

量子光学课外作业-2: (2021年5月7日之前交。)

1. 利用方程  $\hat{O}(t) = e^{\frac{i\hbar t}{\hbar}} \hat{O}(0) e^{-\frac{i\hbar t}{\hbar}}$  和 Baker-Hausdorff 公式求  $a^\dagger(t)$ 。

2. 求  $[a^\dagger, a^n]$  以及  $[a^\dagger, f(a, a^\dagger)]$ 。

3. 证明

$$a^\dagger |\alpha\rangle\langle\alpha| = \left( \alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| a = \left( \alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \right) |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

4. 证明平移算符在热光场中的平均值为

$$\langle D(\alpha) \rangle = \exp \left[ -|\alpha|^2 \left( \langle n \rangle + \frac{1}{2} \right) \right]$$

其中  $\langle n \rangle$  是光场的平均光子数。

5. 证明:  $\Delta A \Delta B \geq |[A, B]|/2$ , 其中 A 和 B 分别是两个厄米算符, 且  $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$ 。

6. 求  $|\Psi(t)\rangle = \exp[(ga^\dagger - g^*a)t]|0\rangle$  的光子数态展开形式, 展开到 4 光子态。

7. 求热光场, 相干态, 光子数态  $(|n\rangle)$  的  $\langle n \rangle$ ,  $\langle n^2 \rangle$  以及二阶相关度  $g^{(2)}(0)$ 。

8. 求满足 Transform limit (or Fourier limit, Fourier transform limit) 高斯光束的  $\Delta\nu\Delta\tau$ ;

其中  $\Delta\nu$  和  $\Delta\tau$  分别是其以频率 ( $\lambda\nu = c$ ) 和时间为坐标时光场强度的半高全宽。

9. 证明光场  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  是非经典场。其中  $\alpha$  和  $\beta$  是复数, 并满足归一化条件  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。

10. 设有一个光场态的密度算符为:

$$\rho = N a^{\dagger m} e^{-\kappa a^\dagger a} a^m, \text{ 其中 } N \text{ 是归一化系数, } \kappa = \hbar\omega/k_B T.$$

1). 证明: 当  $\kappa \rightarrow +\infty$ , 它是一个光子数态; 当  $\kappa \rightarrow 0$ , 它是一个热光场态。

2). 求  $g^{(2)}(0)$ , 并证明当  $\bar{n} < \sqrt{\frac{m}{m+1}}$  时是亚泊松分布, 其中  $\bar{n} = 1/[\exp(\kappa) - 1]$ 。

11. 调研并论述双光子 Franson 干涉。