi}(\theta)} d\vec{\chi} \left(\vec{G}_k | \nabla_{\vec{\chi}} \vec{F}_k \right) . \quad (6.7)$$

这里, $\vec{G}_k$ 与 $\vec{F}_k$ 正交, 并且惯性参数定义为

$$\Upsilon = \max_{\vec{\chi}} \left[\frac{\left(\vec{G}_k, \nabla_{\vec{\chi}} \mathcal{B} \vec{F}_n \right)}{(\lambda_n - \lambda_k)^2} \left(\frac{d\vec{\chi}}{d\theta} \right)^2 \right] \ll 1 , \quad (6.8)$$

对所有的 $n \neq k$ 。

惯性解由方程(6.6)的本征算符组成, 适用于 $\vec{\chi}$ 缓慢变化的情况, $d\vec{\chi}/dt \ll 1$, $\Upsilon \ll 1$ 。在物理上, $d\vec{\chi}/dt$ 上的情况与演化的缓慢“加速”有关 [30]。在绝热极限下, 分解方程(6.3)得到满足, 惯性解收敛于绝热结果。我们将在 $SU(2)$ 代数中演示惯性解。

现在, 我们来考虑一个二级系统 (TLS), 并且我们将用这个系统来实现 $SU(2)$ 代数。在演示中, 我们选择了一个动态映射 Λ_t , 它以非周期的方式改变能量尺度并控制能量与相干性之间的关系。控制的哈密顿量如下

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} (\omega(t) \hat{\sigma}_z + \varepsilon(t) \hat{\sigma}_x) , \quad (6.9)$$

其中控制协议的具体数学形式如下

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \Omega(t) \cos(\alpha(t)t) \\ \varepsilon(t) &= \Omega(t) \sin(\alpha(t)t) \end{aligned} \quad (6.10)$$

这里, ω 和 ε 分别是失谐和拉比频率。并由此可以定义广义拉比频率为 $\Omega(t) \equiv \sqrt{\varepsilon^2(t) + \omega^2(t)}$ 。

为了分解运动方程, 我们定义了一个依赖于时间的算符基 $\vec{v} = \{\hat{H}, \hat{L}, \hat{C}, \hat{I}\}^T$, 其中 $\hat{L}(t) = (\varepsilon(t) \hat{\sigma}_z - \omega(t) \hat{\sigma}_x)/2$, $\hat{C}(t) = (\Omega(t)/2) \hat{\sigma}_y$ 并且 $\hat{I}$ 是不变的单位算符。由于 $\hat{I}$ 代表的是恒定不变的运动, 所以我们使用一个 3×3 的矢量空间来描述演化动力学就已经足够了。一个满足方程(6.3)分解的外部驱动协议, 需要有一个常数的绝热参数 μ 。绝热参数形式如 $|\mu(t)| \sim \sum_{n \neq m} \frac{|(E_m(t)| \dot{H}(t) |E_n(t))|}{(E_m(t) - E_n(t))^2}$, 并且对于哈密顿量, 方程(6.9), 定义如下

$$\mu \equiv \frac{\dot{\omega}\varepsilon - \dot{\varepsilon}\omega}{\Omega^3} . \quad (6.11)$$

然后, 矩阵 $\mathcal{B}(\vec{\chi})$ 可以化为如下形式

$$\mathcal{B}(\mu) \equiv i \frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2} \mathcal{I} + \mathcal{B}' , \quad (6.12)$$

其中

$$B'(\mu) \equiv i \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 \\ -\mu & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

这里, $\mathcal{I}$ 是 Liouville 空间中的一个 3×3 的单位算符, 并且在 $SU(2)$ 模型中 $\vec{\chi}$ 可以被认为是 $\vec{\chi} = \mu$ 。利用惯性定理研究绝热参数的缓慢变化 ($\dot{\mu} \ll 1$), 这样的系统的动力学可以由方程(6.6)来描述。

在实验中, 我们通过选择与绝热参数线性变化相关的协议来检验惯性解的有效性, 即 $\frac{d\mu}{dt} = \delta$

$$\mu(t) = \mu(0) + \delta \cdot t. \quad (6.14)$$

此外, 我们考虑了协议的频率的线性啁啾

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \gamma \cdot t. \quad (6.15)$$

方程(6.14)和(6.15)决定了拉比频率的具体形式, 把这两个方程代入到方程(6.11)中可以得到 $\Omega(t) = -\frac{\alpha(0)+2\alpha(t)t}{\mu}$ 。对于这个协议来说, 频率 $\omega(t)$ 和 $\epsilon(t)$ 将变成

$$\begin{aligned} \omega(t) &= -\frac{(\alpha(0)+2\gamma t)}{\mu(0)+\delta t} \cdot \cos((\alpha(0) + \gamma t) \cdot t) \\ \epsilon(t) &= -\frac{(\alpha(0)+2\gamma t)}{\mu(0)+\delta t} \cdot \sin((\alpha(0) + \gamma t) \cdot t) \end{aligned} \quad (6.16)$$

惯性近似的质量与参数 δ 直接相关。对于较小的 δ , 满足惯性近似, 惯性解保持精确。

动力学映射可以采用含时控制协议来进行评估, 如方程(6.16)。我们选择初态 $\vec{v}(0) = \{\hat{H}(0), 0, 0, 1\}$ 为系统处于基态 $\langle \hat{H}(0) \rangle = -\Omega(0)/2$ 的情况。在这些条件下, 我们比较了实验测量的归一化能量 $\langle \hat{H}(t) \rangle / \langle \hat{H}(0) \rangle$ 和惯性解, 如方程(6.6), 同时我们还比较了由哈密顿量(6.9)给出的方程(6.2)的数值计算结果。这里, 惯性解和数值解都由 Liouville 空间中的矢量 $\vec{v} = \{\hat{H}, \hat{L}, \hat{C}, \hat{I}\}^T$ 给出。

6.2 惯性定理的实验验证

在本实验中, 我们使用了单个囚禁离子 $^{171}\text{Yb}^+$ 来研究分析惯性理论。如图 6.1 所示, 离子被囚禁在一个六针尖结构的 Paul 阱中。为了方便实验研究, 我们把二能级编码到 $^{171}\text{Yb}^+$ 的核自旋超精细劈裂中, 并记为 $|0\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ 以及 $|1\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ [42]。在多普勒冷却之后, 采用标准的光泵浦方法, 我们可以以非常高的保真度将系统初始化为 $|0\rangle$ 状态。然后, 利用可编程任意波形发生器 (AWG), 我们可以根据惯性协议, 制造出相对应的哈密顿量 [43, 44], 进而驱动量子比特演化。如方程(6.9)中的哈密顿量中的组成部分 $\hat{\sigma}_z$ 和 $\hat{\sigma}_x$, 其实

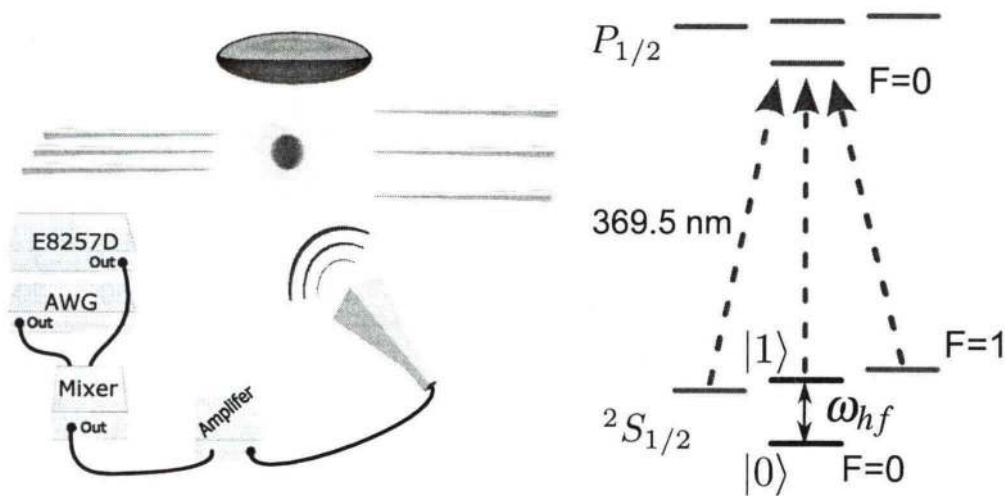


图 6.1 实验中使用的实验装置和相关的能级，其中我们重点对实验实现中使用的两能级系统进行编码。

就是对应于调控微波的频率和振幅。而对于广义的拉比频率 $\Omega(t)$ ，我们只需要同时调节微波的幅度，以及微波频率 ω_0 与跃迁频率 ω_{hf} 之间的差值即可，这里 ω_{hf} 是离子的 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态之间的跃迁频率。

我们利用 AWG 实现了惯性解的时频协议。对每个实验方案，计算归一化能量是时间的函数 $\langle \hat{H}(t) \rangle / \langle \hat{H}(0) \rangle$ 。态探测程序是通过使用 369.5 nm 激光的荧光探测实现的，其中 $|1\rangle$ 态的布居数测量保真度是非常高的 [43, 44]。如图 6.1 所示，如果电子处于 $|1\rangle$ 态那么我们可以探测到若干个光子，而电子处于 $|0\rangle$ 态，则探测不到光子，这个态分辨的保真度是 99.4% [43, 45]。

6.2.1 实验结果及分析

如图 6.2 所示，给出了归一化能量随着时间变化的情况，并将实验结果（蓝色）与惯性解（红色）和精确数值解（黑色）进行了比较。对于 δ 比较小的情况（见图 (c) 和 (d)），理论计算结果与实验结果吻合较好，表明此时惯性解具有非常高的精度。

随着 $|\delta| = |d\mu/dt|$ 慢慢变大，我们可以看到惯性解慢慢变得不再适用。如图 6.2 中的 (a)-(f)，对比了不同的 δ 值得结果，从一个负的很大的值 ($\delta = -\alpha(0)$)，变化到一个正的很大的值 ($\delta = 0.1 \cdot \alpha(0)$)。对于 $|\delta|$ 较大的情况，随着 $|\delta|$ 慢慢变大，如图中 (a), (b), (e) 以及 (f)，惯性解的归一化能量值与实验结果的偏差不断增大。

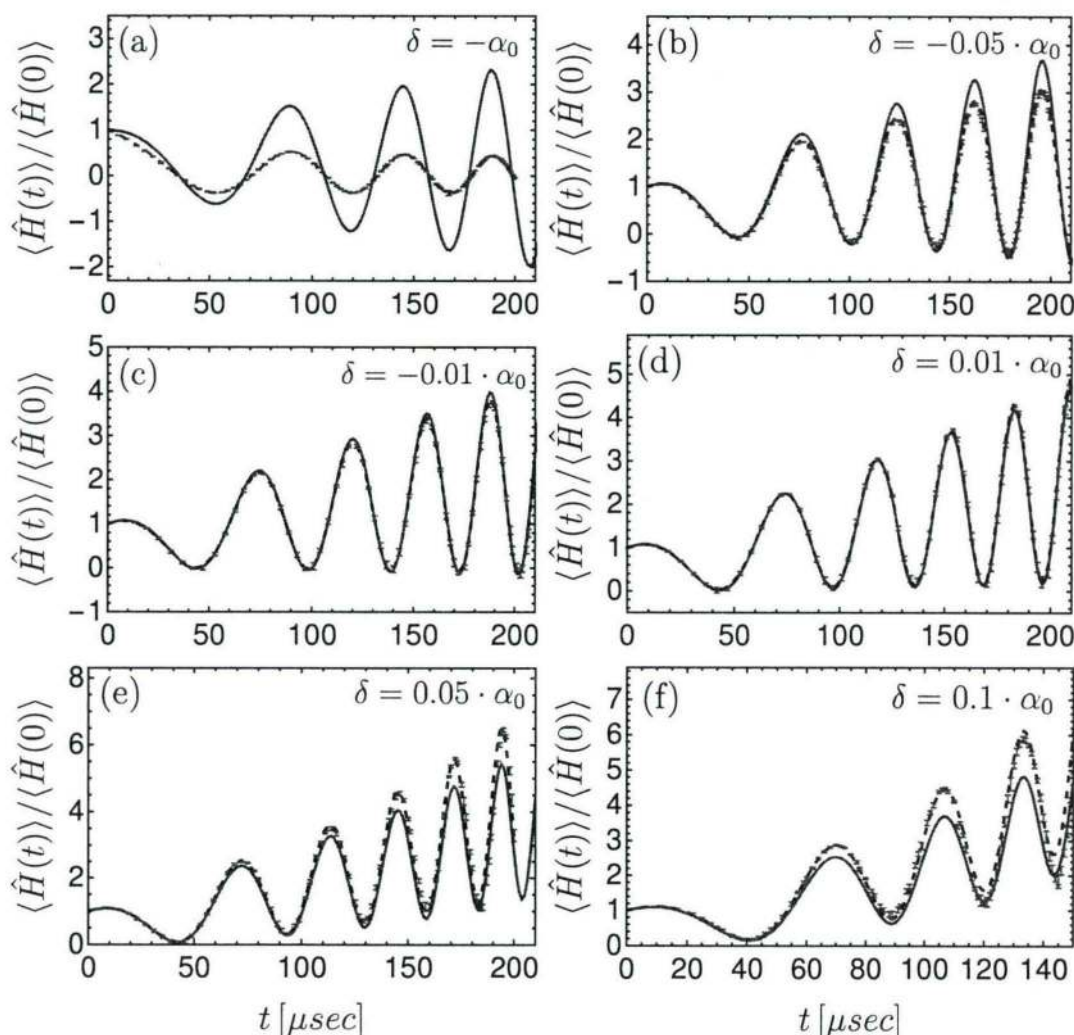


图 6.2 归一化能量随时间变化。蓝色表示实验测量的结果，红色表示惯性解，黑色表示数值解。(a) $\delta = -\alpha(0)$, (b) $\delta = -0.05 \cdot \alpha(0)$, (c) $\delta = -0.01 \cdot \alpha(0)$, (d) $\delta = 0.01 \cdot \alpha(0)$, (e) $\delta = 0.05 \cdot \alpha(0)$, (f) $\delta = 0.1 \cdot \alpha(0)$ 。实验中用到的参数为, $\alpha(0) = 6 \cdot 2\pi \text{KHz}$, $\gamma = 50 \cdot 2\pi \text{M}(\text{Hz})^2$ with $\mu(0) = -1$ 。惯性近似的质量与 $|\delta| = |d\mu/dt|$ 的值的变化有关; 对于缓慢变化的 μ , 满足惯性近似, 结果如图 (c) 和 (d); 对于快速变化的 μ , 惯性近似就不再使用, 结果如图 (a), (b), (e) 和 (f)。

6.2.2 惯性解的修正

然而, 理论和实验结果的偏差首先出现在归一化能量振荡的幅值上, 而相位即使 $|\delta|$ 很大也不受影响, 如图 6.2 中的 (a), 此时 $\delta = -\alpha(0)$ 。这种特殊的结果, 其实可以通过计算惯性解的修正项来合理化。结合方程 (6.12) 和方程 (6.4), 再定义 $\vec{v} \equiv (\Omega(t)/\Omega(0)) \vec{u}$, 我们可以得到

$$\frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} = -i\mathcal{B}'(\mu(\theta)) \vec{u}(\theta) \quad (6.17)$$

接着, 我们定义 $\mathcal{B}'(\mu)$ 的瞬时对角化矩阵, 满足 $\mathcal{P}^{-1}(\mu) \mathcal{B}'(\mu) \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{D}(\mu)$

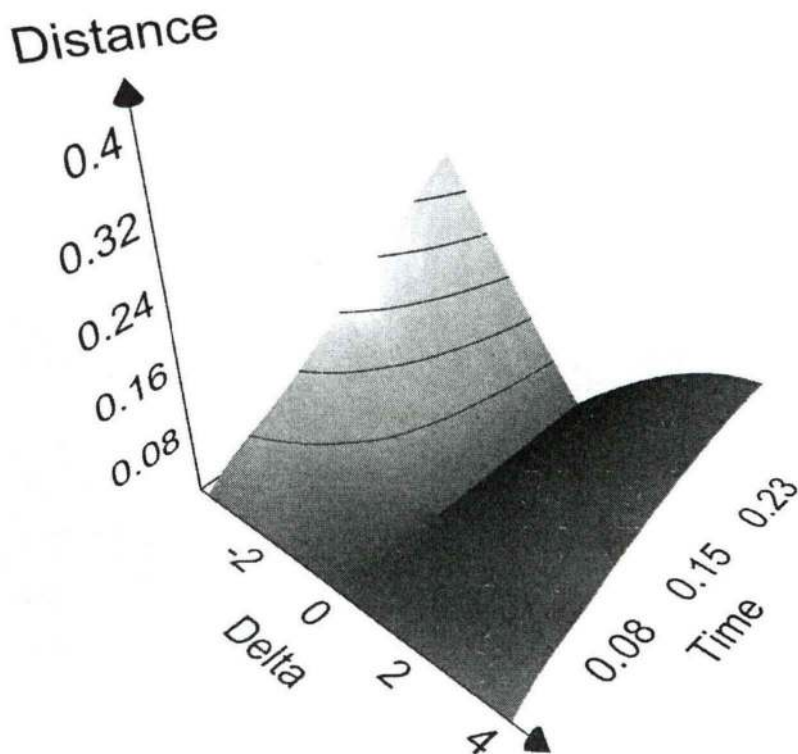


图 6.3 惯性解与精确数值解之间的欧几里得距离 $\mathcal{D}$ 随着 δ 和时间变化。当 $\delta = 0$ 的时候，任何时候惯性解都是精确的。当 $|\delta|$ 比较大的时候，欧几里得距离 $\mathcal{D}$ 随着时间和 $|\delta|$ 的增加而变大。

和 $\vec{u}(\theta) = \mathcal{P}(\mu) \vec{w}(\theta)$ 。可以得到，精确的系统动力学可以表示为

$$\frac{d\vec{w}(\theta)}{d\theta} = -i\mathcal{D}\vec{w}(\theta) - \mathcal{P}^{-1}\frac{d\mathcal{P}}{d\theta}\vec{w}(\theta) \tag{6.18}$$

对于一个缓慢变化的 μ ， $\mathcal{B}'$ 和相应的 $\mathcal{P}$ 相对于 θ 的变化缓慢。这个特性使得我们可以忽略方程(6.18)中的第二项，它在性质上类似于惯性近似。 $\mathcal{O}(\theta) = \mathcal{P}^{-1}\frac{d\mathcal{P}}{d\theta}$ 这一项反映了与精确解的偏差，所以

$$\mathcal{O} = \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \frac{d\mu}{d\theta} \mathcal{I} + \mathcal{S} \ , \tag{6.19}$$

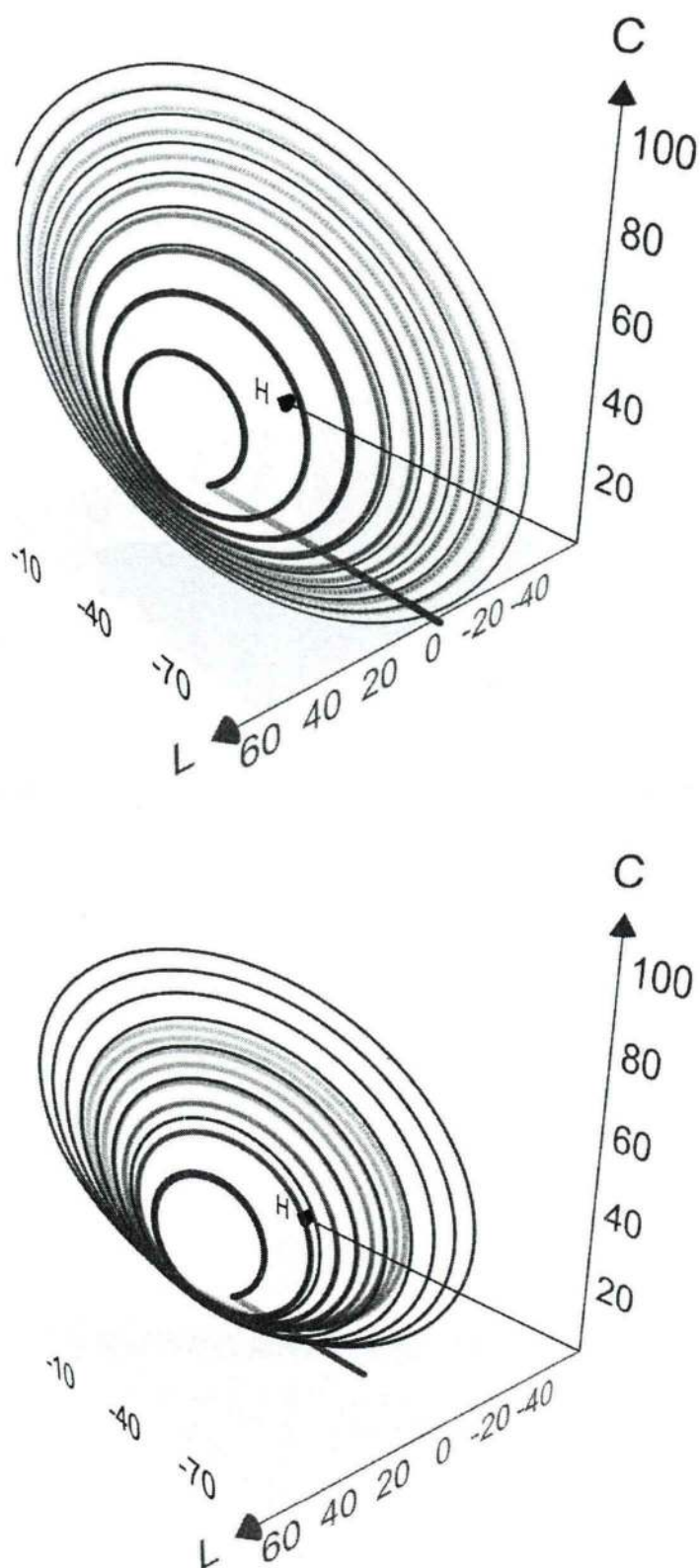


图 6.4 在 $\langle \hat{H} \rangle, \langle \hat{L} \rangle, \langle \hat{C} \rangle$ 坐标空间下的惯性轨迹 (红色), 精确数值解 (蓝色) 和绝热解 (绿色直线)。 (a) $\delta = -0.01 \cdot \alpha(0)$, (b) $\delta = -0.05 \cdot \alpha(0)$ 。

其中,

$$S = \frac{\delta}{2\Omega\kappa^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & \mu & \mu \\ -\frac{1}{2\mu} & -\mu & 0 \\ -\frac{1}{2\mu} & 0 & -\mu \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

对于方程 (6.10) 中的协议, 最主要的贡献来自于方程 (6.19) 中的第一项, 它改变了一般尺度, 并随之改变了能量幅值。惯性解的相位即使在 $|d\mu/dt| = |\delta|$ 很大的时候。

如图 6.3 所示, 惯性解与精确数值结果之间的距离 $\mathcal{D}$, 是 δ 与时间的函数。 $\mathcal{D}$ 定义为 Liouville 态矢量期望值之间的欧几里德距离,

$$\mathcal{D}(t) = \sqrt{\sum_i (\langle v^i(t) \rangle - \langle v_{num}^i(t) \rangle)^2}. \quad (6.21)$$

其中, v_i 和 v_{num}^i 是惯性解 $\bar{v}$ 和精确数值解 $\bar{v}_{num}$ 的 i 第 n 个分量。当 μ 缓慢变化时 ($\delta = -0.01$), 惯性解保持精确, 而对于较大的绝对值, 数值解和惯性解随 δ 和时间线性偏离。

在图 6.4 中, 我们给出了在 $\langle \hat{H} \rangle, \langle \hat{L} \rangle, \langle \hat{C} \rangle$ 空间中, $\delta = -0.01, -0.05$ 的惯性、数值和绝热轨迹。这种表示提供了一个完整的动力学描述, 说明了绝热解和惯性解之间的巨大偏差。

6.3 小结

利用在 Paul 阱中囚禁的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子, 我们演示了惯性定理的有效性和不适合的情况。惯性定理提供了一组非绝热协议, 它们可以在突变极限和绝热极限之间架起桥梁 [30]。实验协议包括频率上的啁啾和广义拉比频率的变化, 以及绝热参数的线性变化。设计这些协议是为了演示惯性解, 以及它对于满足绝热参数 μ 缓慢变化的协议的精度。

实验验证了该定理和执行惯性协议的能力。此外, 由于所有实验都受到各种噪声的影响 [34], 所以所获得的精度证实了惯性解的鲁棒性。这一结论得到了理论仿真的支持, 验证了该方法对小偏差和噪声的稳定性。

对于较大的偏离惯性条件情况, 即 $d\bar{\chi}/dt \rightarrow 1$, 如图 6.2 中的 (a), (b), (e) 和 (f), 误差首先出现在振幅上, 而惯性解的相位仍然是精确的。我们通过对惯性解的修正分析, 证实了这一点。并且, 在 $SU(2)$ 代数中, θ 的相位一阶校正消失。在惯性解中加入振幅校正可以获得更高的精度。相位信息可用于惯性极限以外的参数估计。

惯性解的实验验证为快速高精度控制奠定了基础。利用非绝热主方程 [46],

这种控制可以扩展到惯性驱动的开放系统 [30]。这种控制可以调节系统熵 [47]。

此外, 惯性解和绝热解以及其成立的条件的类似结构 ($d\mu/dt \rightarrow 0$ and $\mu \rightarrow 0$) 意味着量子信息处理中的类似应用 [31–34]。而另一项重要的研究涉及惯性定理对表现共振现象的高振荡场的适用性。在共振的情况下, 不能应用绝热定理 [44], 而惯性定理却仍然有效。这可以从方程(6.10)中的啁啾频率看出, $\alpha(t) = \Omega = \text{const}$, 可以推导出 $\mu = -1$ 。在这种情况下, 惯性解的推导仍然有效, 其解由方程(6.6)给出。对这些问题的详细分析将是今后研究的主题。

参考文献

- [1] Cirac J I, Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions. *Physical review letters*, 1995, 74(20):4091.
- [2] Monroe C, Meekhof D, King B, et al. Demonstration of a fundamental quantum logic gate. *Physical review letters*, 1995, 75(25):4714.
- [3] Barreiro J T, Müller M, Schindler P, et al. An open-system quantum simulator with trapped ions. *Nature*, 2011, 470(7335):486.
- [4] Rosi S, Bernard A, Fabbri N, et al. Fast closed-loop optimal control of ultracold atoms in an optical lattice. *Physical Review A*, 2013, 88(2):021601.
- [5] Mandel O, Greiner M, Widera A, et al. Coherent transport of neutral atoms in spin-dependent optical lattice potentials. *Physical review letters*, 2003, 91(1):010407.
- [6] Bloch I, Dalibard J, Zwerger W. Many-body physics with ultracold gases. *Reviews of modern physics*, 2008, 80(3):885.
- [7] Jaksch D, Cirac J, Zoller P, et al. Fast quantum gates for neutral atoms. *Physical Review Letters*, 2000, 85(10):2208.
- [8] Duan L M, Cirac J I, Zoller P. Geometric manipulation of trapped ions for quantum computation. *Science*, 2001, 292(5522):1695–1697.
- [9] Jonathan D, Plenio M, Knight P. Fast quantum gates for cold trapped ions. *Physical Review A*, 2000, 62(4):042307.
- [10] Nielsen M A, Chuang I. *Quantum computation and quantum information*, 2002.
- [11] Loss D, DiVincenzo D P. Quantum computation with quantum dots. *Physical Review A*, 1998, 57(1):120.
- [12] Kadowaki T, Nishimori H. Quantum annealing in the transverse Ising model. *Physical Review E*, 1998, 58(5):5355.
- [13] Finnila A, Gomez M, Sebenik C, et al. Quantum annealing: a new method for minimizing multidimensional functions. *Chemical physics letters*, 1994, 219(5-6):343–348.
- [14] Brooke J, Bitko D, Aeppli G, et al. Quantum annealing of a disordered magnet. *Science*, 1999, 284(5415):779–781.
- [15] Venegas-Andraca S E, Cruz-Santos W, McGeoch C, et al. A cross-disciplinary introduction to quantum annealing-based algorithms. *Contemporary Physics*, 2018, 59(2):174–197.
- [16] Johnson M W, Amin M H, Gildert S, et al. Quantum annealing with manufactured spins. *Nature*, 2011, 473(7346):194.
- [17] Santoro G E, Martonak R, Tosatti E, et al. Theory of quantum annealing of an Ising spin glass. *Science*, 2002, 295(5564):2427–2430.

- [18] Roßnagel J, Dawkins S T, Tolazzi K N, et al. A single-atom heat engine. *Science*, 2016, 352(6283):325–329.
- [19] Pekola J P. Towards quantum thermodynamics in electronic circuits. *Nature Physics*, 2015, 11(2):118.
- [20] Doherty M W, Manson N B, Delaney P, et al. The nitrogen-vacancy colour centre in diamond. *Physics Reports*, 2013, 528(1):1–45.
- [21] Doherty M, Dolde F, Fedder H, et al. Theory of the ground-state spin of the NV- center in diamond. *Physical Review B*, 2012, 85(20):205203.
- [22] Bar-Gill N, Pham L M, Jarmola A, et al. Solid-state electronic spin coherence time approaching one second. *Nature communications*, 2013, 4:1743.
- [23] Häffner H, Roos C F, Blatt R. Quantum computing with trapped ions. *Physics reports*, 2008, 469(4):155–203.
- [24] Kielpinski D, Monroe C, Wineland D J. Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer. *Nature*, 2002, 417(6890):709.
- [25] Makhlin Y, Schön G, Shnirman A. Quantum-state engineering with Josephson-junction devices. *Reviews of modern physics*, 2001, 73(2):357.
- [26] Martinis J M, Nam S, Aumentado J, et al. Rabi oscillations in a large Josephson-junction qubit. *Physical review letters*, 2002, 89(11):117901.
- [27] Svetitsky E, Suchowski H, Resh R, et al. Hidden two-qubit dynamics of a four-level Josephson circuit. *Nature communications*, 2014, 5:5617.
- [28] Palao J P, Kosloff R. Quantum computing by an optimal control algorithm for unitary transformations. *Physical review letters*, 2002, 89(18):188301.
- [29] Glaser S J, Boscain U, Calarco T, et al. Training Schrödinger' s cat: quantum optimal control. *The European Physical Journal D*, 2015, 69(12):279.
- [30] Dann R, Kosloff R. The Inertial Theorem. *arXiv preprint arXiv:1810.12094*, 2018..
- [31] Aharonov D, Van Dam W, Kempe J, et al. Adiabatic quantum computation is equivalent to standard quantum computation. *SIAM review*, 2008, 50(4):755–787.
- [32] Farhi E, Goldstone J, Gutmann S, et al. Quantum computation by adiabatic evolution. *arXiv preprint quant-ph/0001106*, 2000..
- [33] Farhi E, Goldstone J, Gutmann S, et al. A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of an NP-complete problem. *Science*, 2001, 292(5516):472–475.
- [34] Childs A M, Farhi E, Preskill J. Robustness of adiabatic quantum computation. *Physical Review A*, 2001, 65(1):012322.
- [35] Perdomo-Ortiz A, Fluegemann J, Narasimhan S, et al. A quantum annealing approach for fault detection and diagnosis of graph-based systems. *The European Physical Journal Special Topics*, 2015, 224(1):131–148.

- [36] Messiah A. Quantum Mechanics 2 Volumes, 2003.
- [37] Comparat D. General conditions for quantum adiabatic evolution. *Physical Review A*, 2009, 80(1):012106.
- [38] Mostafazadeh A. Quantum adiabatic approximation and the geometric phase. *Physical Review A*, 1997, 55(3):1653.
- [39] Sarandy M, Lidar D. Adiabatic approximation in open quantum systems. *Physical Review A*, 2005, 71(1):012331.
- [40] Kato T. On the adiabatic theorem of quantum mechanics. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1950, 5(6):435–439.
- [41] Alhassid Y, Levine R. Connection between the maximal entropy and the scattering theoretic analyses of collision processes. *Physical Review A*, 1978, 18(1):89.
- [42] Olmschenk S, Younge K C, Moehring D L, et al. Manipulation and detection of a trapped Yb^+ hyperfine qubit. *Phys. Rev. A*, 2007, 76:052314.
- [43] Hu C K, Cui J M, Santos A C, et al. Experimental implementation of generalized transitionless quantum driving. *Opt. Lett.*, 2018, 43(13):3136–3139.
- [44] Hu C K, Cui J M, Santos A C, et al. Validation of Quantum Adiabaticity through Non-Inertial Frames and Its Trapped-Ion Realization. *arXiv e-prints*, 2018. arXiv:1810.02644.
- [45] Hu C K, Santos A C, Cui J M, et al. Quantum thermodynamics in adiabatic open systems and its trapped-ion experimental realization. *arXiv preprint arXiv:1902.01145*, 2019..
- [46] Dann R, Levy A, Kosloff R. Time-dependent Markovian quantum master equation. *Phys. Rev. A*, 2018, 98:052129.
- [47] Dann R, Tobalina A, Kosloff R. Shortcut to Equilibration of an Open Quantum System. *arXiv preprint arXiv:1812.08821*, 2018..

第七章 总结与展望

本论文的前半部分系统地介绍了囚禁离子系统的基本操作等,包括多普勒冷却、光泵浦初始化、量子态荧光探测等,还具体的描述了如何利用微波场通过偶极相互作用来调控超精细量子比特,并且利用受激拉曼跃迁来耦合离子的内部电子态和外部运动态,成功将离子的运动态制备到了基态,并且测量出系统速率,为以后对离子量子态调控打下了坚实的基础。

本论文的后半部分则基于囚禁离子系统实验研究了一些量子绝热演化的问题。首先,我们验证了绝热近似条件的有效性,提出了一个不同于以往的方案,解决了绝热近似条件在共振情况下失效的难题。然后我们在实验上完成了量子绝热近似在开放系统中的推广,并且演示了 Deutsch 算法,给出最优的演化时间窗口。最后,我们演示了惯性定理,证明了惯性解具有较好的鲁棒性,为快速高精度控制奠定了基础。

囚禁离子系统与外界环境完美隔绝,是研究量子动力学、进行量子信息处理的绝佳系统。以此为目标,在以后的工作中,我们将会继续完善系统中存在的不足,努力提高量子态操作保真度,提高量子态读出效率。还可以搭建新的基于分段的刀片结构的阱,实现对囚禁势阱的精细调节,也有利于后续使用大数值孔径的探测物镜,从根本上解决现在遇到的一些困难。

有了可靠的高保真的实验系统,我们可以深度开发高维系统,实现两离子乃至多离子的四能级的纠缠。也可以利用离子的运动态来研究腔量子电动力学、量子热力学等。还可以尝试将量子比特编码到声子态上。囚禁离子有内部电子态和外部运动态两个自由度,丰富的自由度带来了无限的可能。希望,在不久的将来,可以制造出一台基于囚禁离子系统的可编程量子计算机。

致 谢

光阴似箭，不知不觉已经五年了，在我即将完成博士论文之际，我衷心感谢所有帮助过我的良师和益友。

首先要感谢郭光灿院士，是郭老师引领我们遨游量子世界，并且给我们提供了优越的实验科研条件，我为自己能够在这样的团队里学习感觉骄傲。然后，我还要感谢李传锋老师，是李老师一直支持着离子阱平台的发展，并指明了前进的方向。

特别感谢我的导师黄运锋研究员，是他给了我来实验室学习的机会，培养了我独立从事科研工作的能力。每一个成果，从选题到实验，都离不开他的悉心指导。黄老师对前沿方向的准确把握和对物理问题的独特见解使我受益匪浅。黄老师为人正直、治学严谨、实事求是，是科研中的良师生活中的益友。我想，能跟随黄老师读博是无比幸运的。

然后感谢崔金明博士，是崔博士带领我进入离子阱的实验工作，他求真务实的作风、锲而不舍的钻研精神非常值得我学习。同时，我也要感谢我的合作者 Alan C. Santos 和他的导师 Marcelo S. Sarandy，是他们给我提供了强大的理论支持，与他们的合作极大的丰富了我的学术经历。

还要感谢指导过我的老师，他们是史保森老师、许金时老师、项国勇老师、柳必恒老师、张永生老师、易为老师、颜辉老师、陈玺老师等。感谢帮助过我的师兄，他们是曹冬阳、李萌、王钊、张超、侯志博、黄月新、王健、鲁勇、殷琪、吕为民、胡晓敏等。感谢和我一起学习、生活和工作的小伙伴们，他们是周坤、袁媛、刘肖、郑振飞、陈江山、程则迪、刘翌地、曹涇、钱忠华、艾铭忠、郑永祥、高新霞等。感谢办公室的段开敏老师、王涛老师、吴莉老师、李洪梅老师，以及朱咏梅老师、张义红老师等。

感谢我的父亲、母亲和姐姐，还有我最爱的妻子赵圆圆，谢谢你们一直支持我鼓励我，你们永远都是我前进的动力、快乐的源泉。

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文:

1. **Chang-Kang Hu***, Jin-Ming Cui*, Alan C. Santos, Yun-Feng Huang, Marcelo S. Sarandy, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo. Experimental Implementation of Generalized Transitionless Quantum Driving. *Optics Letters*, 43, 3136-3139 (2018).
2. **Chang-Kang Hu**, Alan C. Santos, Jin-Ming Cui, Yun-Feng Huang, Marcelo S. Sarandy, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo. Adiabatic quantum dynamics under decoherence in a controllable trapped-ion setup. Accepted by *Physical Review A*. (arXiv:1903.05748)

待发表论文:

1. **Chang-Kang Hu**, Jin-Ming Cui, Alan C. Santos, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo, Frederico Brito, Marcelo S. Sarandy. Validation of Quantum Adiabaticity through Non-Inertial Frames and Its Trapped-Ion Realization. arXiv:1810.02644
2. **Chang-Kang Hu**, Alan C. Santos, Jin-Ming Cui, Yun-Feng Huang, Diogo O. Soares-Pinto, Marcelo S. Sarandy, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo. Quantum thermodynamics in adiabatic open systems and its trapped-ion experimental realization. arXiv:1902.01145
3. **Chang-Kang Hu***, Roie Dann*, Jin-Ming Cui, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo, Alan C. Santos, Ronnie Kosloff. Experimental Verification of the Inertial Theorem. arXiv:1903.00404