4-04 衍射光栅，三维光栅

多缝夫琅和费衍射：

1 实验装置和衍射图样

2 N缝衍射的振幅和强度分布

3 缝间干涉因子的特点

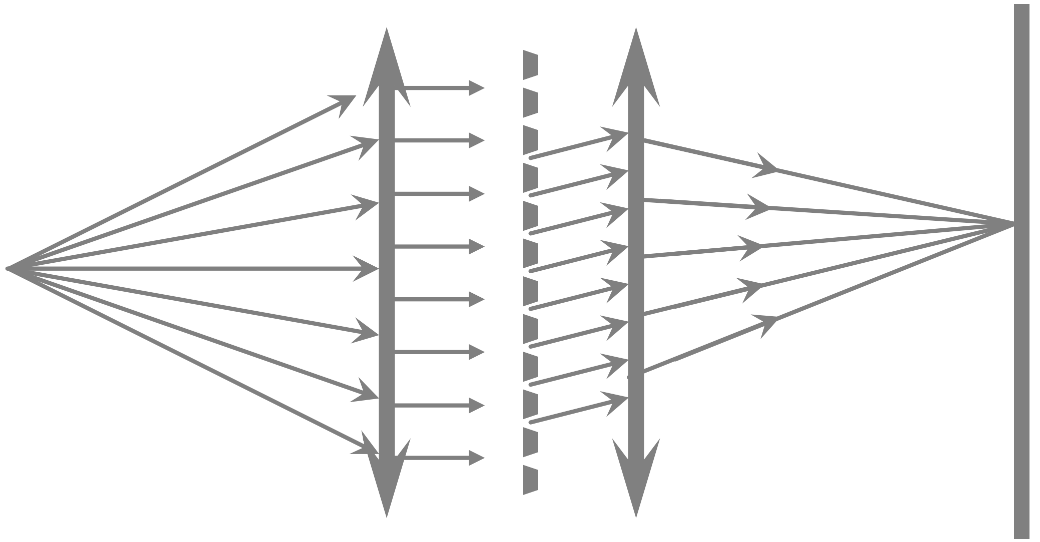
4 单缝衍射因子的作用

补：干涉和衍射的区别与联系

5 复振幅的计算 黑白光栅和正弦光栅

多缝夫琅和费衍射

光栅(grating)：具有周期性空间结构或光学性能的衍射屏统称为光栅



一维光栅是最常见的光栅：线密度、有效宽度（总线数）。

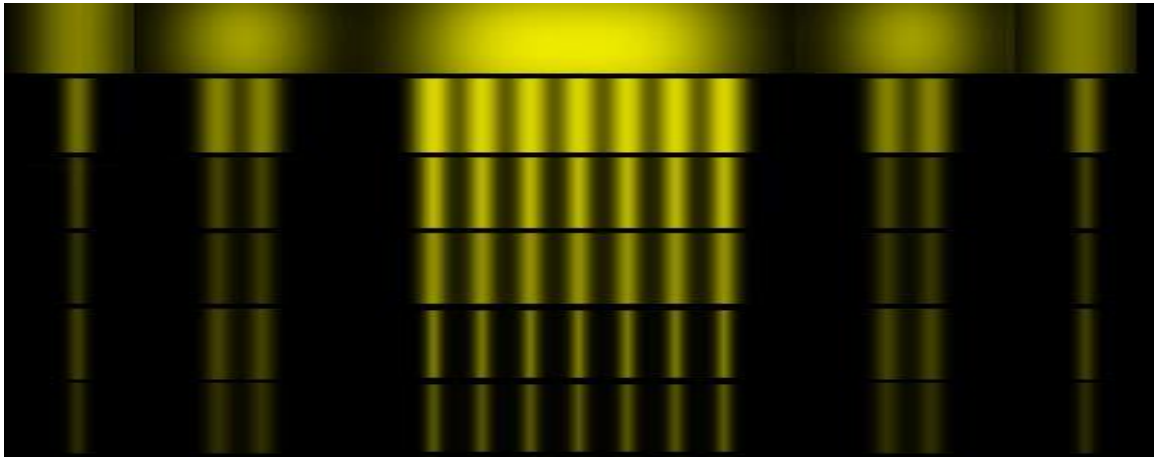
1. 实验装置和衍射图样

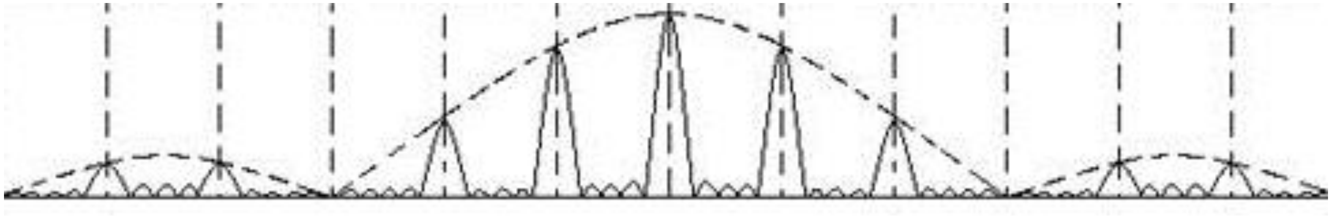
衍射图样：

i) 存在主极强与次极强；

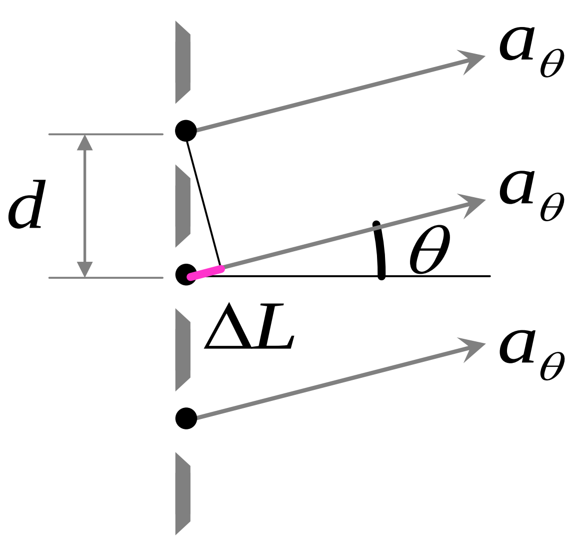
ii) 主极强的位置与缝数*N*无关，宽度随*N*减小， 强度与N^2成正比；

iii) 相邻主极强间有*N-1*条暗纹和*N-2*条次极强。

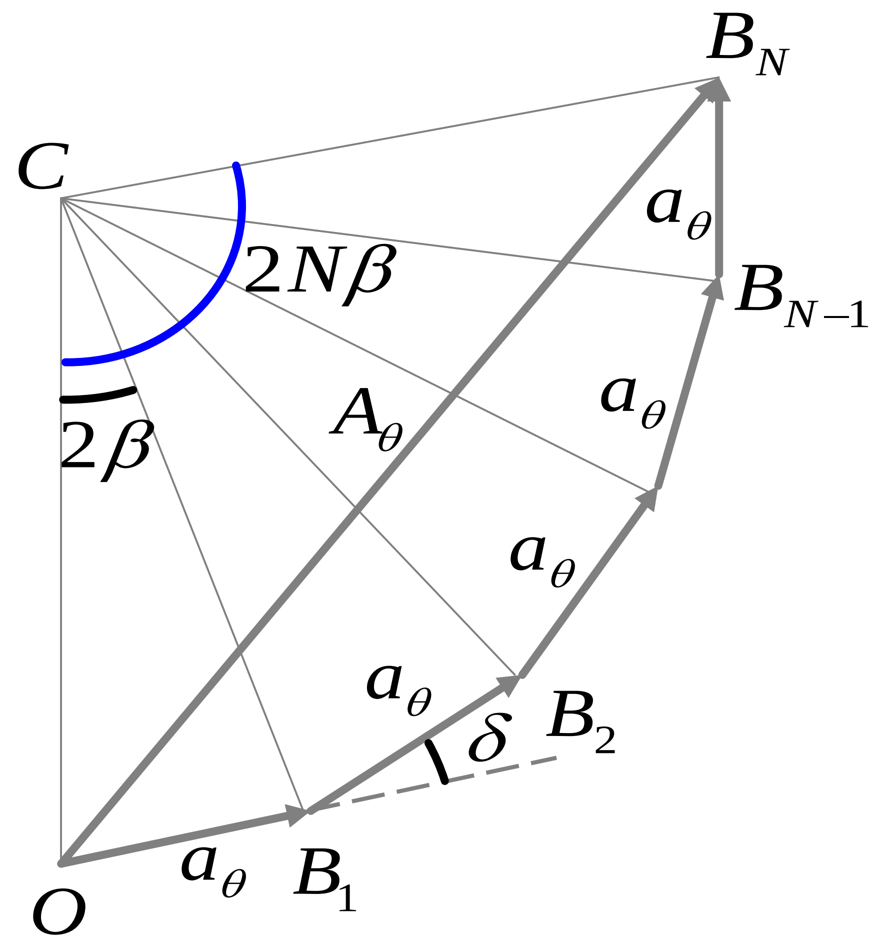




2. N缝衍射的振幅和强度分布



$$a_\theta = a_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$

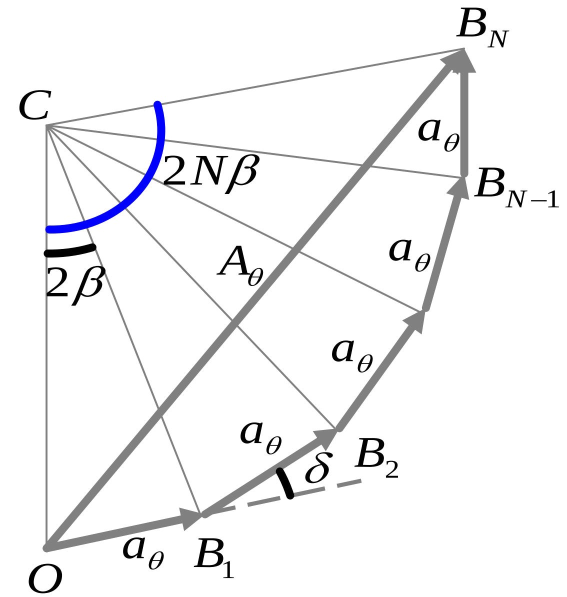


缝间位相差: $\Delta L = d\sin\theta$

缝间光程差: $\delta = \dfrac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$

$$\overline{OC}=\frac{a_\theta}{2\sin\beta}$$

$$\overline{OB_N}=2\overline{OC}\sin N\beta$$



$$A_\theta=a_\theta\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

$$I_\theta=a_\theta^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

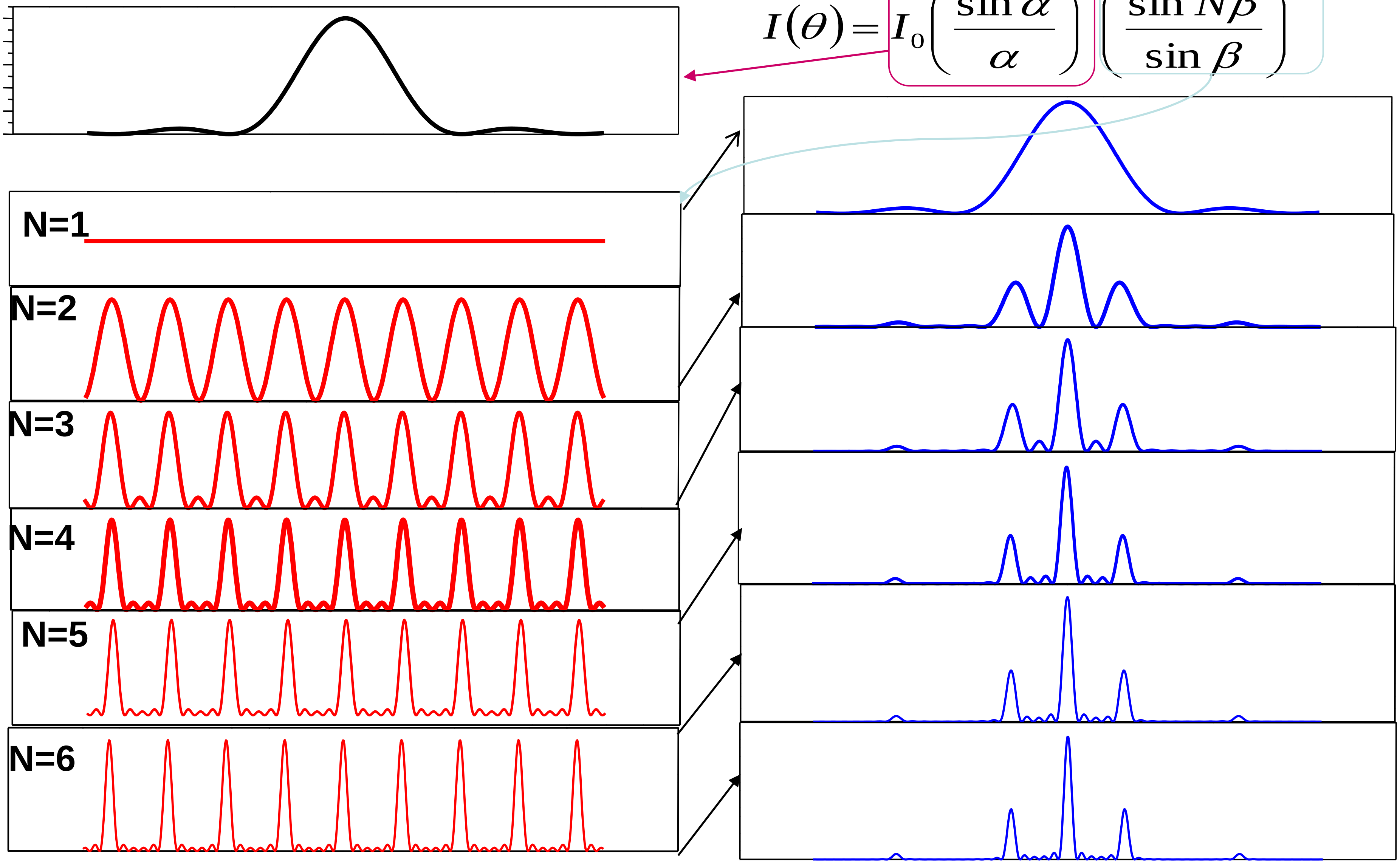
$$=a_0^2\boxed{\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}\boxed{\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2}$$

其中： $\alpha=\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$

$$\beta=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

单缝衍射因子（单元因子）　缝间干涉因子（N元干涉因子）

$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$



3. 缝间干涉因子的特点

$$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

主极大：

光栅方程

$d\sin\theta = k\lambda$

i) 位置 $\sin(\beta) = 0, \beta = k\pi$

$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{d} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n$$

ii) 数目

$$n = [d/\lambda] \qquad (\sin\theta < 1)$$

iii)强度

单缝的 N^2倍

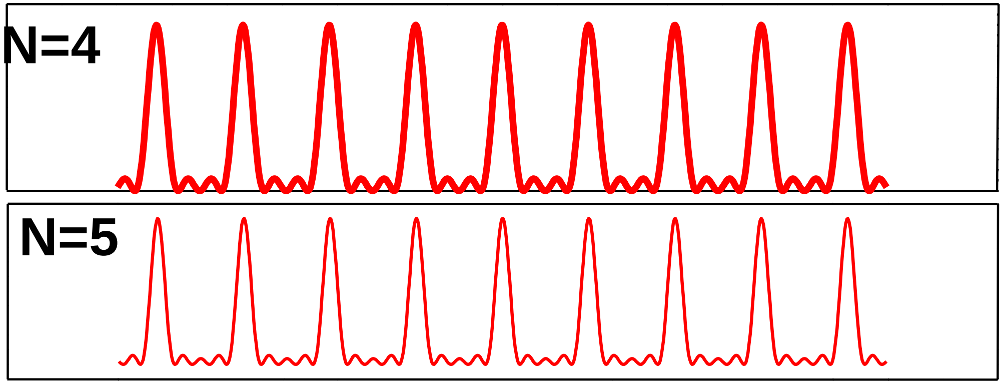
零点： $\boldsymbol{sin(N\beta) = 0, sin(\beta) \neq 0,}$

位置 $\sin\theta = \left(k + \dfrac{m}{N}\right)\dfrac{\lambda}{d}$ $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm n$

$m = 1, 2, \cdots, N-1$

次极大：

数目 $N-2$



iv) 半角宽

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$$

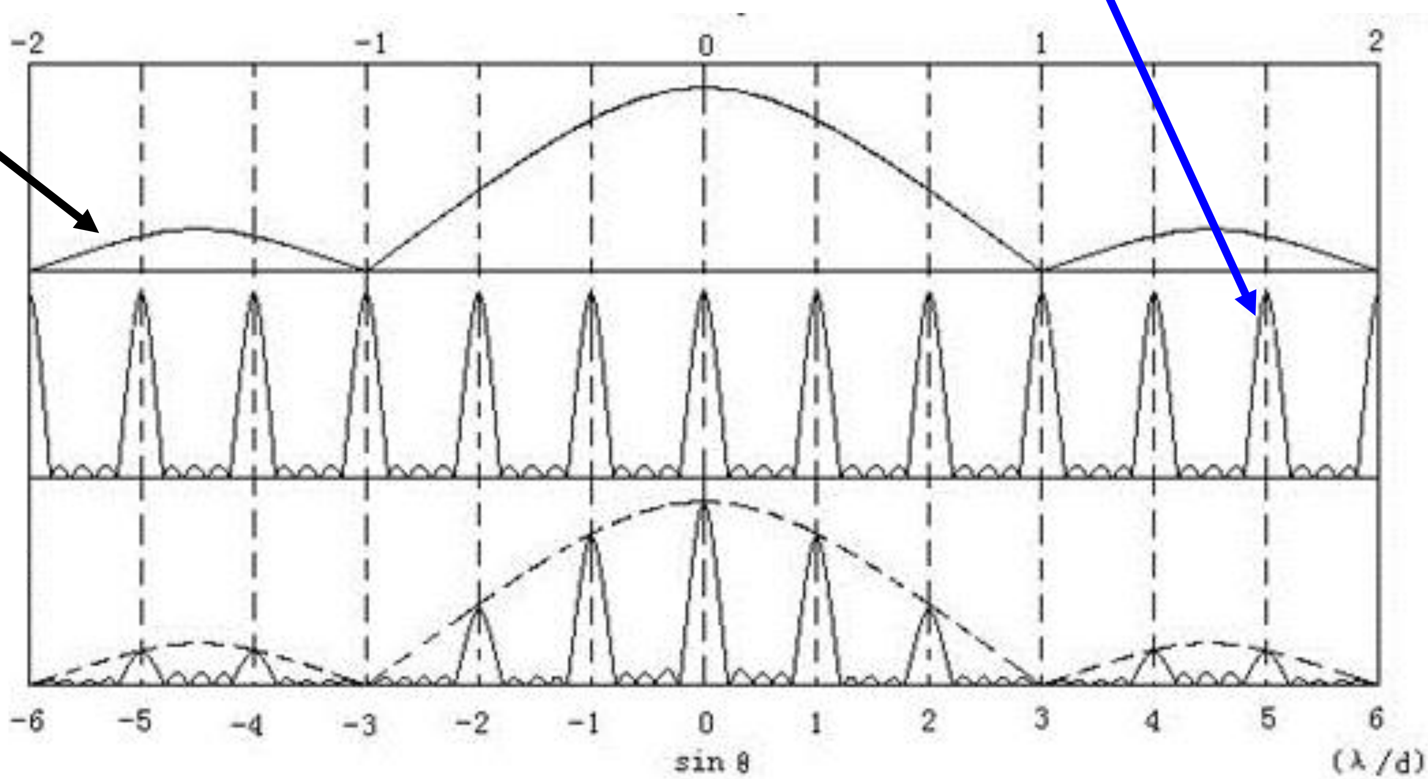
4. 单缝衍射因子的作用

i) 极大的强度被调制下降；

ii) 缺级：$k\dfrac{\lambda}{d} = k'\dfrac{\lambda}{a}$

$$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$



补：干涉和衍射的区别与联系

i) 都是光的波动性质的具体表现；

ii) 干涉指的是光波被分割成有限几束或彼此分离的无限多束，其中每束可以近似地用几何光学规律描述；

iii)衍射指的是需将光波波前分割成无限多个连续的次波源，其中每个次波源并不服从几何光学规律；

iv)干涉理论运算时，矢量图解是个折线，复振幅的迭加是个级数；而衍射理论运算时，矢量图解是光滑曲线，复振幅迭加需用积分；

v) 实际上的干涉效应总是和衍射效应同时存在的，干涉条纹要受单元衍射因子的调制。

5. 复振幅的计算 黑白光栅和正弦光栅

光程差：$L_j = L_1 + (j-1)\Delta L$

其中：$\Delta L = d\sin\theta$

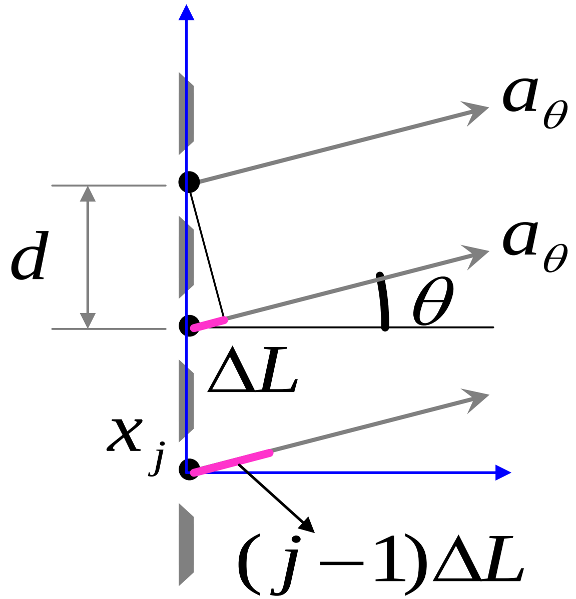
$$\tilde{U}(\theta) = C\int_{(\Sigma)} \tilde{U}_0(x) e^{-ikr} dx$$

$$= \sum_{j=1}^{N} C \int_{(\Sigma_j)} \tilde{U}_0(x_j) e^{-ikr_j} dx_j$$

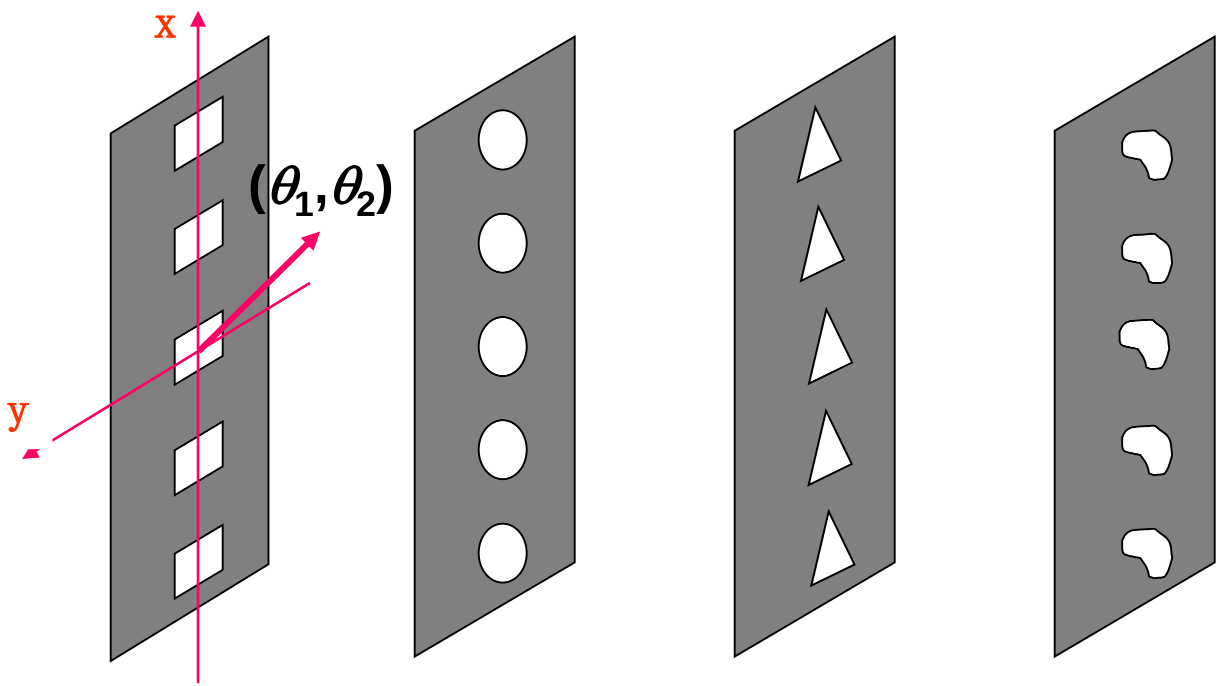
其中：$r_j = L_j - x_j \sin\theta$

$$\int_{(\Sigma_j)} \tilde{U}_0(x_j) e^{-ikr_j} dx_j = e^{-ikL_j} \int_{(\Sigma_j)} \tilde{U}_0(x_j) e^{-ikx_j\sin\theta} dx_j$$

$$= e^{-ikL_j} \int_{-a/2}^{a/2} \tilde{U}_0(x) e^{-ikx\sin\theta} dx$$



$$\tilde{U}(\theta) = C\left(\sum_{j=1}^{N} e^{-ikL_j}\right)\int_{-a/2}^{a/2}\tilde{U}_0(x)e^{-ikx\sin\theta}dx$$
$$= \tilde{N}(\theta)\tilde{u}(\theta)$$



N元干涉因子：

$$\tilde{N}(\theta) = e^{-ikL_1}\left(1 + e^{2i\beta} + e^{4i\beta} + \cdots + e^{2(N-1)i\beta}\right)$$

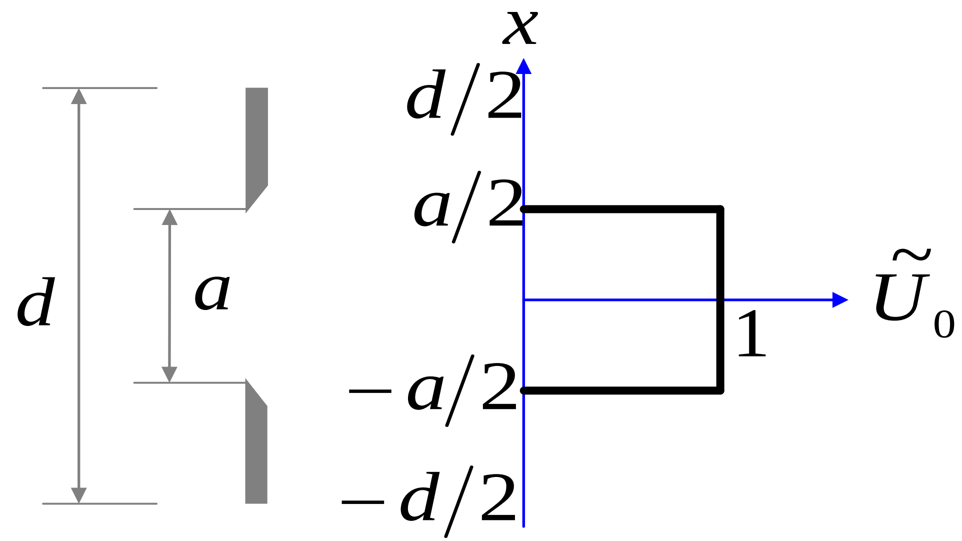
$$= e^{-ikL_1} e^{i(N-1)\beta} \frac{e^{-iN\beta} - e^{iN\beta}}{e^{-i\beta} - e^{i\beta}}$$

$$= e^{i\varphi} N(\theta)$$

其中： $\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta$ $\quad k\Delta L = 2\beta$

$$N(\theta) = \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}$$

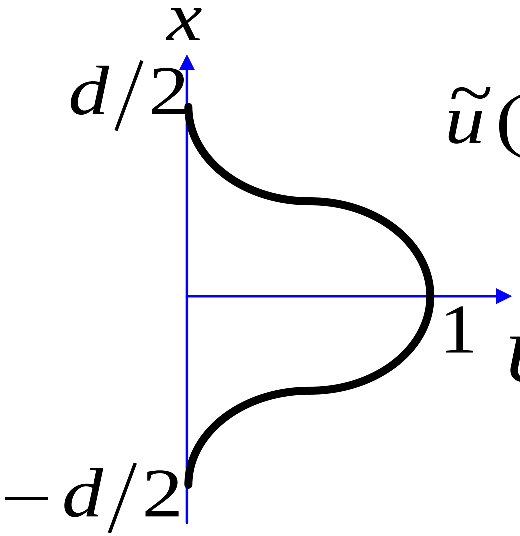
黑白光栅单元因子：



$$\tilde{u}(\theta) \propto \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx\sin\theta} dx \propto \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

其中： $$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

正弦光栅单元因子:

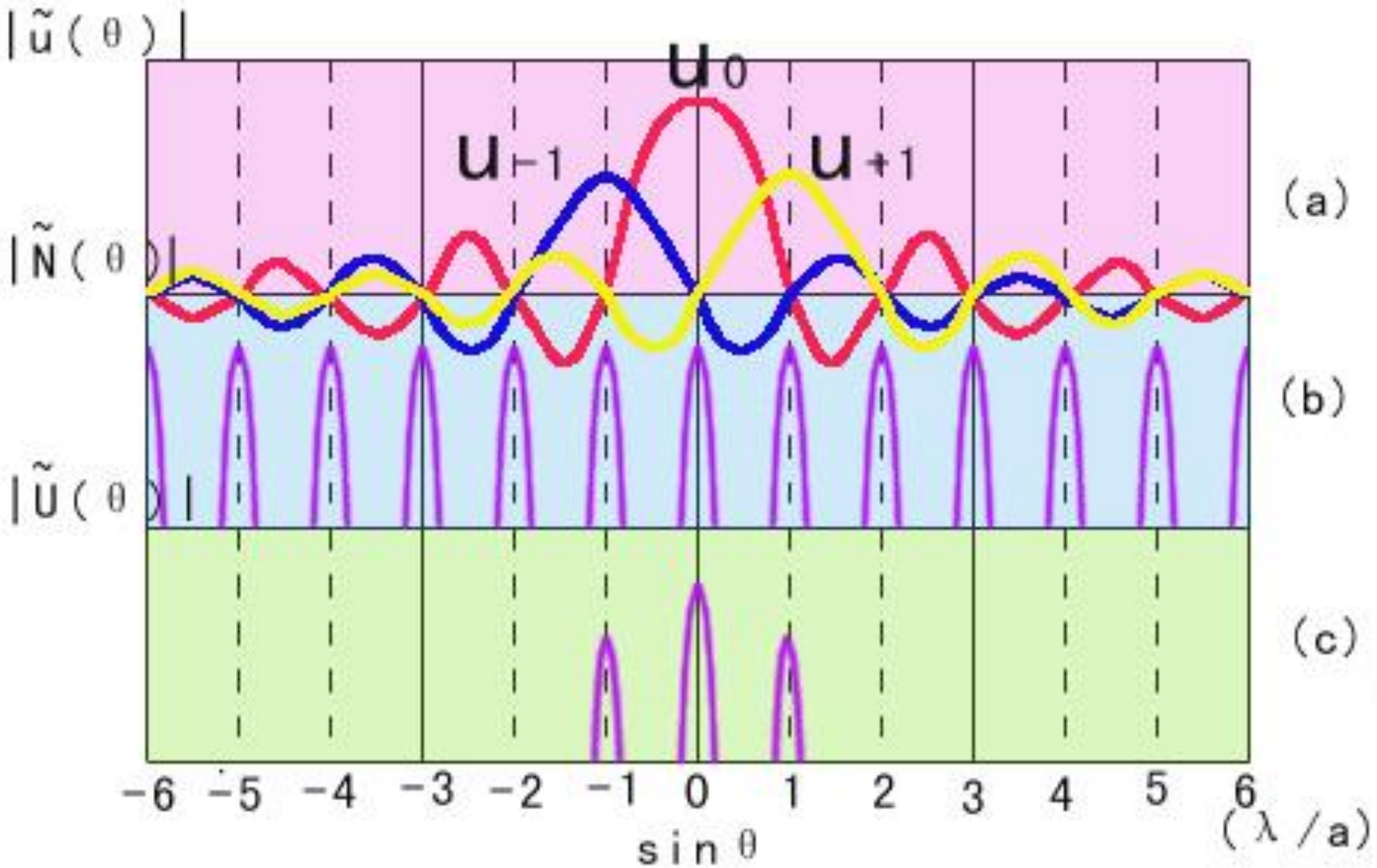


$$\tilde{u}(\theta) \propto \int_{-d/2}^{d/2} \left(1 + \cos\frac{2\pi x}{d}\right) e^{-ikx\sin\theta} dx$$

$$\tilde{U}_0 = \int_{-d/2}^{d/2} \left(1 + \frac{1}{2} e^{i2\pi x/d} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi x/d}\right) e^{-ikx\sin\theta} dx$$

$$\propto \frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\pi)}{\beta-\pi} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\beta+\pi)}{\beta+\pi}$$

有三个极大，$\beta = 0, \pm\pi$，分别与干涉因子的 $0, \pm 1$ 级极大重合，而$\tilde{N}(\theta)$的其它极大都与$\tilde{u}(\theta)$的零点重合，故衍射中只有三个峰，其中± 1的振幅为0级的一半。



|ũ(θ)|
u0
u-1
u+1
(a)
|Ñ(θ)|
(b)
|Ũ(θ)|
(c)
−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6
(λ/a)
sin θ

作业

p.16: 3, 5

三维光栅——X射线在晶体上的衍射

1 晶体点阵

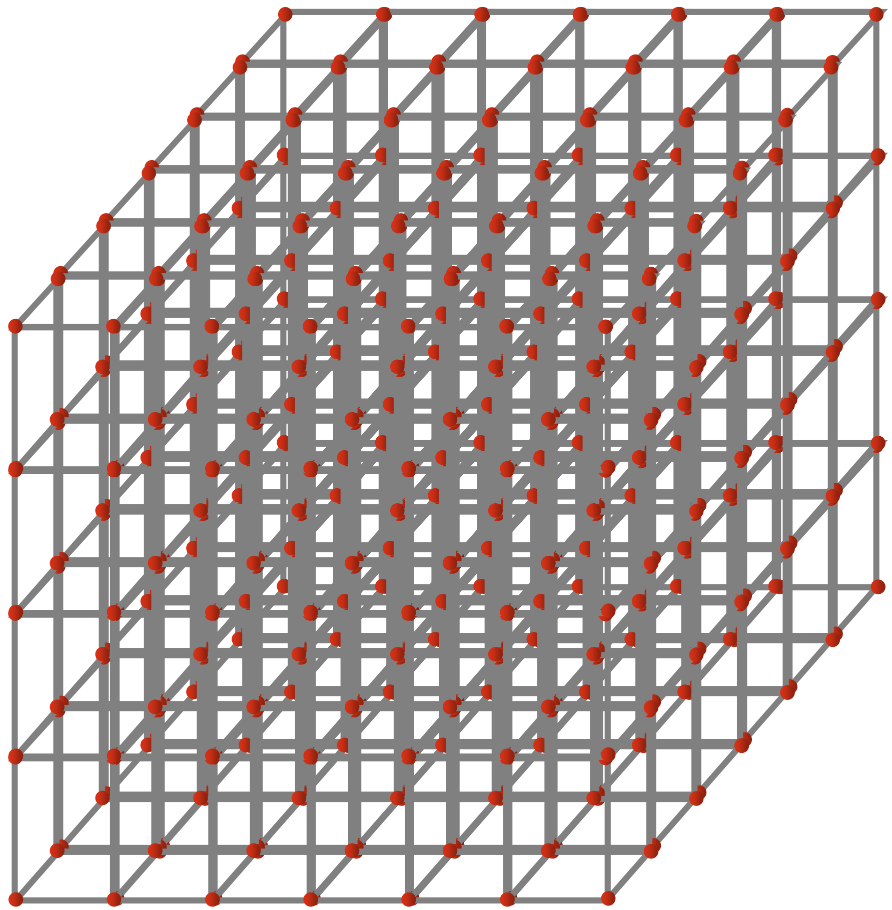
2 X射线（W.K. Röntgen, 1895）

3 X射线在晶体上的衍射—布喇格（W.L. Bragg, 1913）条件

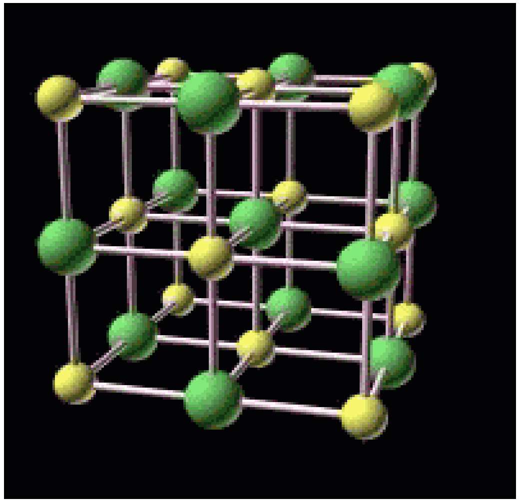
4 劳厄（M. Von Laue, 1912）照相和德拜（Debye）照相

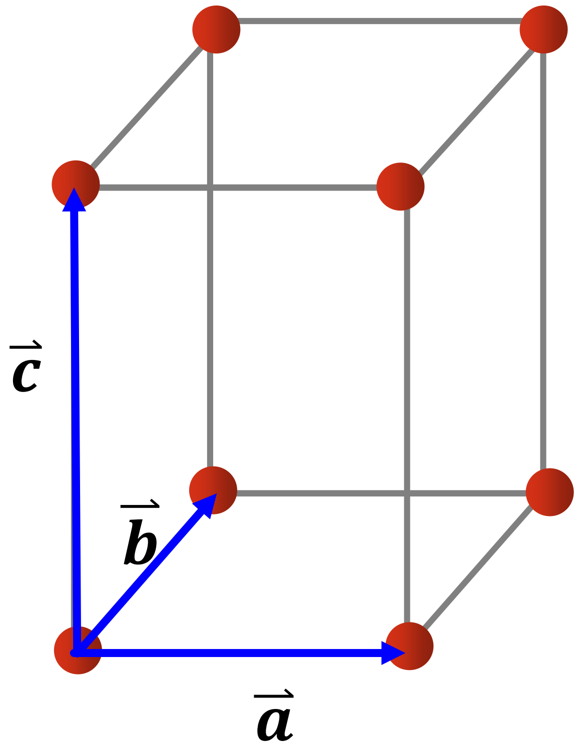
1. 晶体点阵(crystal lattice)

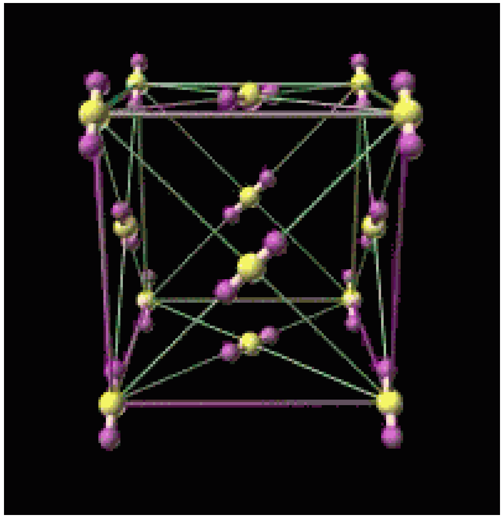
晶体：外部具有规则的几何形状，内部原子具有周期性的排列结构。



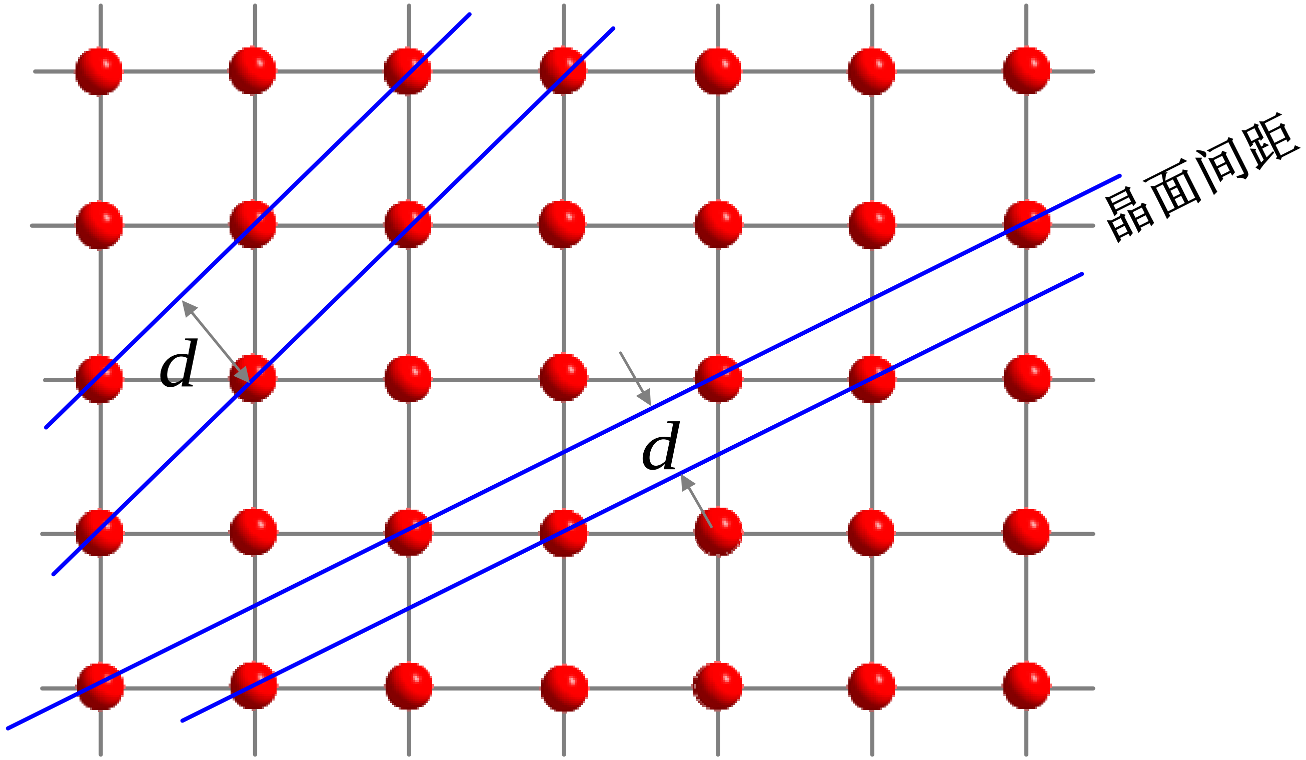
晶格：从周期结构中抽象出来的等同点称为晶格或空间点阵。相邻格点（等同点）之间的间隔称为晶格常数。





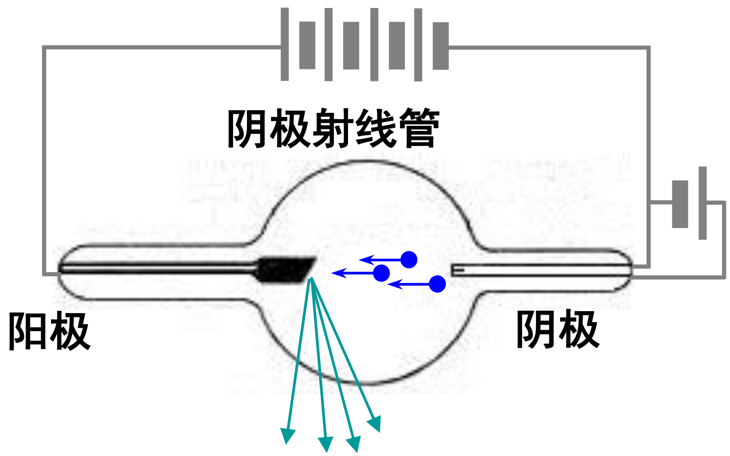


晶面：格点构成的平面。



2. X射线（W.K. Röntgen, 1895）

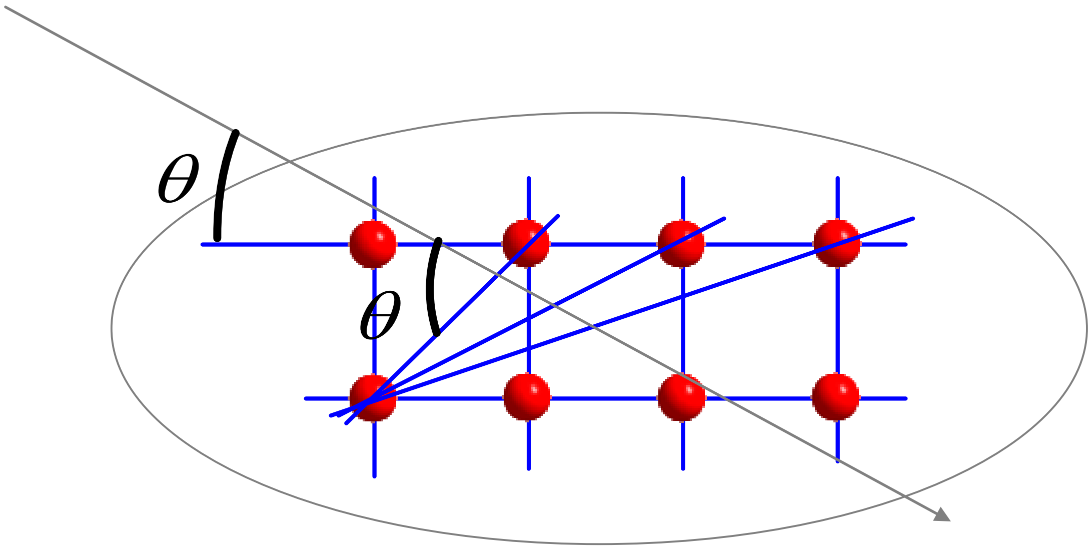
X射线，又称伦琴射线（W.K.Röntgen, 1895）：
一种短波（λ：10Å-10^{-2}Å）电磁波
与原子间距、晶面间距相当。



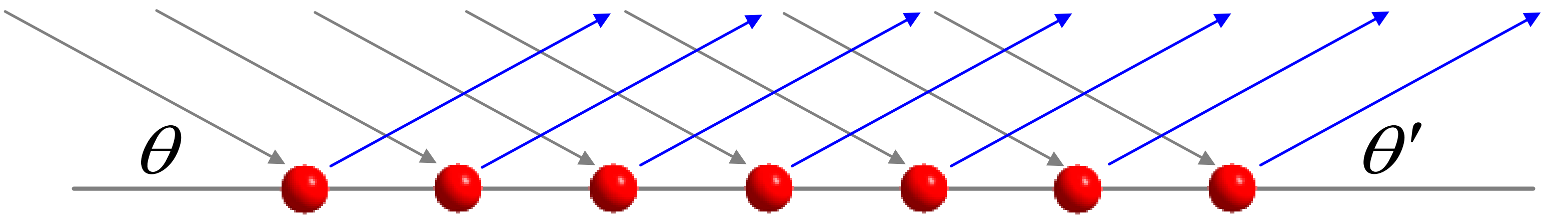
伦琴（1845-1923）
德国维尔茨堡大学实验物理学家。
1895年发现X射线，1901年获诺贝尔物理学奖。

3. X射线在晶体上的衍射—布喇格（W.L. Bragg, 1913）条件

掠射角：光线与晶面的夹角



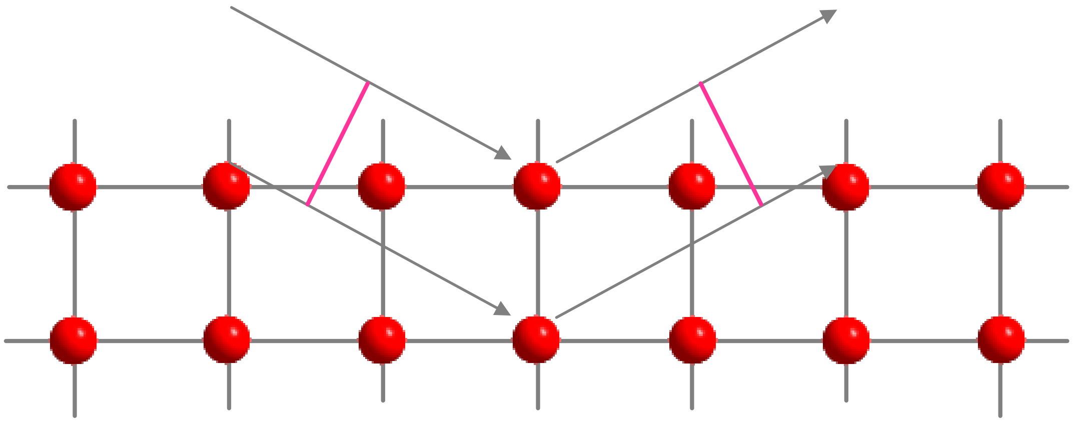
i) 点间（面内）干涉：



$$\theta = \theta'$$

即二维点阵的零级主极强方向在以晶面为镜面的反射方向上。

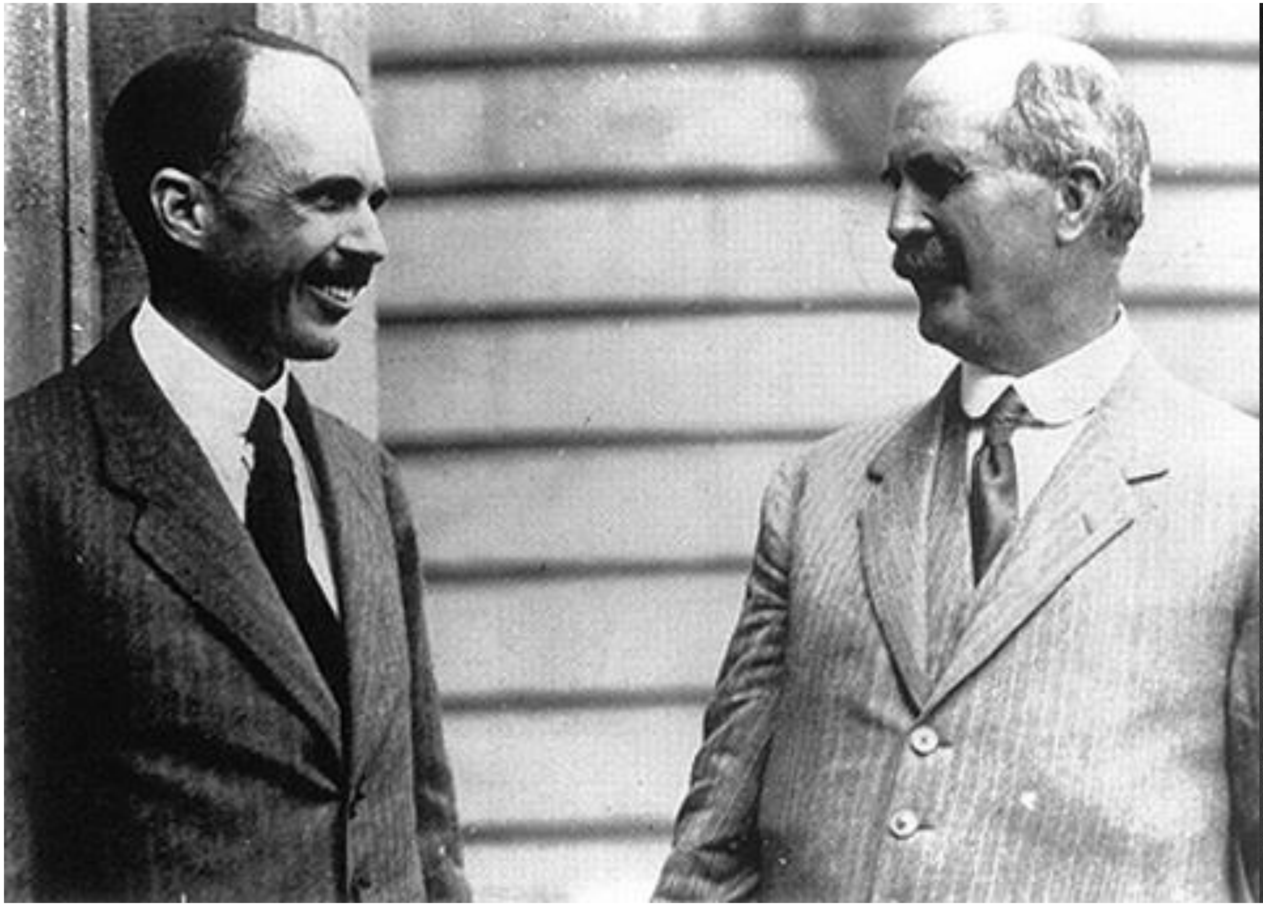
ii) 面间干涉（布喇格）公式：

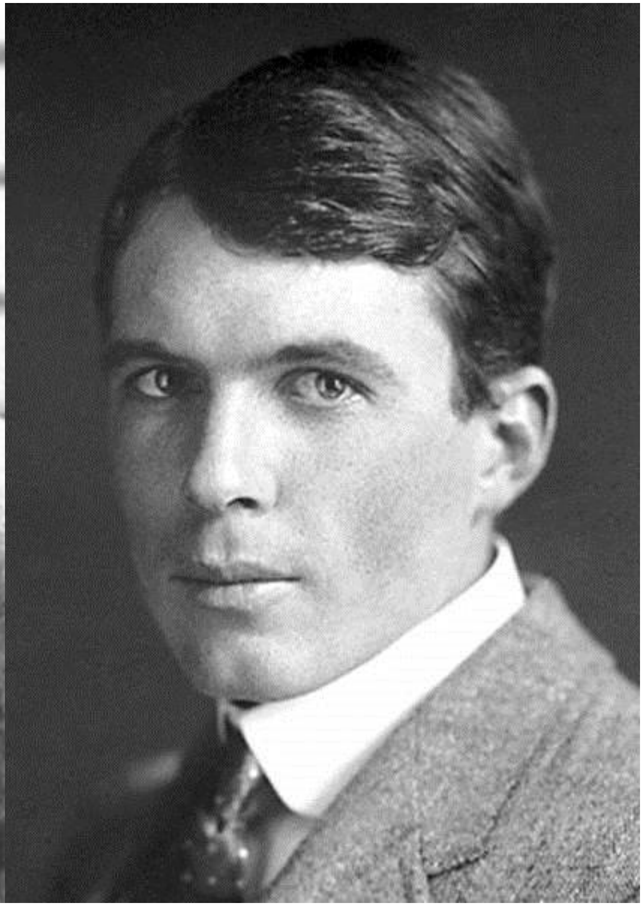


$$2d\sin\theta = k\lambda$$

注意：1) 每个晶面族有一个布喇格条件；

2) 在入射方向、晶体取向和入射波长三者给定后，一般情况下很可能根本就没有衍射极强。





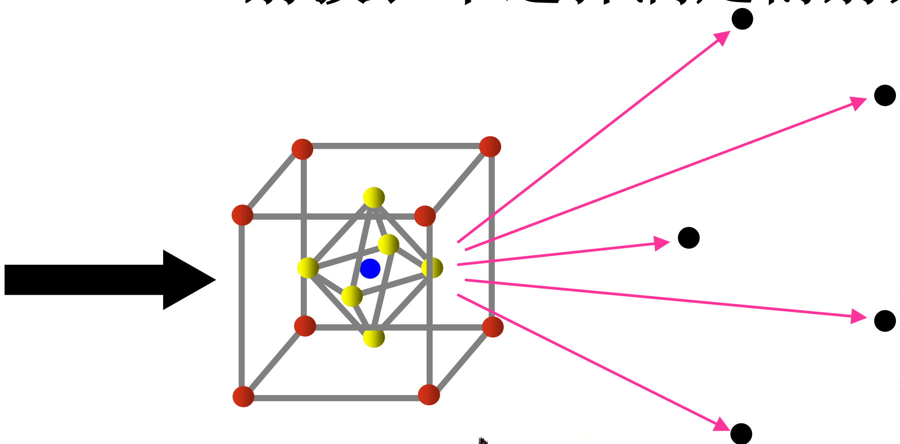
伦敦大学，Henry Bragg（1862-1942）
曼彻斯特维克托利亚大学，Lawrence Bragg（1890-1972）
1915 Nobel Laureate

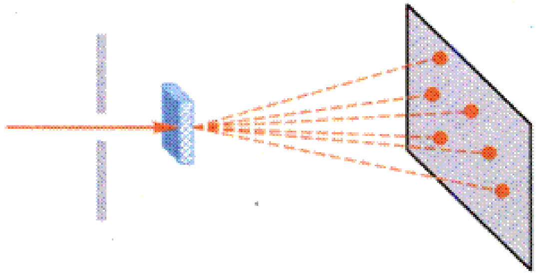
4. 劳厄（M. Von Laue, 1912）照相和德拜（Debye）照相

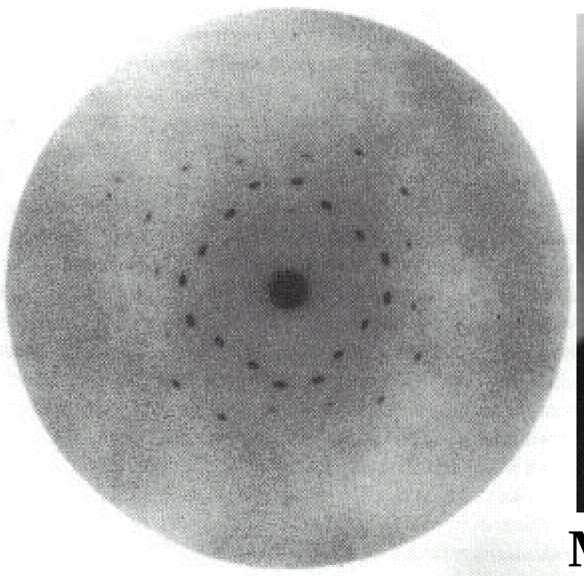
方法：不同时限定入射方向、晶体取向和光波波长。

i) 劳厄法：

连续谱X射线与单晶作用，角度固定，晶面从入射波长中选择满足衍射条件的波长，形成劳厄斑；





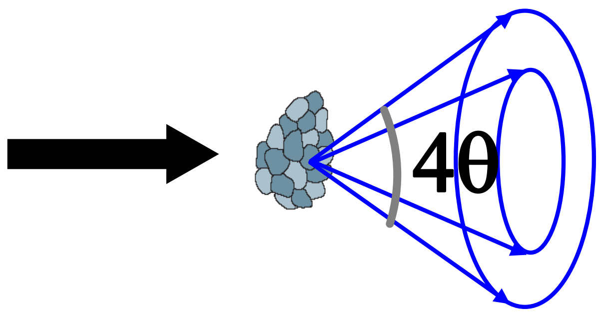


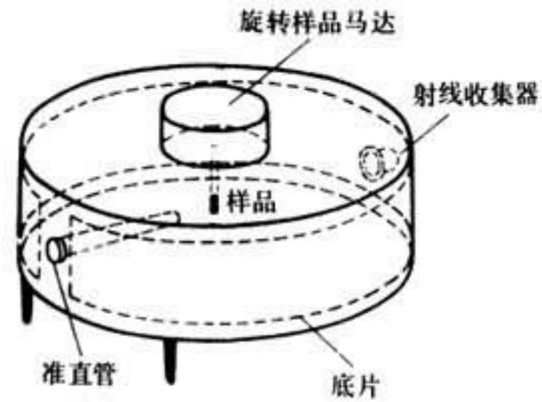
Max von Laue

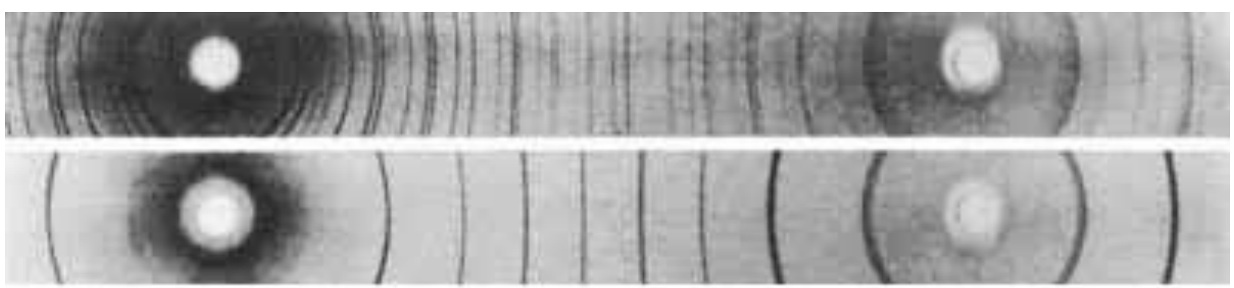
1914 Nobel Laureate

ii) 德拜法：

单色X射线与多晶体作用，大量无规取向的多晶晶粒提供满足布喇格条件的充分可能性，形成德拜环。

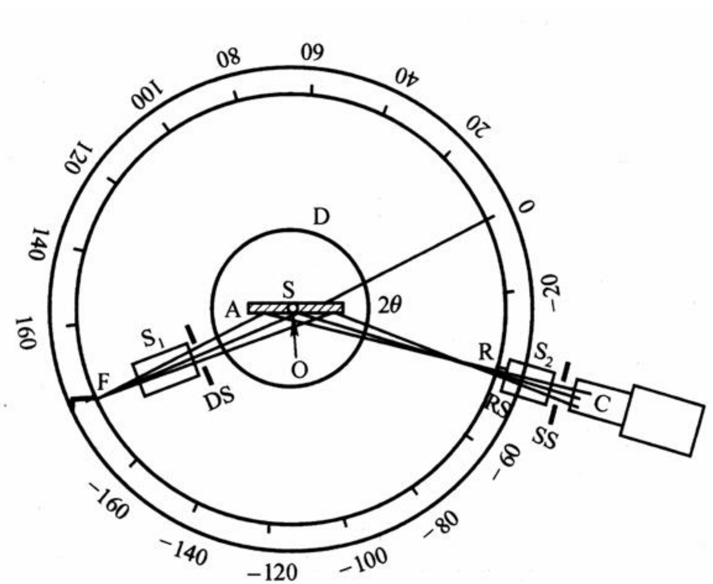


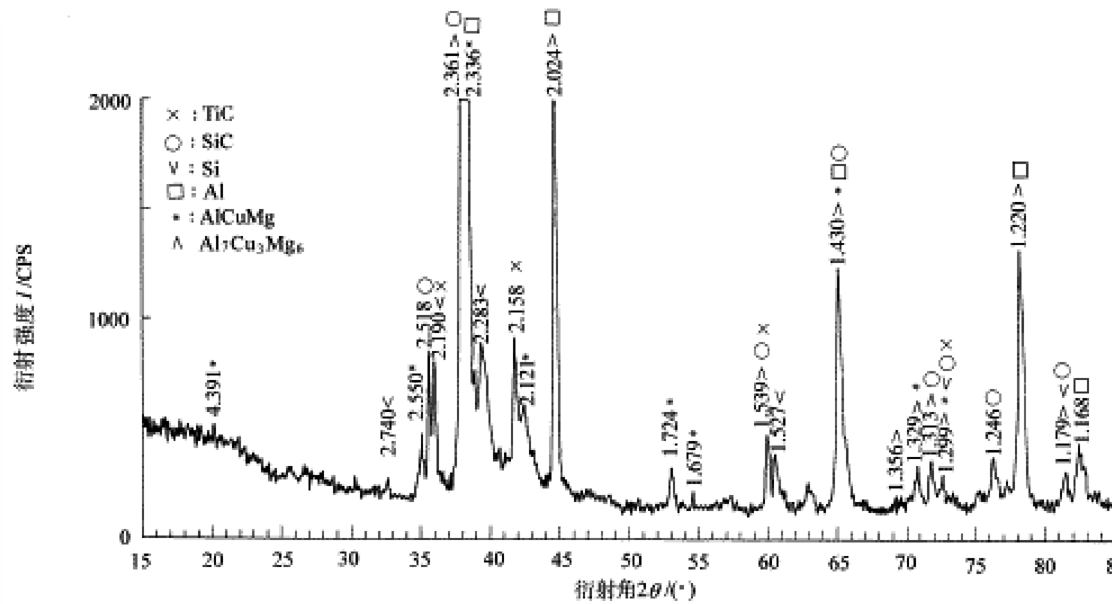




X射线劳厄相机和德拜相机

ii) 德拜法：衍射仪法


D
S
A
2θ
O
S1
F
DS
R
S2
C
RS
SS


×：TiC
○：SiC
∨：Si
□：Al
*：AlCuMg
∧ Al7Cu3Mg6
衍射强度 I /CPS
衍射角2θ /(°)

4-05 光栅光谱仪

光栅光谱仪(spectroscope)

1 光栅的分光原理

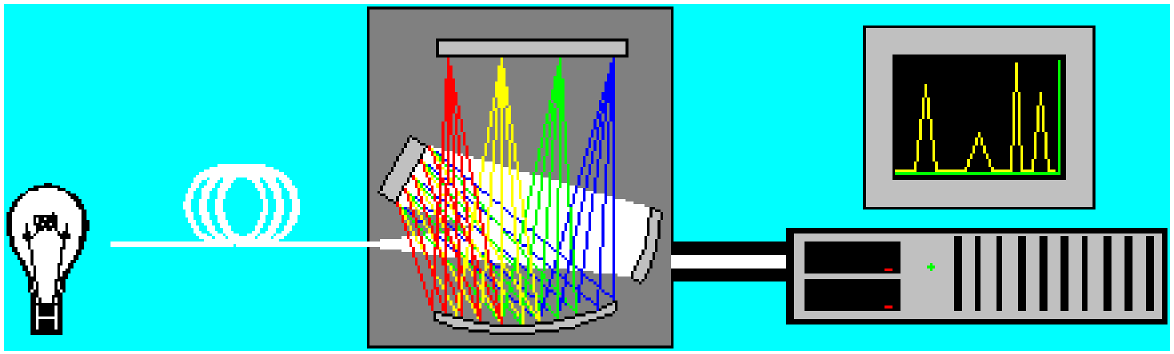
2 光栅的色散本领和色分辨本领

3 量程与自由光谱范围

4 闪耀光栅

5 棱镜光谱仪的色散本领

物理、化学、生命、材料、……，工业、农业、军事、……



1.光源 → 2.照明准直 → 3.分光 → 4.成像 → 5.接收

1.光源

1. 原子发光和吸收
2. 分子吸收
3. 喇曼散射
4. 荧光
5. 激光
6. 氙灯 钨灯

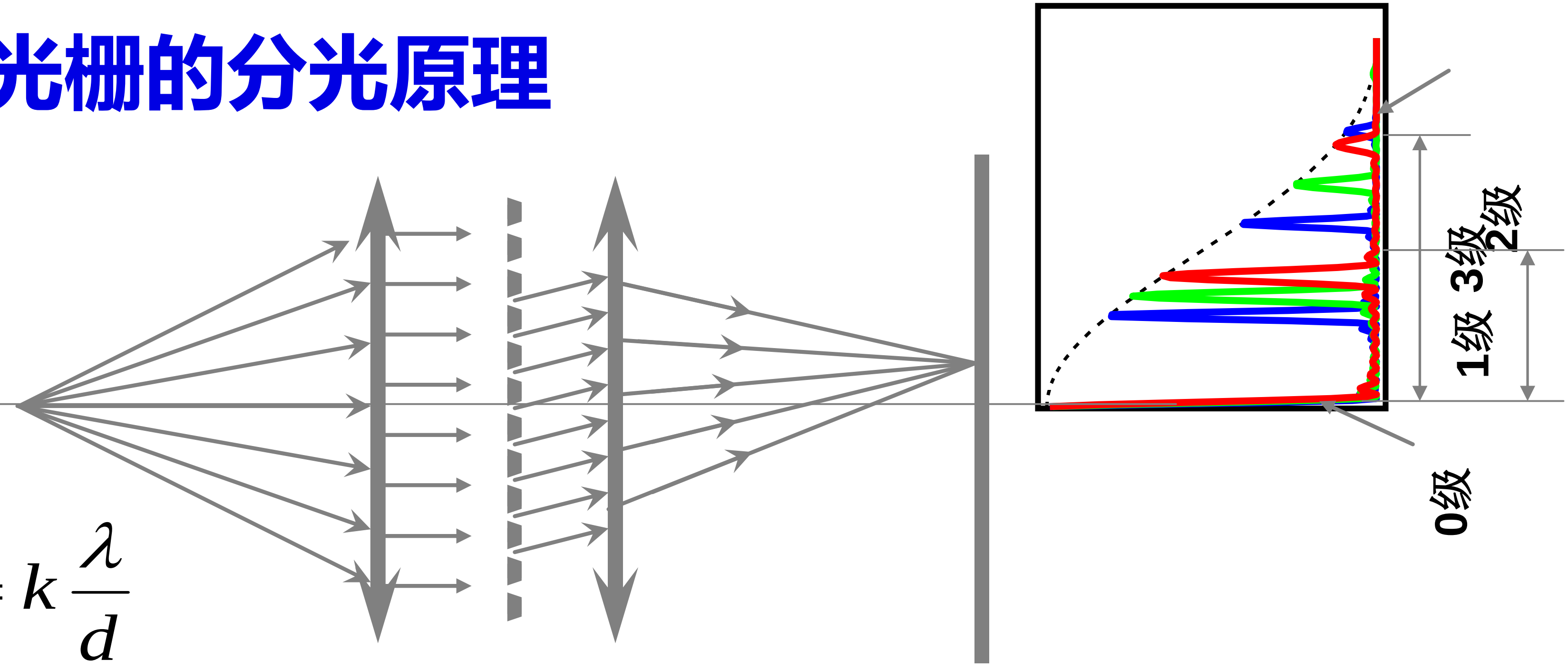
3.分光

1. 物质（棱镜）
2. 衍射（光栅）
3. 干涉（F－P）
4. 干涉（傅里叶）

5.接收

1. 直读
2. 照相
3. 光电
4. CCD
5. CMOS

1. 光栅的分光原理



$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{d}$$

光栅公式： $d\sin\theta = k\lambda$

区别于棱镜光谱仪的是光栅光谱仪有多套光谱，分别对应于光栅的不同衍射级次，而棱镜光谱仪只有一套。

2. 光栅的色散本领和色分辨本领

光谱仪的参数

1. **分开不同波长的光：色散本领、色分辨本领**
2. **自由光谱范围**
3. **记录不同波长的光的强度：强度分辨本领**
4. **时间分辨本领**
5. **效率**
6. **价格**

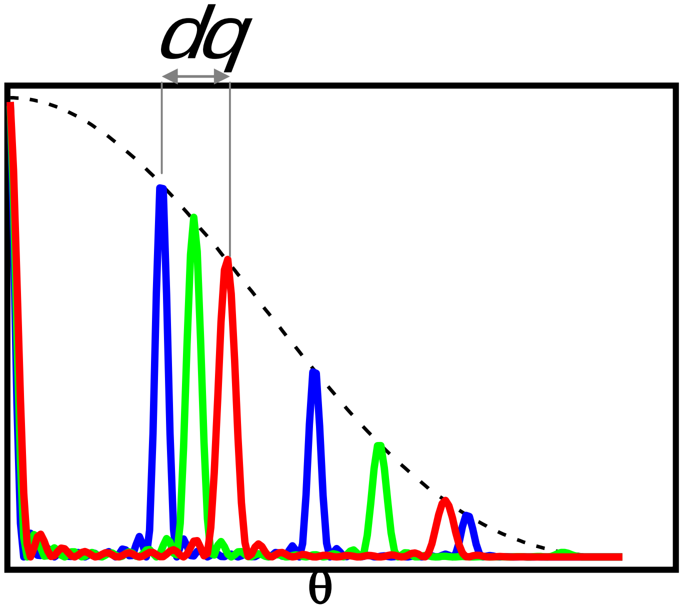
色散本领：

i) 角色散本领：

$$D_\theta \equiv \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{k}{d\cos\theta_k}$$

单位：$^\circ/nm$

色散本领指的是中心位置！



光栅周期*d*越小、衍射级数*k*越高，色散本领越大。

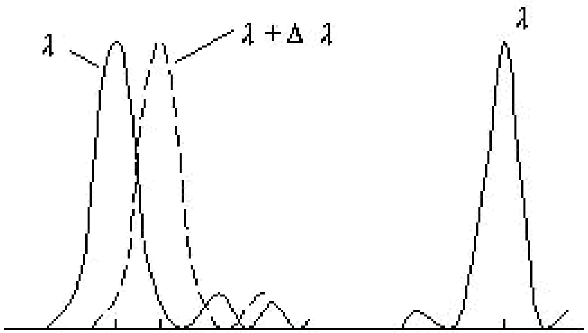
ii) 线色散本领：

$$D_l \equiv \frac{\delta l}{\delta\lambda} = fD_\theta = \frac{fk}{d\cos\theta_k}$$

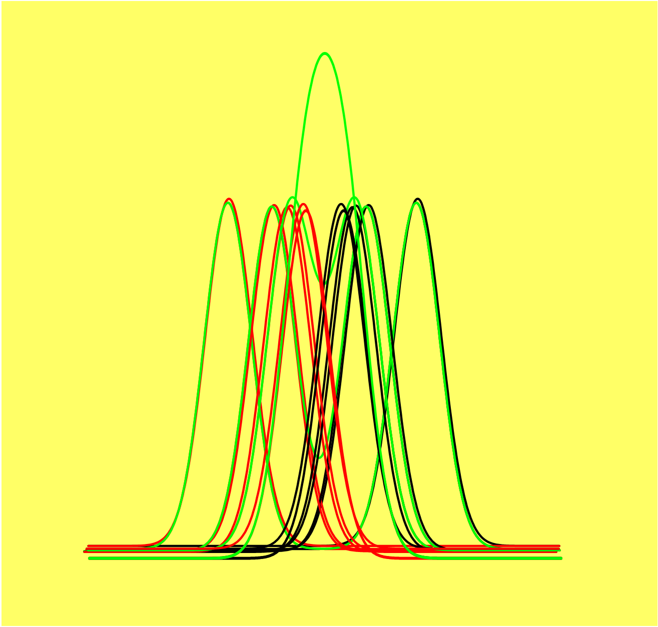
单位：mm/nm

焦距越大、色散本领越大，线色散本领越大。

色分辨本领：



$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$$



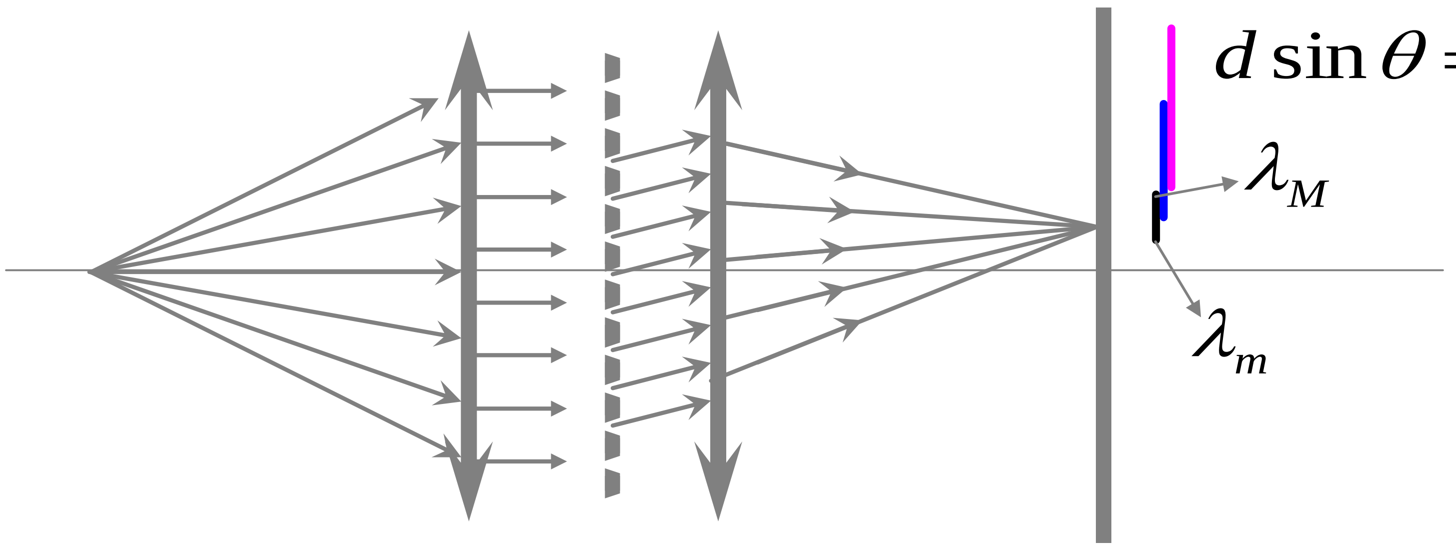
i) 最小分辨波长： $\Delta\lambda = \frac{\Delta\theta}{D_\theta} = \frac{\lambda}{kN}$ 其中N为缝数

ii) 分辨本领： $R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$

色分辨本领和峰宽关联！

总缝数N越多（面积越大）、衍射级数k越高，分辨本领越大。

3. 量程与自由光谱范围



量程：$\lambda_M < d$

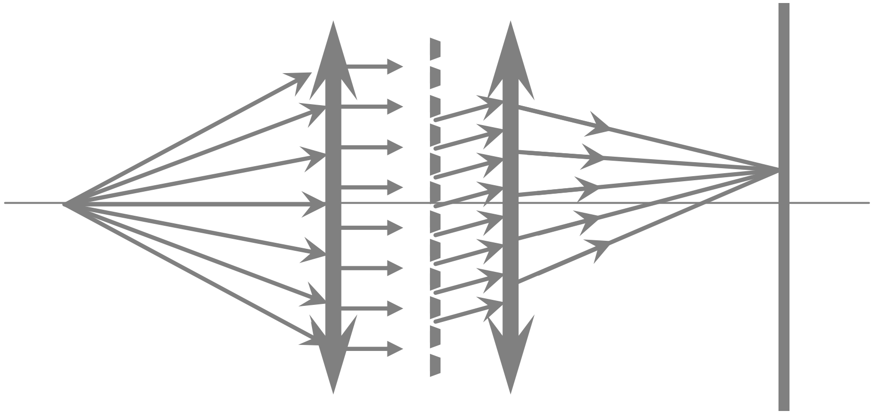
自由光谱范围（一级衍射）：

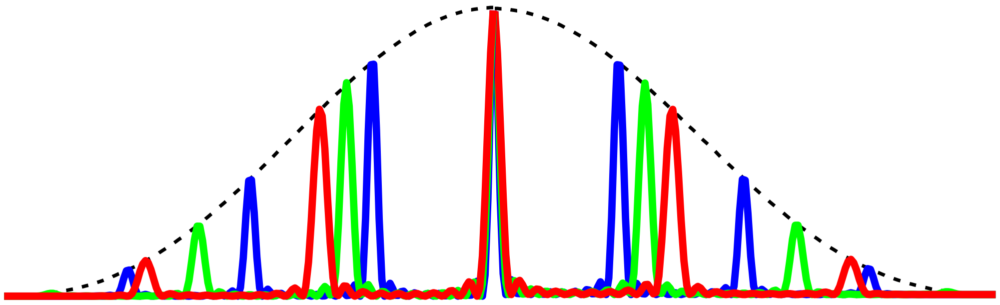
$$\lambda_m > \lambda_M / 2$$

4. 闪耀光栅(blazed grating)

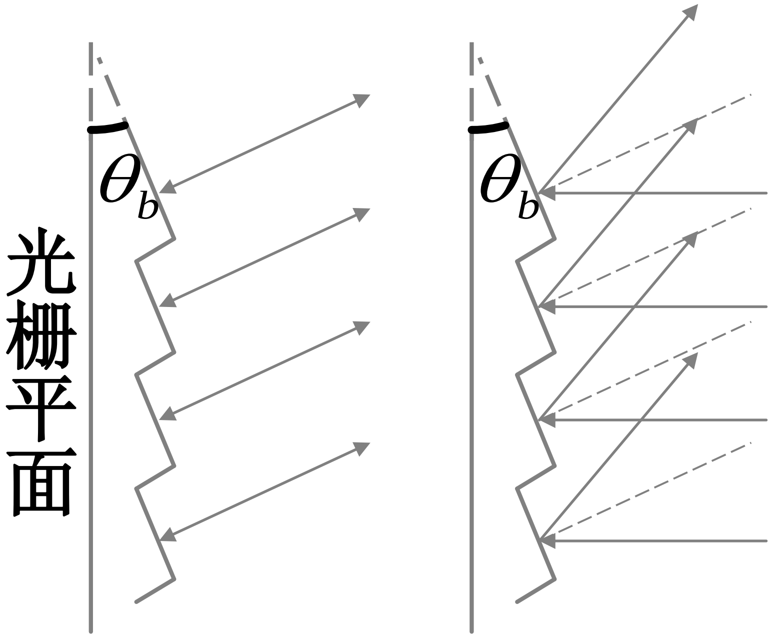
透射光栅的缺点：

光能分散，且主要集中在无色散的零级衍射上。其主要原因在于单元衍射因子、缝间干涉因子的主极强相互重叠。





闪耀光栅（平面反射式）能将单槽衍射的零级与槽间干涉的零级错开，从而把光能集中到所需的一级衍射光谱上。

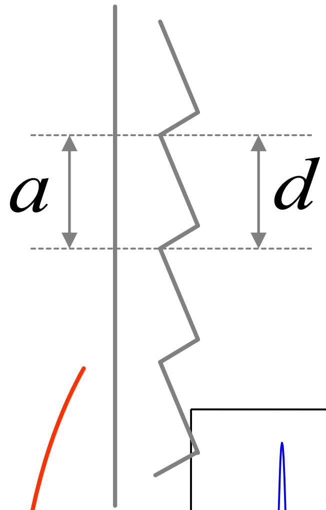


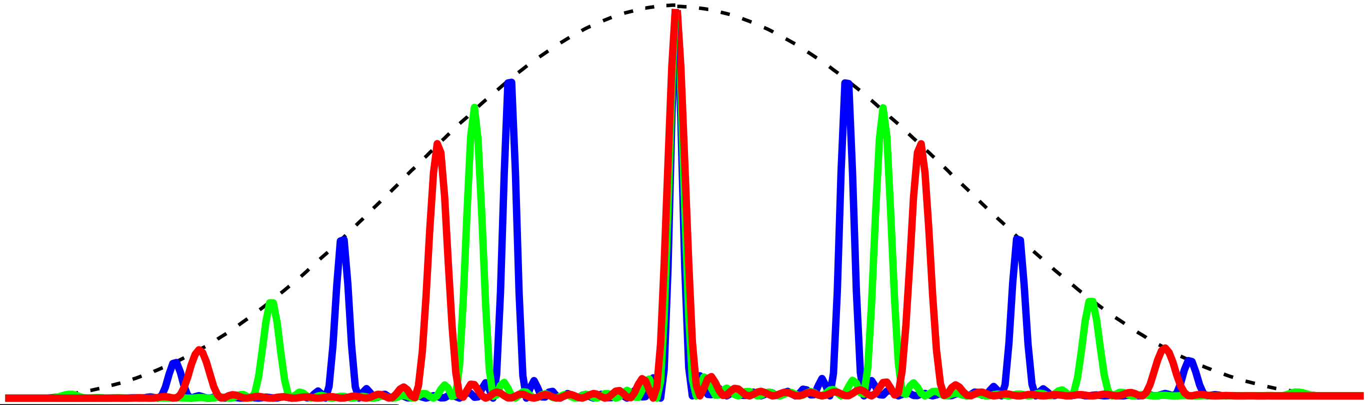
$$\Delta L = 2d\sin\theta$$

闪耀角：槽面与光栅平面之间的夹角

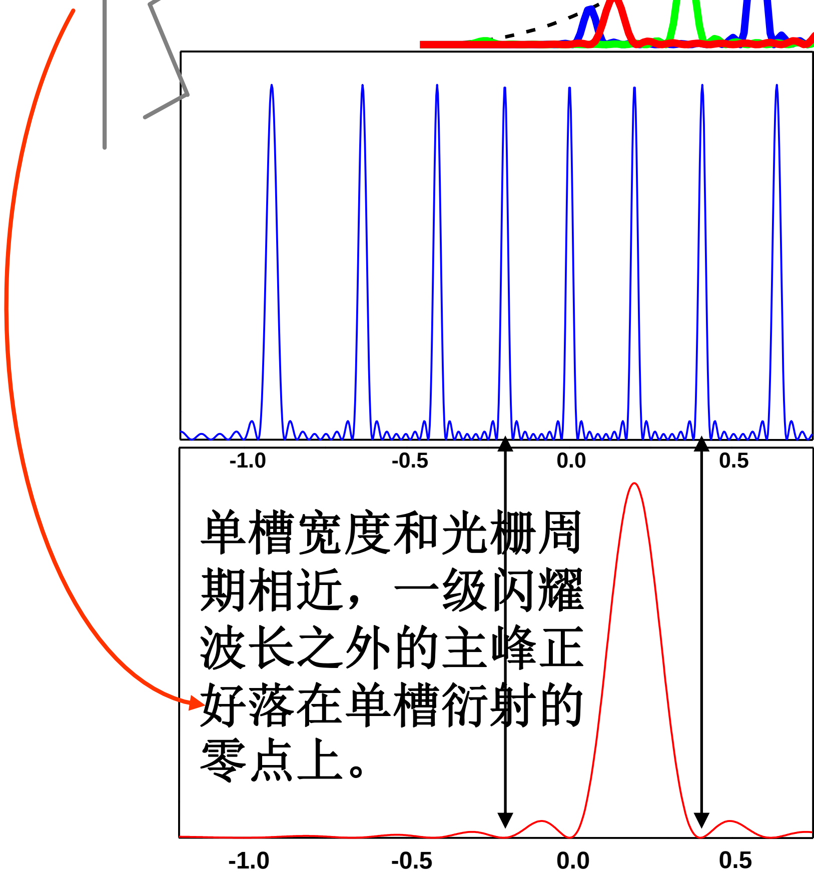
一级闪耀波长（利特罗自准直系统）：

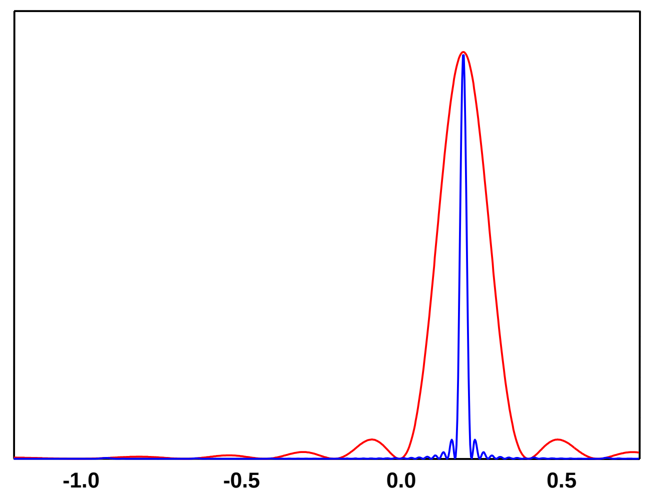
$$\lambda_{1b} = 2d\sin\theta_b$$



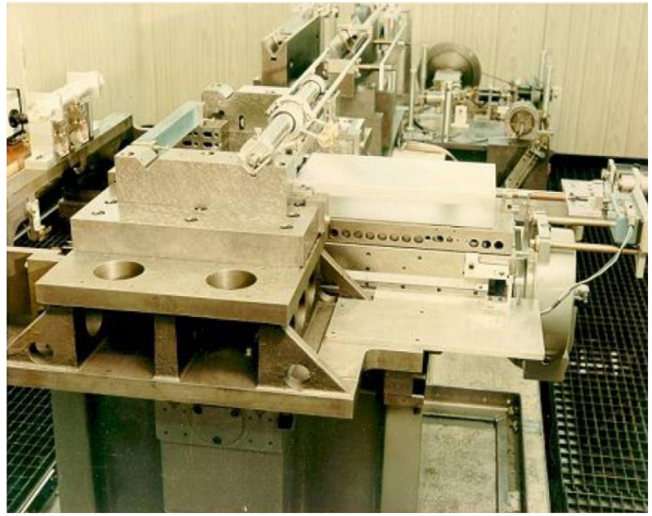


$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

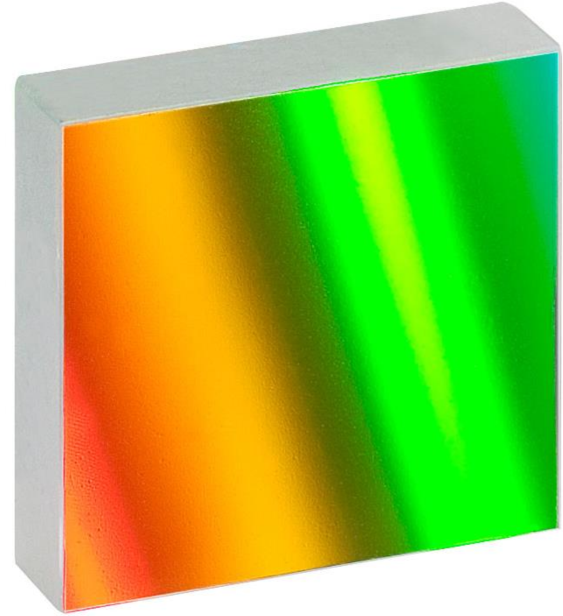




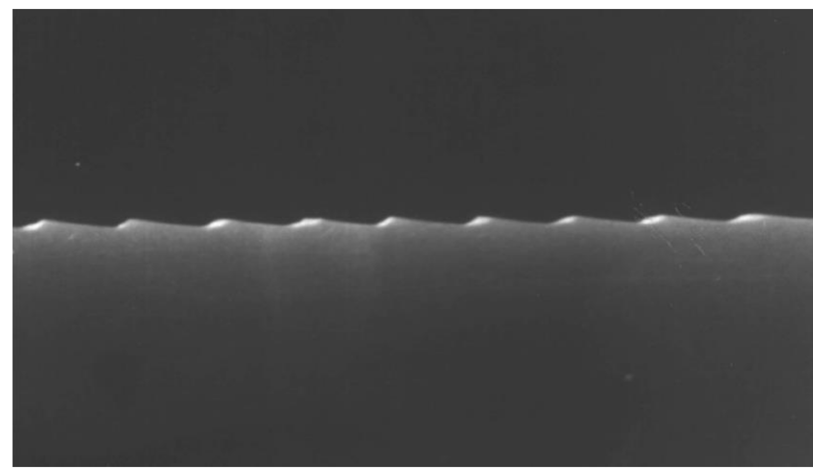
闪耀光栅仅有一列光谱。



Ruling engine

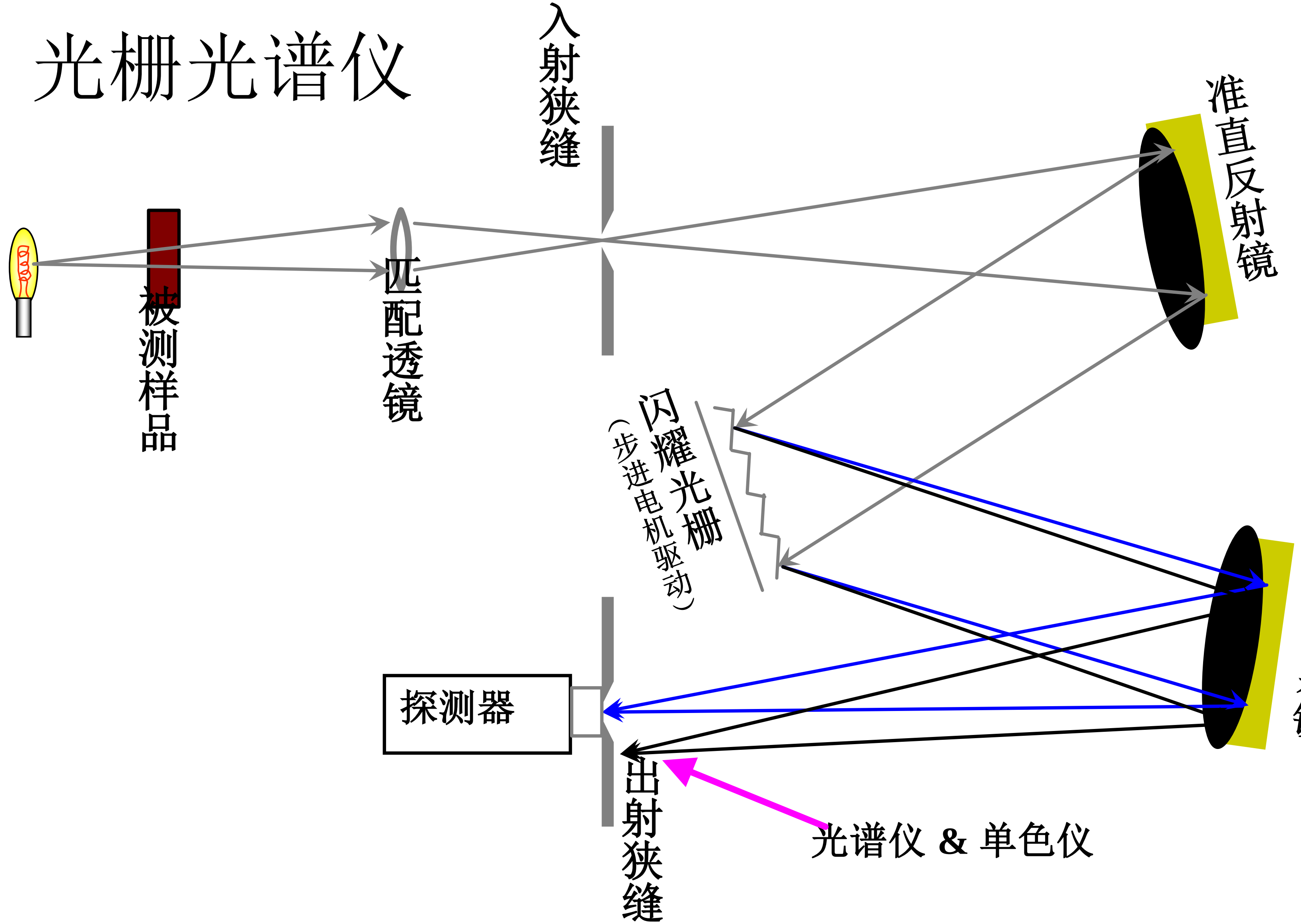


Henry Joseph Grayson designed a machine to make diffraction gratings, succeeding with one of 120,000 lines to the inch (approx. 47 000 per cm) in 1899.

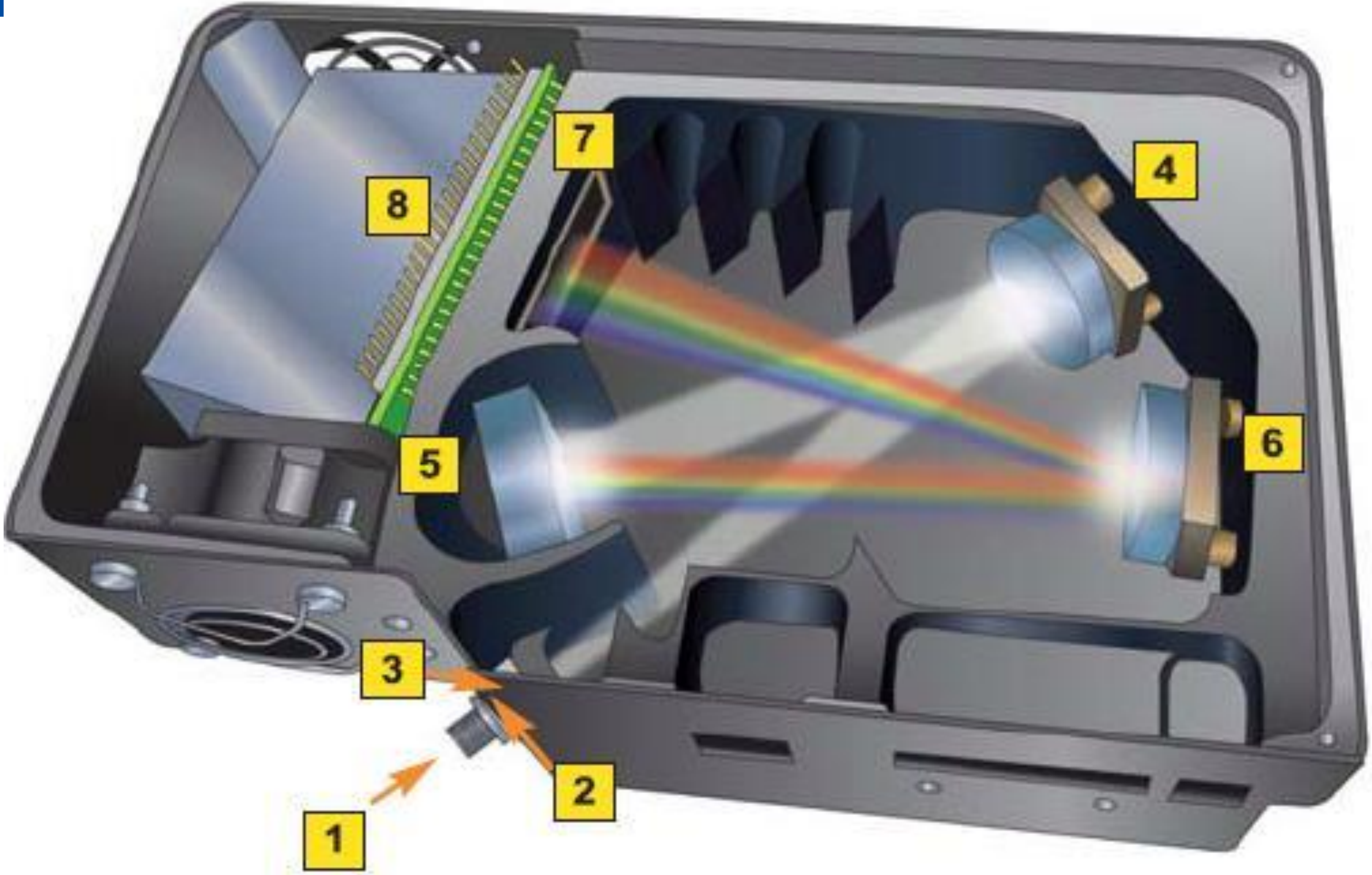


600线/mm, 458nm

光栅光谱仪




准光镜
物镜
反射光栅
步进电机
反射镜 2



小型光纤光谱仪

5．棱镜光谱仪的色散本领

$$D_\theta \equiv \frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\alpha/2)}}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{b}{a}\frac{dn}{d\lambda}$$

其中：b底边长度，a为光束宽度

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b\frac{dn}{d\lambda}$$

作业

p.30: 1, 3, 4