

# 第三章：光的干涉

## 3-01 波的迭加和波的干涉

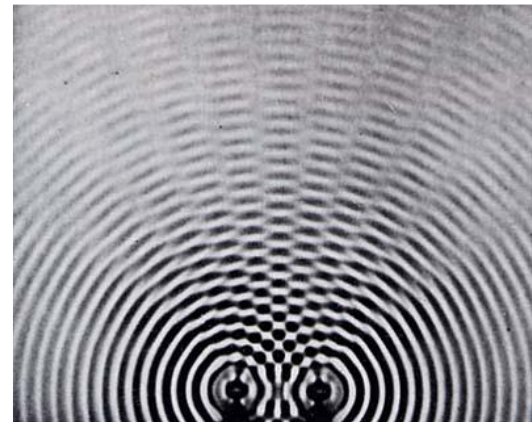
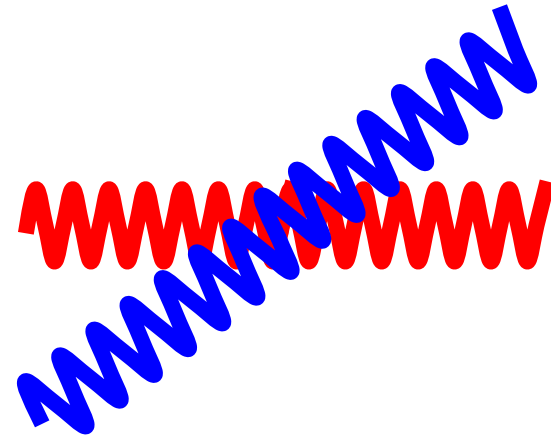
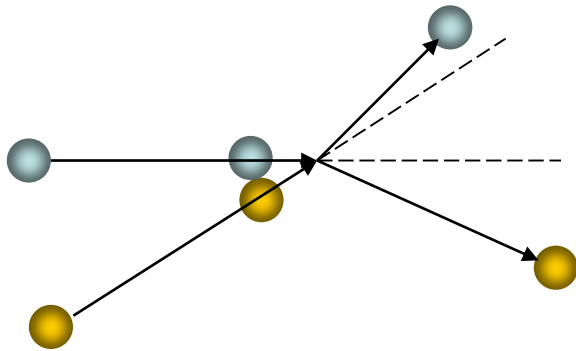
- 1 波的迭加原理
- 2 波的干涉和相干迭加条件
- 3 普通光源发光的微观机制和特点
- 4 干涉的反衬度

# 两列波在空间相遇

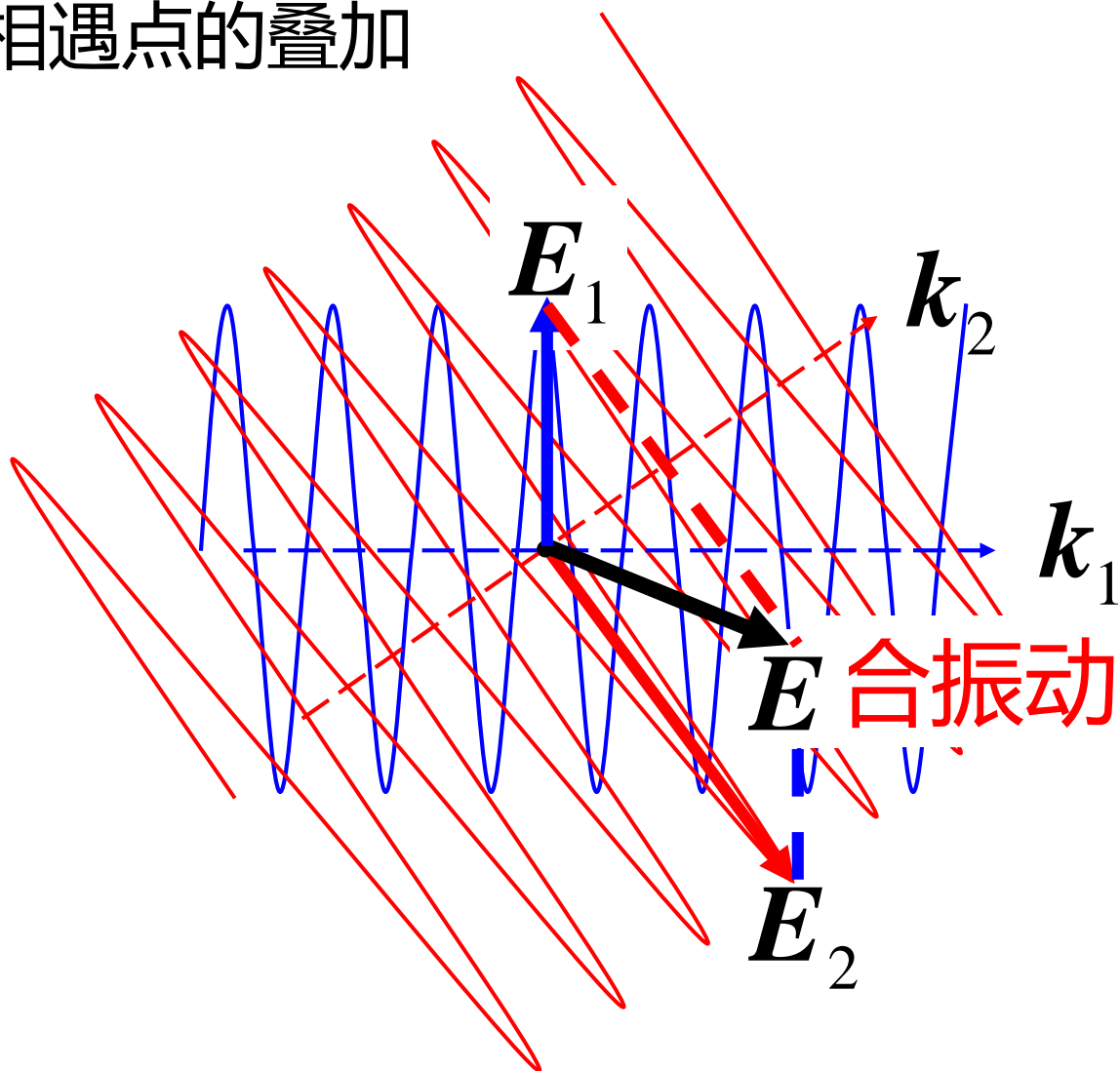


相遇后，仍然独自传播

- 若是粒子相遇，则将发生碰撞，各自的状态都将改变



# 振动在相遇点的叠加



# 1 光的叠加原理

- **A . 波的独立传播定律**

- 不同的波列波在空间相遇时，如扰动不十分强，各列波将保持各自的特性不变，继续传播，相互之间没有影响。

- **B . 波的叠加原理**

- 几列波在相遇点所引起的**扰动**是各列波独自在该点所引起的**扰动**的叠加（矢量的**线性叠加**，矢量和）。

$$\vec{U}(p,t) = \vec{U}_1(p,t) + \vec{U}_2(p,t) + \vec{U}_3(p,t) + \dots$$

## 成立的条件

- 传播介质为线性介质。
- 振动不十分强。在振动很强烈时，线性介质会变为非线性的。
- 注意要点：不是强度的叠加，也不是振幅的简单相加，而是振动矢量（瞬时值）的叠加。
- 对于电磁波，就是电场强度（电场分量，光矢量）、磁场强度的叠加

## 定态光波叠加的方法

对于同频率、同振动方向的单色光

A . 代数法:瞬时值叠加

$$\psi_1(P) = A_1 \cos[\omega t - \varphi_1(P)] \quad \psi_2(P) = A_2(P) \cos[\omega t - \varphi_2(P)]$$

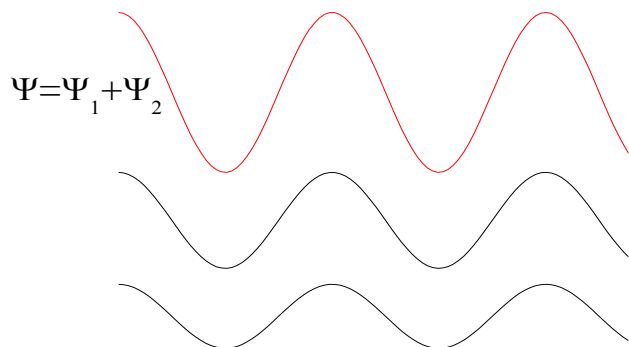
**合振动**      $\psi = \psi_1 + \psi_2 = A(P) \cos[\omega t - \varphi(P)]$

**振幅**      $A^2(P) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

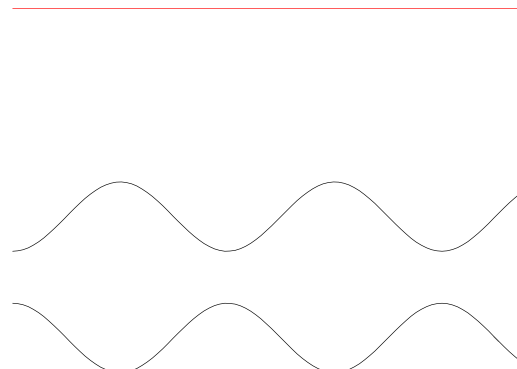
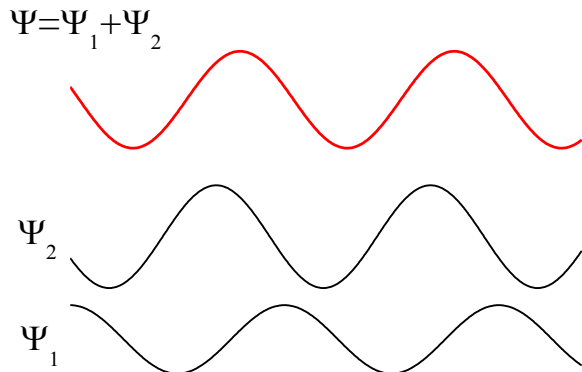
**相位**      $\tan \varphi(P) = \frac{A_1(P) \sin \varphi_1(P) + A_2(P) \sin \varphi_2(P)}{A_1(P) \cos \varphi_1(P) + A_2(P) \cos \varphi_2(P)}$

**叠加之后，仍然是原频率的定态光波**

# 叠加后的定态光波



相位处处相同



相位处处相反

叠加之后的振动取决于  
两列波的相位差



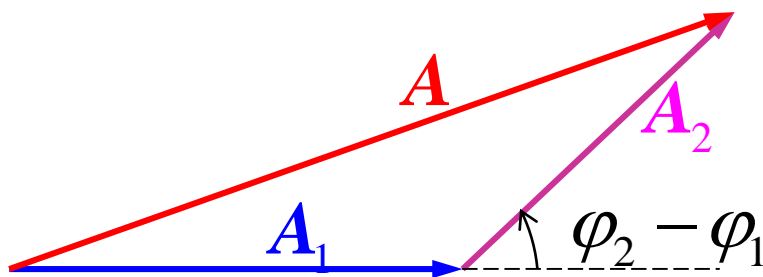
## 由瞬时值所引出的矢量方法

$$\psi_1(P) = A_1(P) \cos[\omega t - \varphi_1(P)] \quad \psi_2(P) = A_2(P) \cos[\omega t - \varphi_2(P)]$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A(P) \cos[\omega t - \varphi(P)]$$

$$A^2(P) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

- 合振动的振幅与两列波的振幅之间满足余弦公式



## B . 复数法 : 复振幅相加

$$\tilde{\psi}_1 = A_1 e^{i(\varphi_1 - \omega t)} = A_1 e^{i\varphi_1} e^{-i\omega t} = \tilde{U}_1 e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{\psi}_2 = A_2 e^{i(\varphi_2 - \omega t)} = A_2 e^{i\varphi_2} e^{-i\omega t} = \tilde{U}_2 e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{U}_1 = A_1 e^{i\varphi_1} \quad \tilde{U}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$$

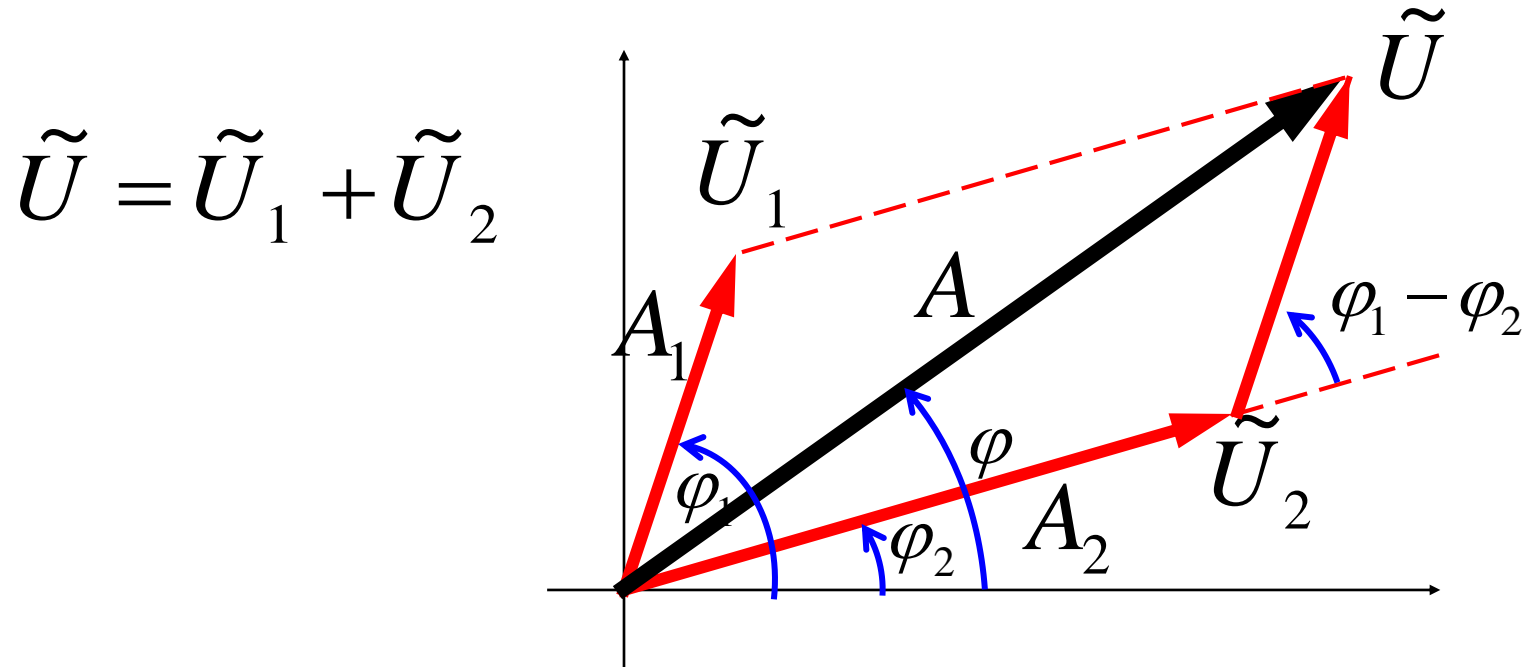
$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 = \tilde{U}_1 e^{-i\omega t} + \tilde{U}_2 e^{-i\omega t} = (\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2) e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} = A e^{i\varphi}$$

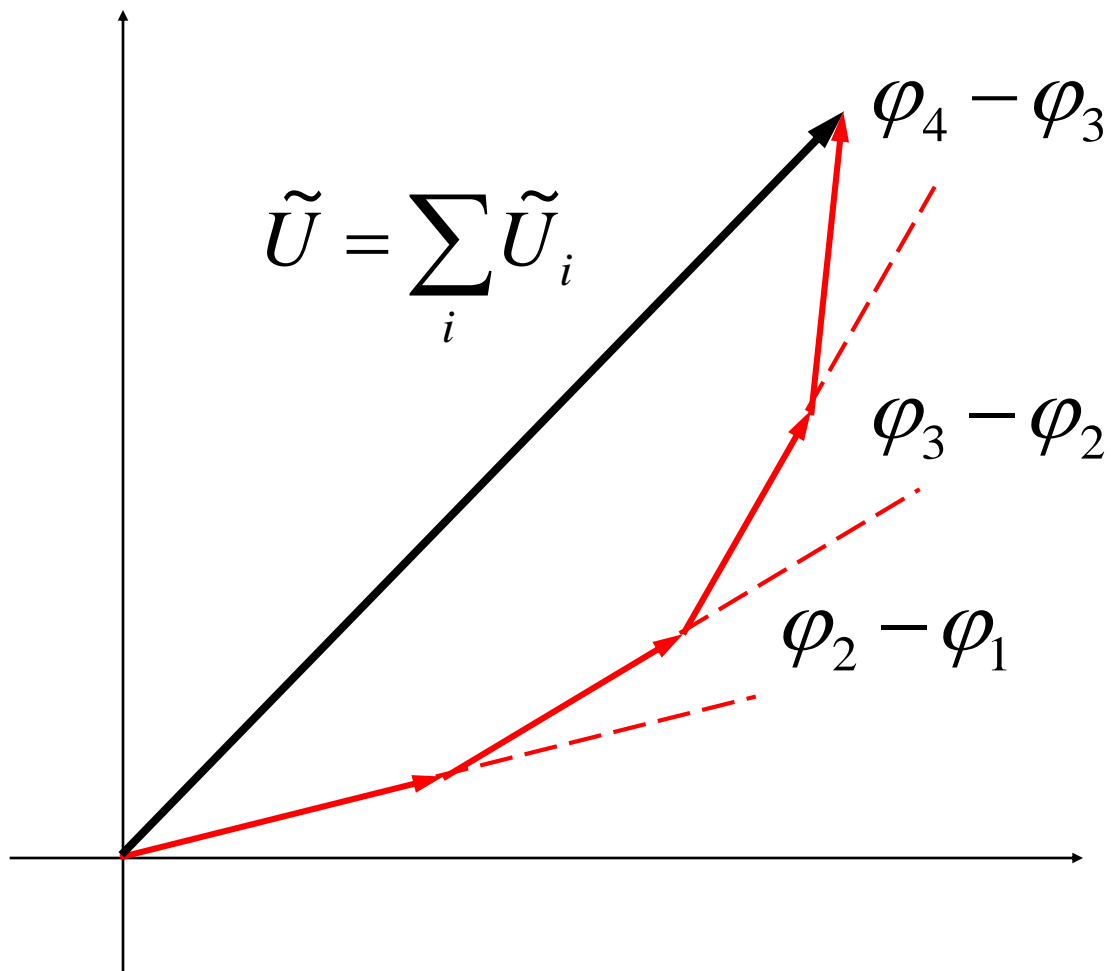
**振幅和相位的表达式与代数方法相同**

### C. 振幅矢量法:复振幅的矢量相加

- 在复空间中，复振幅用矢量表示



- 连续多个振幅矢量的叠加



**各个矢量首尾相接，  
夹角为相应的相位差**

## 光的叠加强度

- 光的频率是 $10^{14}$  Hz，其变化周期比仪器的响应时间小得多
- 光强的测量值只能是一定时间内的平均值
- 定态光波的光强，就是电场强度振幅平方的平均值

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A^2 dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] dt \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos \Delta\varphi dt \\ \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{两列波在空间} P \text{点的相位差} \end{aligned}$$

## 两列波在空间P点相位差的讨论

A、 $\Delta\varphi$  在观察时间内不是定值，而是随时间改变，是时间的随机函数

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi(t) \quad \int_0^\tau \cos \Delta\varphi dt = 0$$

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos \Delta\varphi dt = A_1^2 + A_2^2$$

$$I = I_1 + I_2$$

**是两列光的强度简单相加，没有干涉现象；或者说它们是不相干的。**

## 两列波在空间 $P$ 点相位差的讨论

B、  $\Delta\varphi$  在观察时间内不随时间改变

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos \Delta\varphi dt = \cos \Delta\varphi$$
$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi \neq I_1 + I_2$$

**$\Delta\varphi$  只与空间位置有关，即不同的空间点具有不同的位相差，因而有不同的数值。**

**即两列波在空间不同的地点有不同的位相差，叠加后有不同的强度，出现干涉现象。**

$$2A_1A_2 \cos \Delta\varphi \quad \text{干涉项}$$

$$\Delta\varphi = 2j\pi \quad \cos \Delta\varphi = 1$$

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$$
$$> I_1 + I_2 \quad \text{干涉相长}$$

$$\Delta\varphi = (2j+1)\pi \quad \cos \Delta\varphi = -1$$

$$I = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2 = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}$$
$$< I_1 + I_2 \quad \text{干涉相消}$$

两列波在空间相遇，使得光的能量重新分布，称为干涉现象。能够产生干涉的光，称为相干光



## 平面波干涉的简单例子

$$U_1(x, y, 0, t) = A_1 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta_1)$$

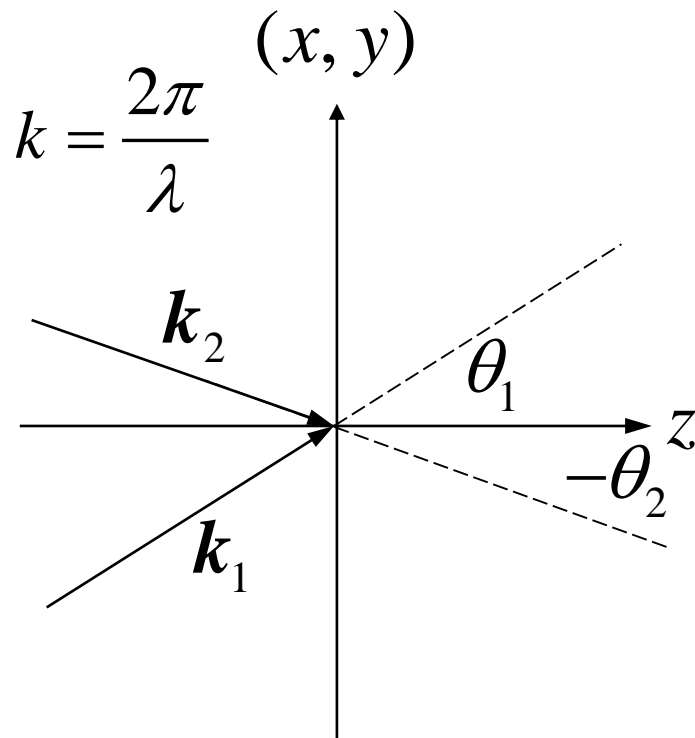
$$U_2(x, y, 0, t) = A_2 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta_2)$$

$$\tilde{U}_1 = A_1 e^{ikx \sin \theta_1} \quad \tilde{U}_2 = A_2 e^{-ikx \sin \theta_2}$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta_1 \quad \varphi_2 = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta_2$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)}{\lambda} x = \begin{cases} 2j\pi & \text{干涉相长} \\ (2j+1)\pi & \text{干涉相消} \end{cases}$$

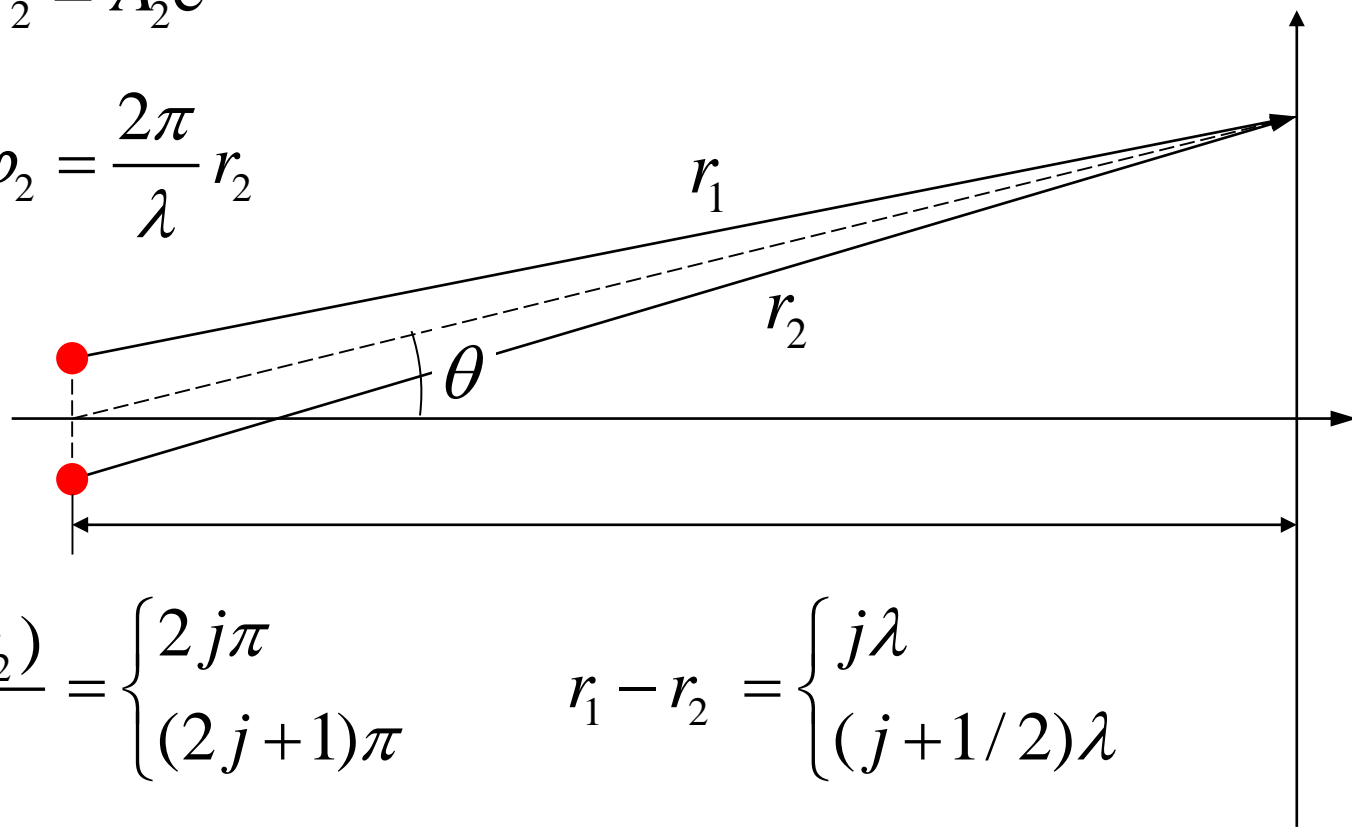
接收屏上不同位置光强不同，出现条纹



## 球面波干涉的简单例子

$$\tilde{U}_1 = A_1 e^{ikr_1} \quad \tilde{U}_2 = A_2 e^{ikr_2}$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_1 \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} r_2$$



$$\Delta\varphi(\theta) = \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{\lambda} = \begin{cases} 2j\pi \\ (2j+1)\pi \end{cases} \quad r_1 - r_2 = \begin{cases} j\lambda \\ (j+1/2)\lambda \end{cases}$$

接收屏上不同位置光强不同，出现条纹

## 2.光的相干条件(稳定干涉)

- ( 1 )  $\omega$ 相同 ;
- ( 2 )  $\Delta\varphi$  稳定 ;
- ( 3 ) 存在相互平行的振动分量。

## A. 两列光之间电矢量的相对方向

两列波的振动方向相互垂直

$$\Psi_1 \perp \Psi_2$$

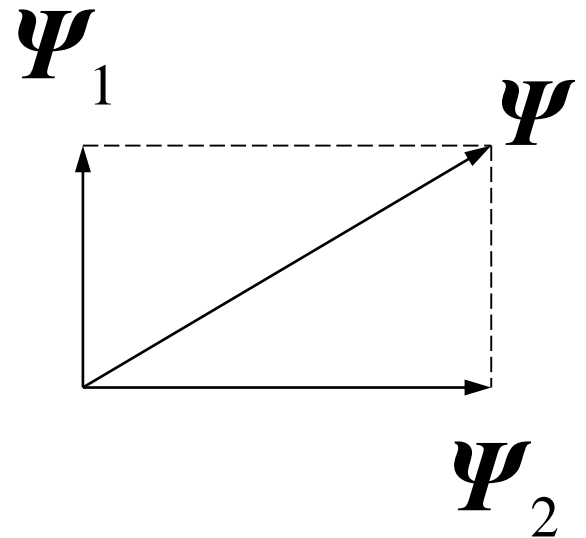
按矢量叠加  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$

数量关系  $|\Psi|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$

光强是复振幅模的平方

$$I = I_1 + I_2$$

总光强是两列波的光强之和，无干涉。



如两振动不平行，可将其中一个正交分解为和另一个分别平行、垂直的分量，再进行叠加。其中垂直的分量作为背底，不参与干涉。

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 \\
 &= (\Psi_1 + \Psi_{2y})\mathbf{e}_y + \Psi_{2x}\mathbf{e}_x \\
 I &= A_1^2 + A_{2y}^2 + A_{2x}^2 + 2A_1A_{2y}\cos\Delta\varphi \\
 &= I_1 + I_2 + 2A_1A_2\cos\alpha\cos\Delta\varphi
 \end{aligned}$$

背底光强

## B. 不同频率单色波的叠加

- 振动方向相同、传播方向相同，频率不同

$$\psi_1 = A_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z) \quad \psi_2 = A_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

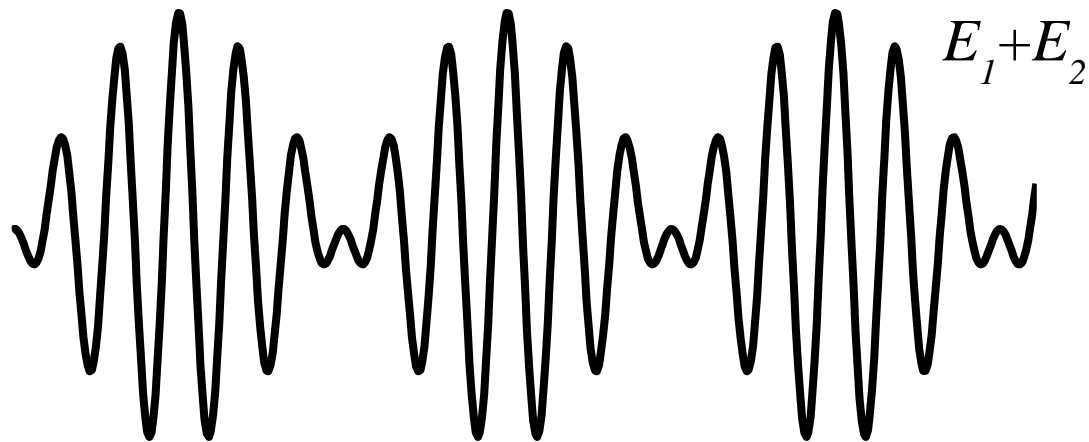
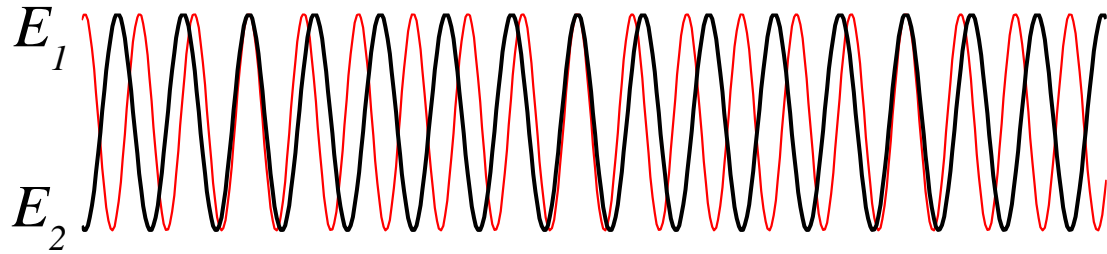
$$= 2A_0 \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)z}{2} \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z}{2}$$

$$= 2A_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k z) \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} z) \quad \text{不是定态光波}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

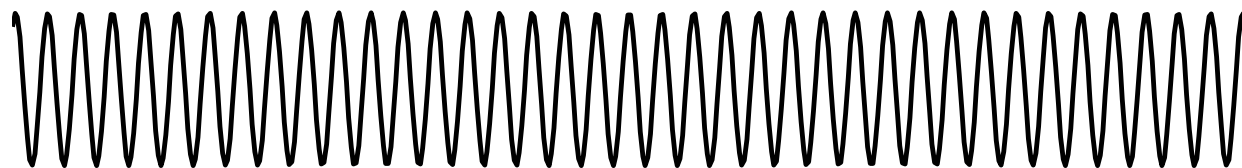
## 非定态光波

$$\Psi = 2A_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta kz) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)$$

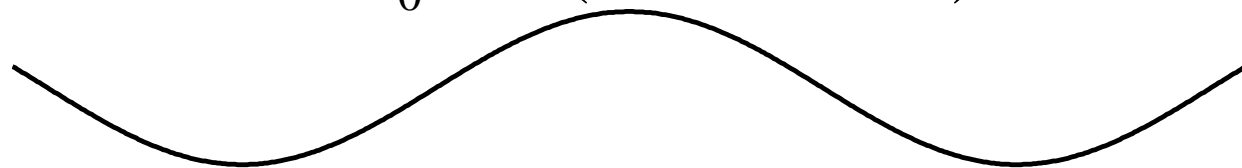


## 低频波对高频波的振幅调制

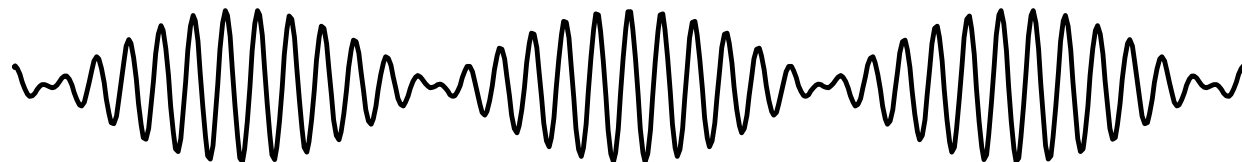
$$\cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)$$



$$2A_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta kz)$$



$$2A_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta kz) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)$$





$$\Psi = 2A_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta kz) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)$$

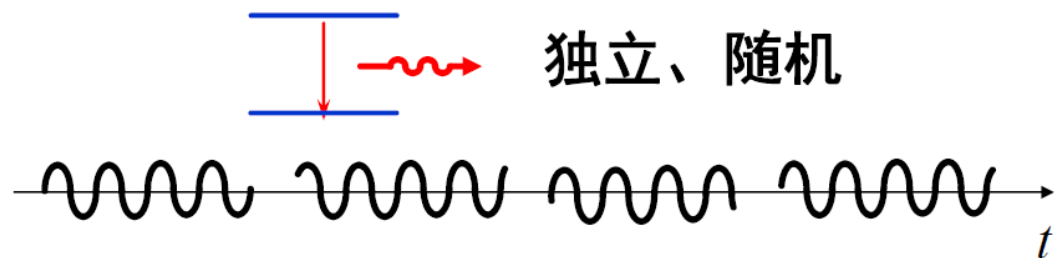
$$I = 4A_0^2 \cos^2(\Delta\omega t - \Delta kz) = 2A_0^2 [1 + \cos 2(\Delta\omega t - \Delta kz)]$$

**“光强” 随时间变化，没有稳定的光强分布**

- 形成**光学拍**，拍频为 $2\Delta\omega$ ，强度分布随时间和空间变化。
- 结论：
  1. 不同频率单色光叠加形成光学拍；
  2. 不同频率的定态光波叠加形成非定态光；
  3. 不同频率单色光是**非相干**的。

### 3. 普通光源发光的微观机制和特点

发光机制：原子和分子（微观客体）内部的能量改变特点：  
不同原子或分子所发射的波列在振动方向和位相上相互独立，没有联系，而且每个原子或分子发光的持续时间极短



几个重要的时间间隔：

i) 光扰动的周期： $T \sim 10^{-15} \text{s}$

ii) 实验观测的时间（人眼的响应时间）： $\tau \sim 10^{-1} \text{s}$

iii) 探测器响应时间： $\Delta t \sim 10^{-9} \text{s}$

由于  $\tau \gg \Delta t \gg T$ ，实际观察（仪器接收），得到的都不可能是某一瞬间的扰动分布，而只能是扰动强度的时间平均值，即**强度**。

相干光源和非相干光源：

两光源间有固定的位相差，因而按振幅进行迭加，那么它们称为**相干光源**；

而若两光源之间没有固定的位相差，因而按强度进行迭加，则称为**非相干光源**。

## 4. 干涉的反衬度(contrast) [干涉可见度, visibility]

反衬度 (可见度) :

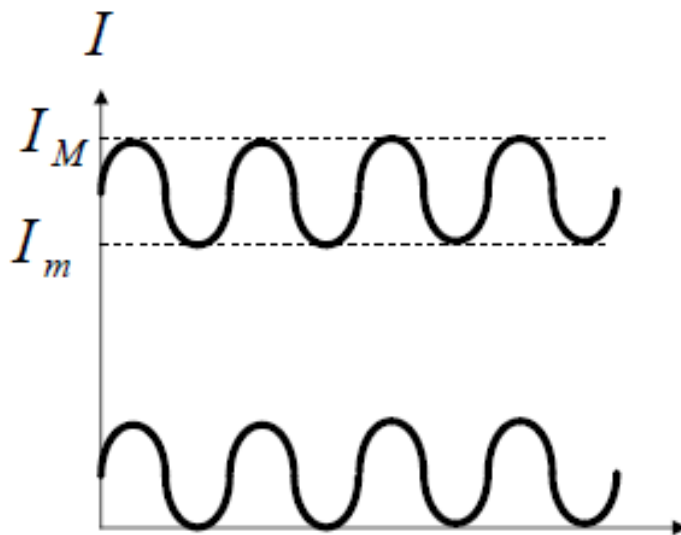
$$\gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \gamma = 1 & \text{暗纹全黑, 干涉条纹反差最大} \\ 0 < \gamma < 1 & \text{暗纹非全黑} \\ \gamma = 0 & \text{完全无暗纹, 无干涉} \end{array} \right.$$

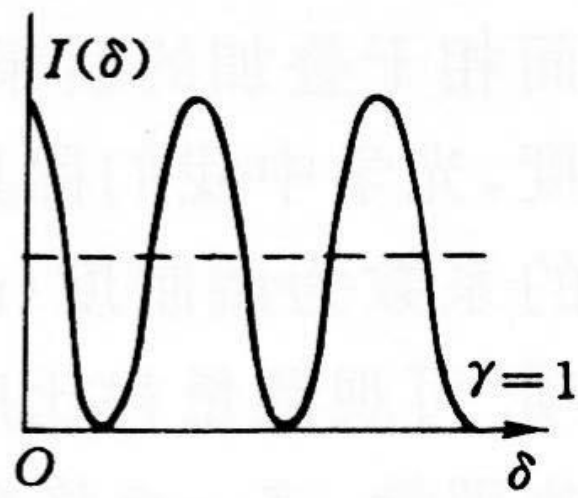
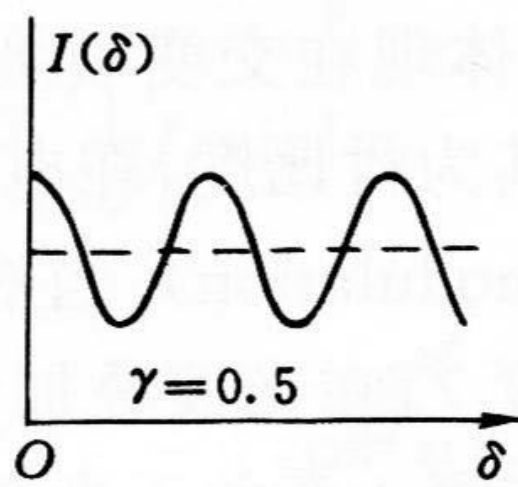
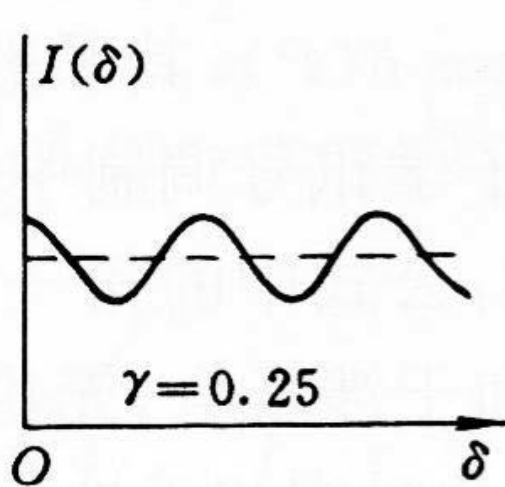
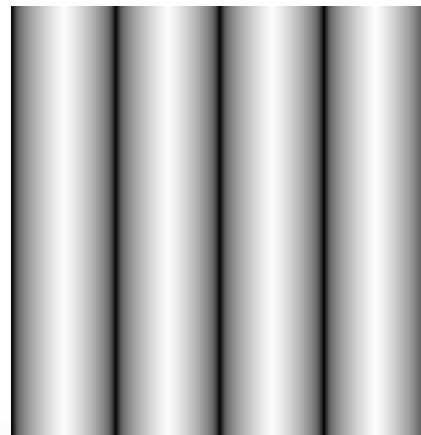
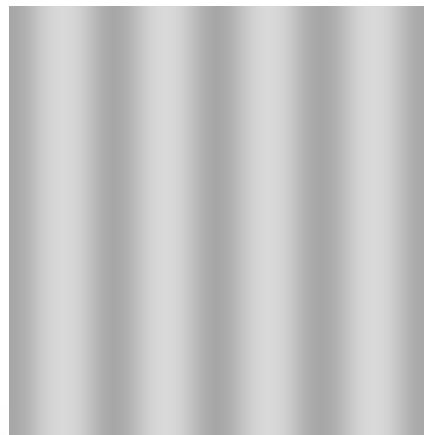
对于两束光的干涉:

$$\gamma = \frac{2\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2}{I_1 + I_2}$$

$$I = I_0(1 + \gamma \cos \delta)$$

$$I_0 = I_1 + I_2$$





**作业：**

p.169: 1, 2, 3

## 3-02 两个点源的干涉

1 两列球面波的干涉

2 杨氏 ( T. Young , 1801 ) 双缝实验

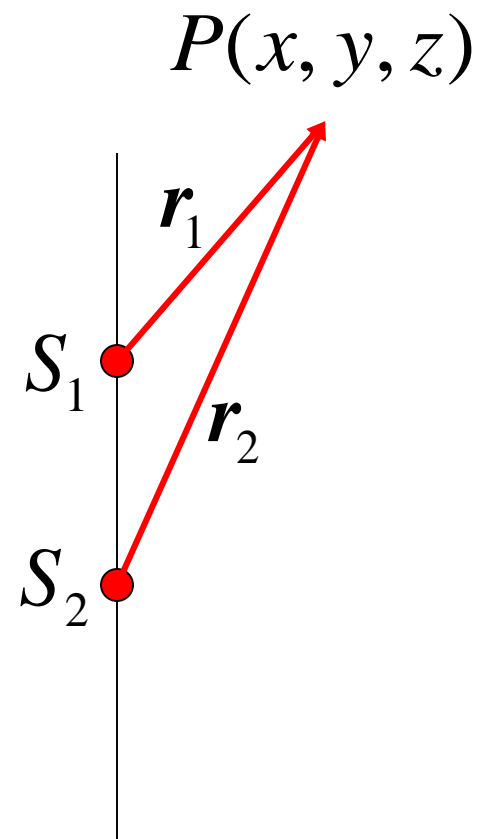
3 两束平行光的干涉 , 空间频率的概念

# 1. 两列球面波的干涉

两个点光源发出球面波，在场点P相遇。

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A_1 \cos(\omega t - k_1 r_1 - \phi_{01}) \\ &= A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_1 r_1 - \phi_{01}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2 &= A_2 \cos(\omega t - k_2 r_2 - \phi_{02}) \\ &= A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_2 r_2 - \phi_{02}\right)\end{aligned}$$





可设初相位均为零

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_2r_2 - n_1r_1)$$

光程差

$$\Delta L = n_2r_2 - n_1r_1$$

如果在真空中

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

干涉相长

$$\Delta L = r_2 - r_1 = j\lambda$$

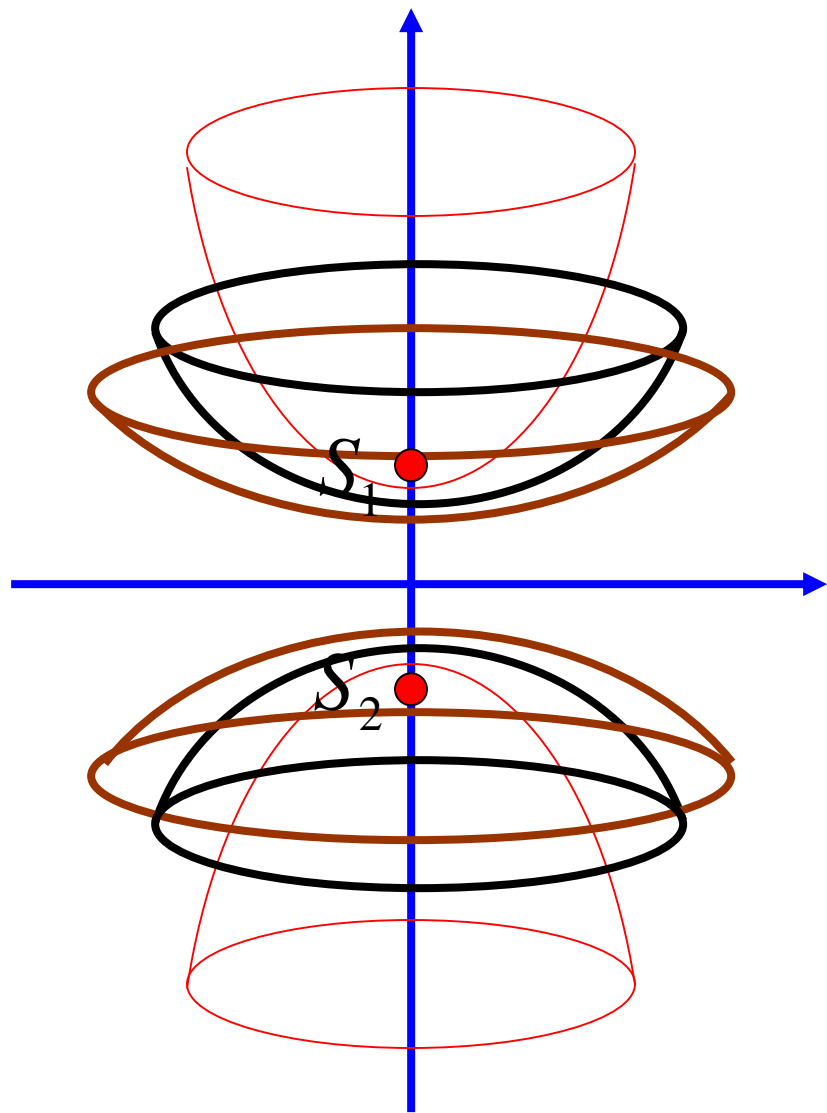
干涉相消

$$\Delta L = r_2 - r_1 = (2j + 1)\frac{\lambda}{2}$$

$j=0, (+/-)1, 2, 3, 4, \dots$ , 干涉级数

交错的亮条纹和暗条纹在空间形成一系列双叶旋转双曲面。在平面接收屏上为一组双曲线，明暗交错分布。

干涉条纹为非定域的，空间各处均可见到。



## 干涉条件 $\leftrightarrow$ 相干光的获得

- 1. 普通光源是**热辐射**或**自发辐射**
- 2. 单位时间内发出大量随机的波列
- 3. 所发出的波列之间相位无关联
- 3. 即使波长相等，也是非相干的



**定态光波场中，任意的两列波之间的相位差都是稳定的；但是，由于波场中有无数的波列，相位可以取任意值，总的效果，相位所起的作用被抵消了，即**干涉项**消失了**

- 对于其中标记为  $m$ 、 $n$  的任意两列定态光波，叠加后

$$I_{mn} = A_m^2 + A_n^2 + 2A_m A_n \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos \Delta\varphi_{mn} dt = A_m^2 + A_n^2 + 2A_m A_n \cos \Delta\varphi_{mn}$$

- 所有光波叠加，不同波列间  $\Delta\varphi_{mn}$  可任意取值

$$\sum_{m,n} I_{mn} = \sum_{m,n} A_m^2 + A_n^2 + \sum_{m,n} 2A_m A_n \cos \Delta\varphi_{mn} = \sum_m A_m^2 + A_n^2$$

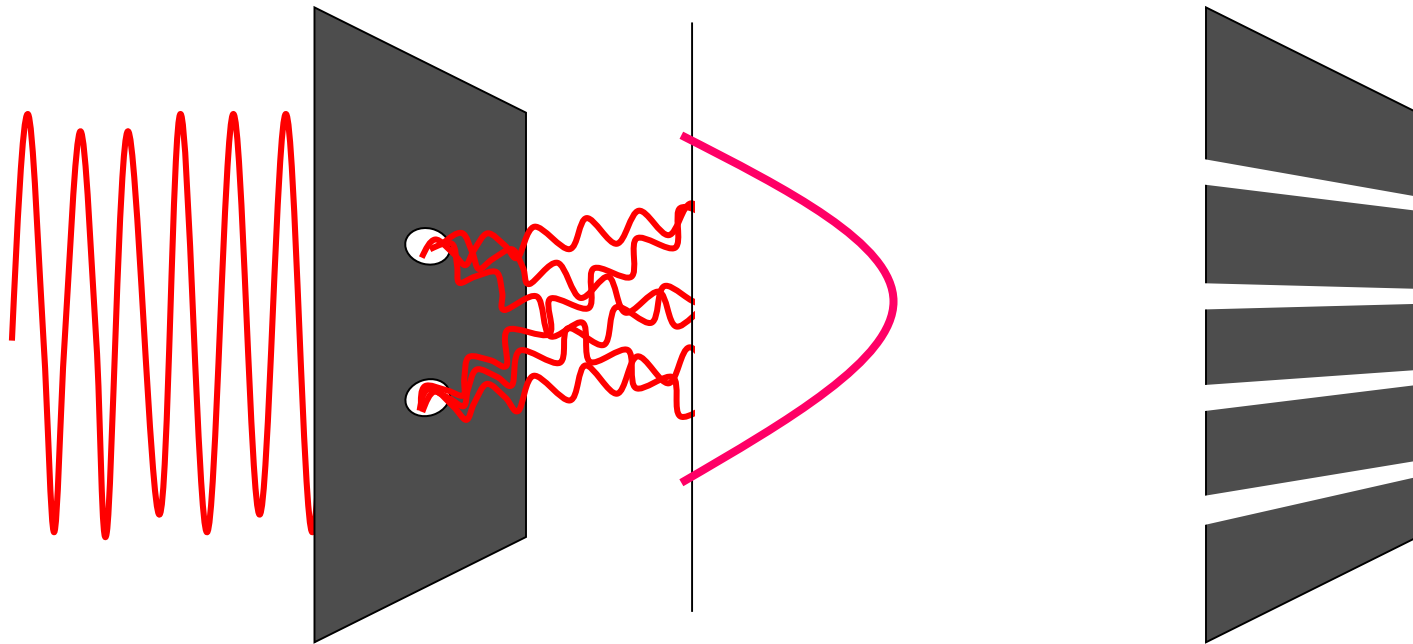
- 对于波场而言，干涉项消失
- 各处光强平均，没有明暗分布，没有干涉
- 这就是普通光源发光过程无法控制的结果
- 光源中大量的原子，随机发光。不同原子发出的光波是不相干的。
- 同一原子在不同时刻所发出的光波也是不相干的。

## “自己与自己相干”

- 如果只有不是很多的一些波列，则干涉是可以实现的,但实际上做不到
- 将每一列波都分为几部分，这几部分是相干的，是相干叠加，可以实现干涉
- 自己与自己干涉

# 杨氏干涉

- 挡板上的孔、缝将一列波分成了几列
- 是相干的，进行干涉



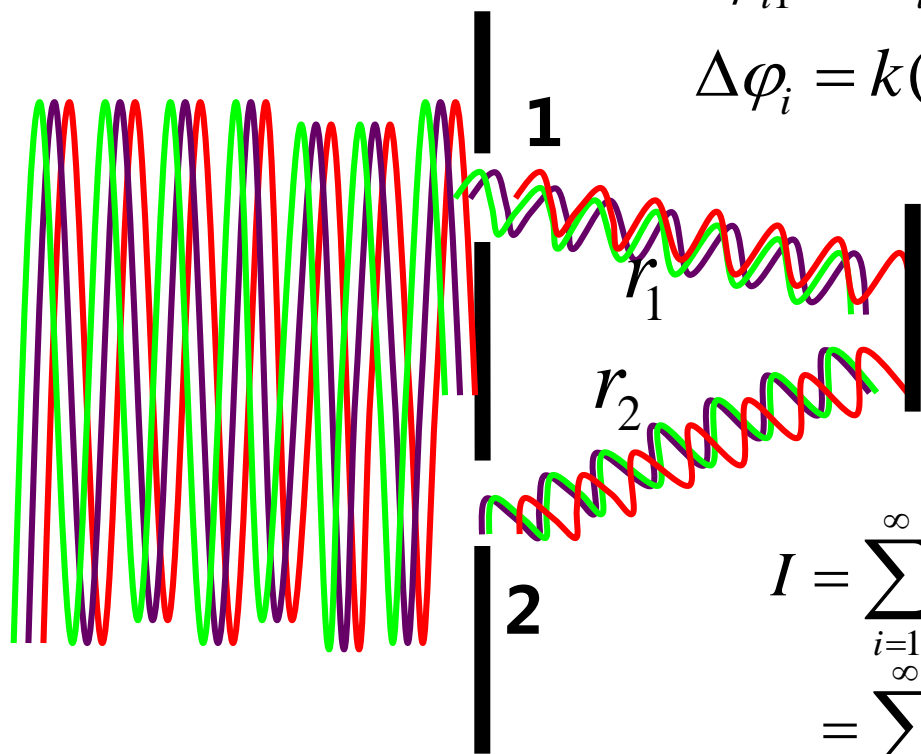
将每一列波都分成相干的几部分

$$I_i = A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + 2A_{i1}A_{i2} \cos \Delta\varphi_i \quad \text{相干叠加}$$

$$\varphi_{i1} = kr_{i1} + \varphi_{i10} \quad \varphi_{i2} = kr_{i2} + \varphi_{i20}$$

$$\Delta\varphi_i = k(r_1 - r_2) + (\varphi_{i10} - \varphi_{i20}) = \Delta\varphi(P)$$

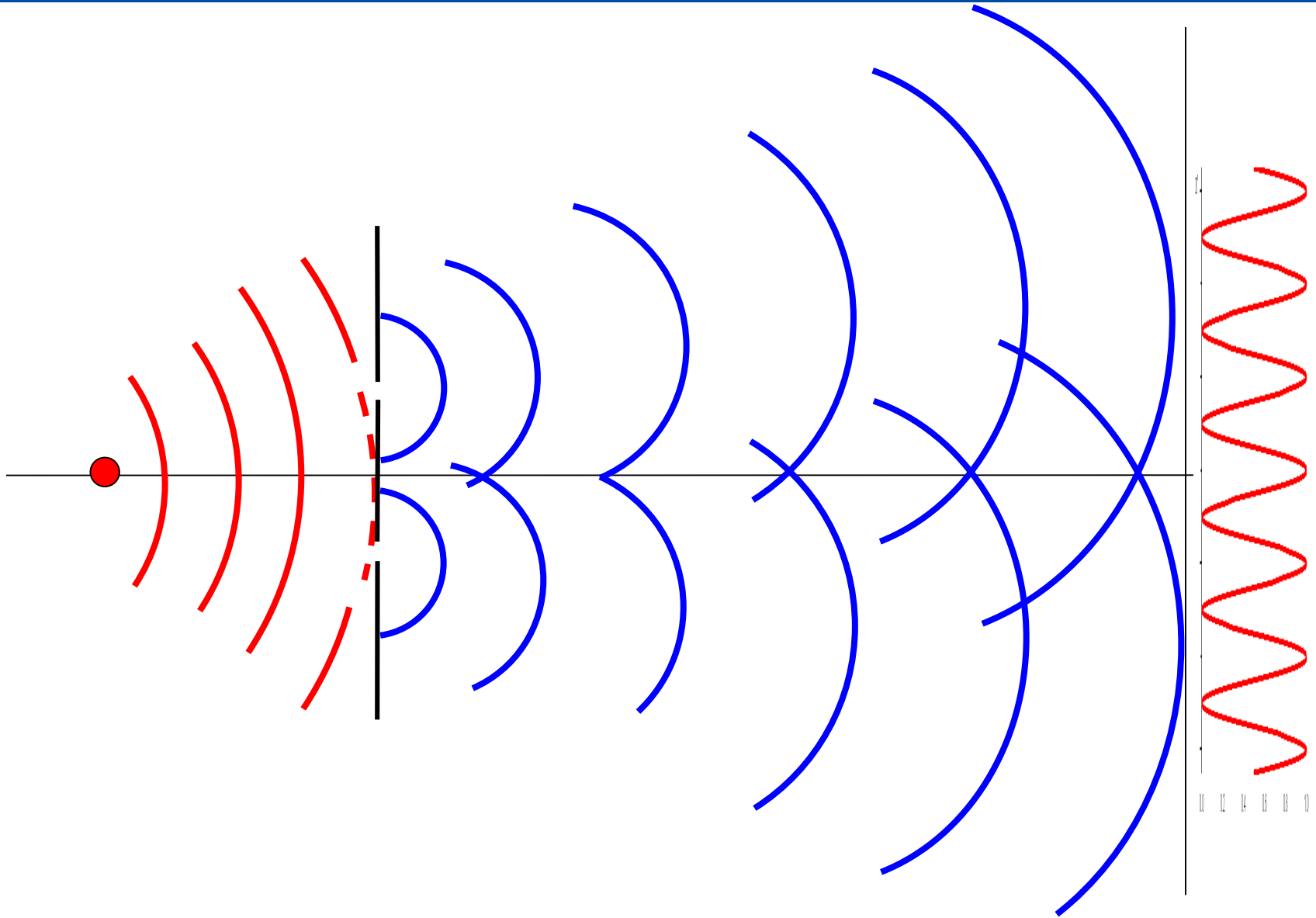
同一装置，所有波列  
相位差相等



$$I = \sum_{i=1}^{\infty} I_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + 2A_{i1}A_{i2} \cos \Delta\varphi$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + 2 \cos \Delta\varphi(P) \sum_{i=1}^{\infty} A_{i1}A_{i2}$$

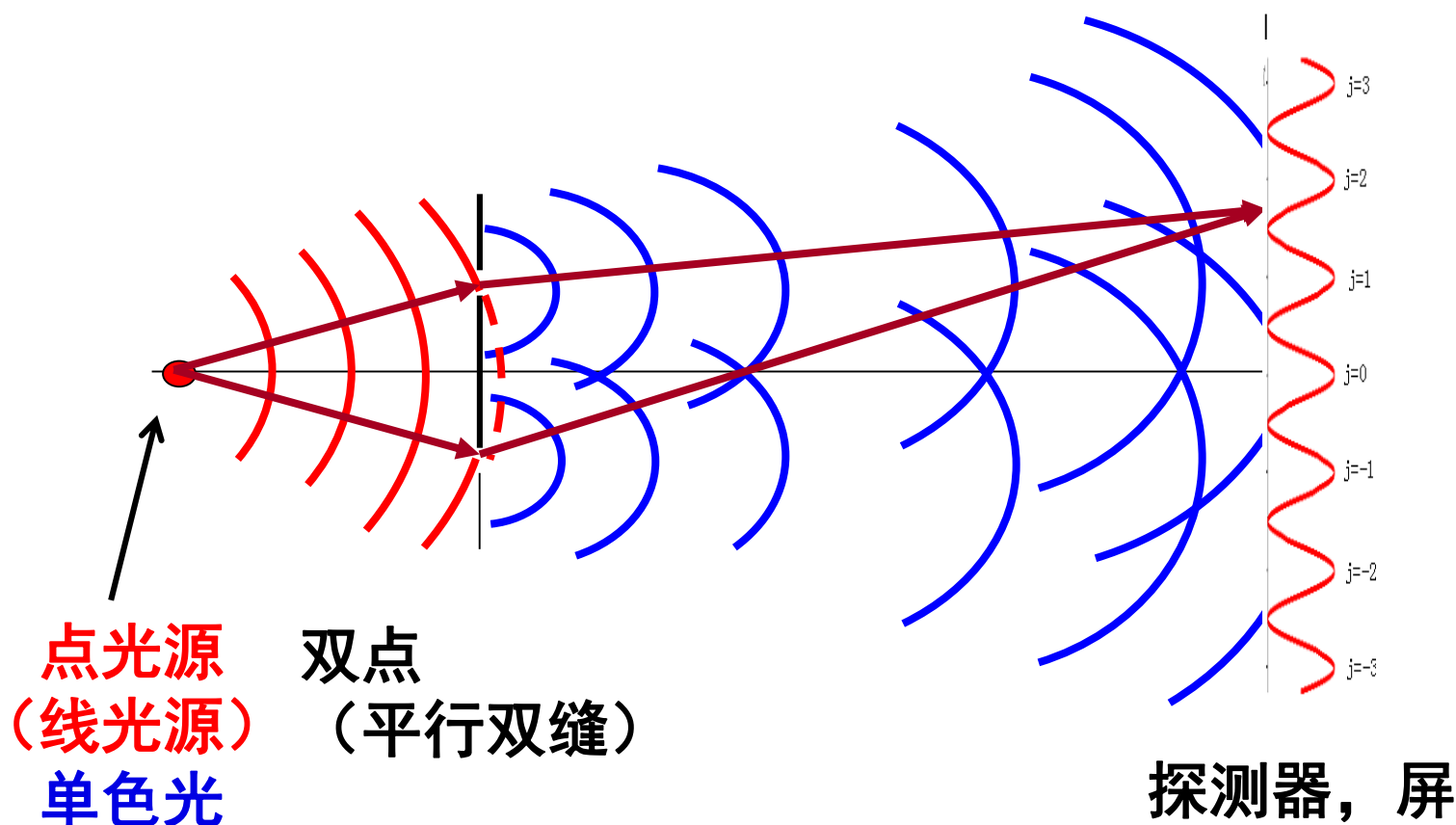
干涉项  $\neq 0$





## 2. 杨氏 ( T. Young , 1801 ) 双缝实验

1801年，英国科学家托马斯·杨 ( Thomas Young ) 设计实验演示光的干涉---杨氏双缝干涉实验 ( Double-slit experiment )



## 2. 杨氏 ( T. Young , 1801 ) 双缝实验

实验装置的一般参数：

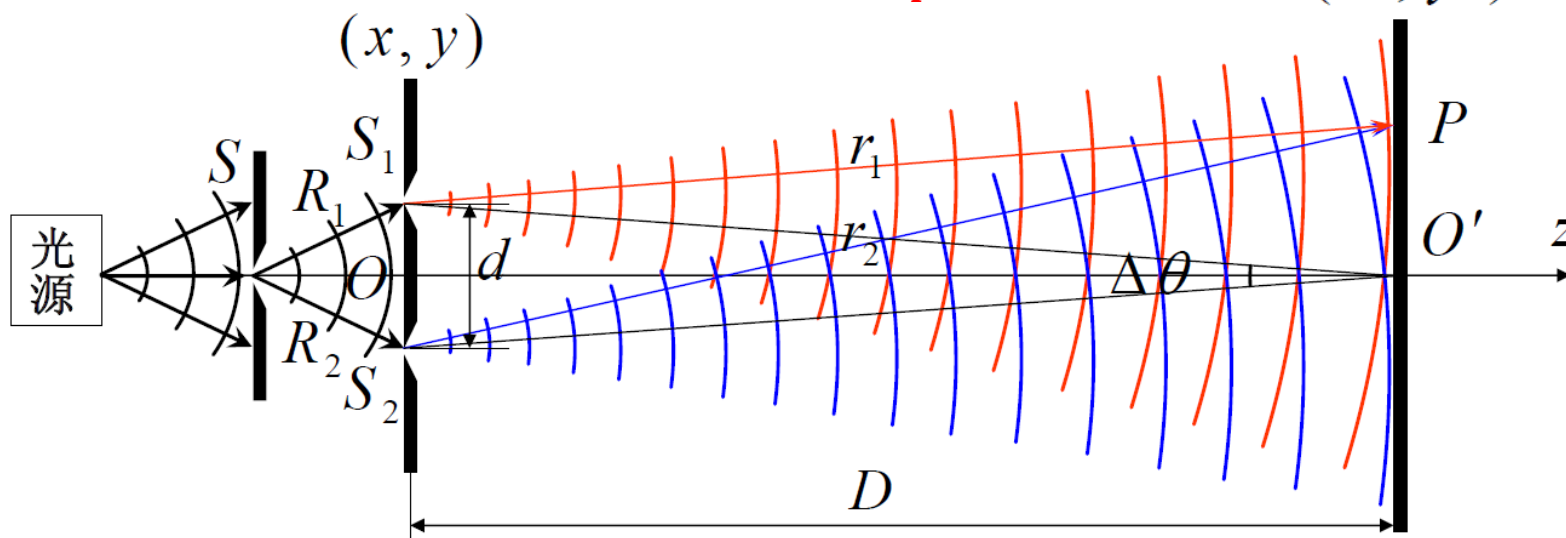
双孔间隔： $d \sim 0.1 - 1\text{mm}$

横向观察范围： $R_p \sim 1 - 10\text{cm}$

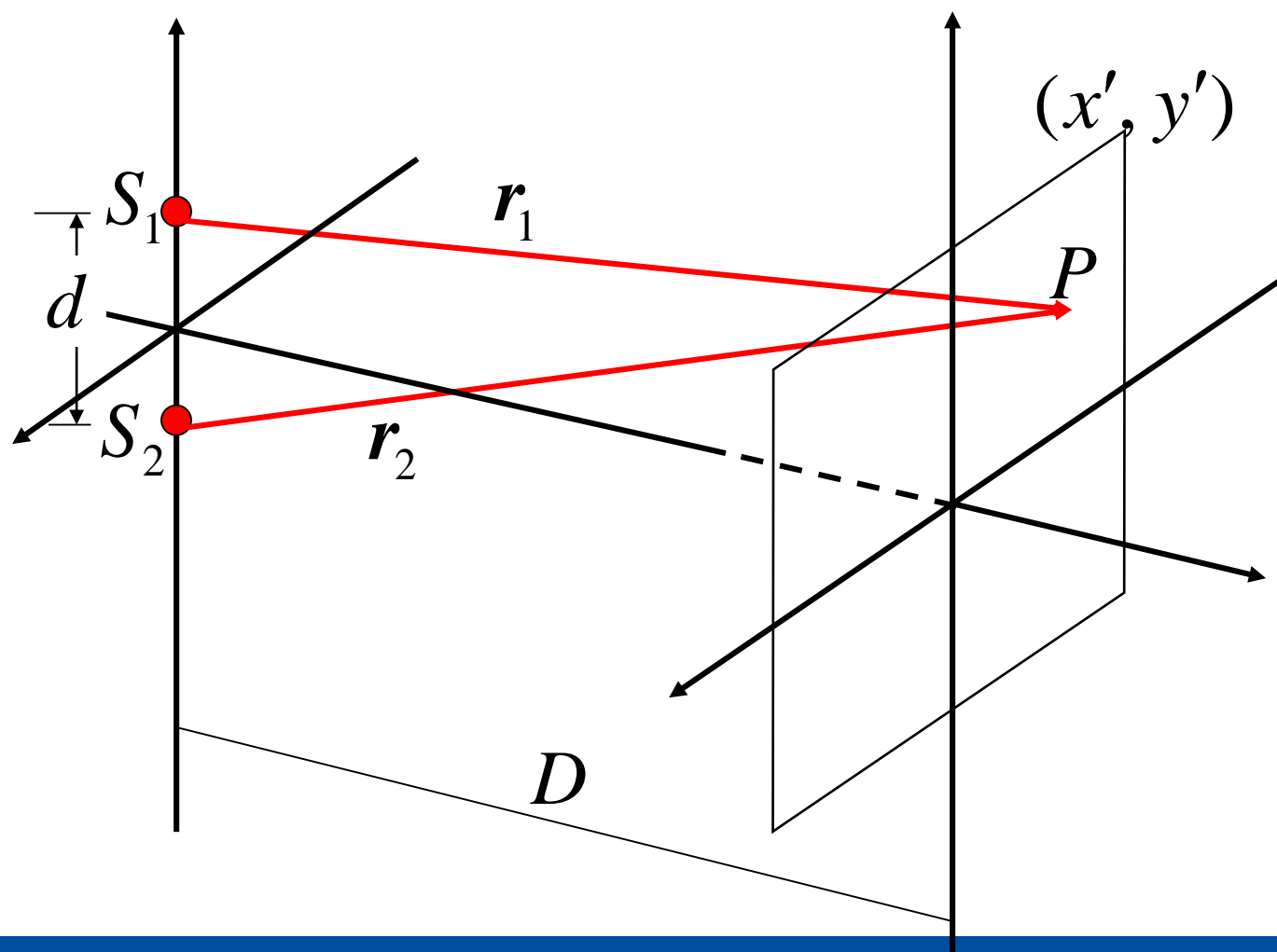
幕与双孔的距离： $D \sim 1 - 10\text{m}$

点源与接收场都满足傍轴条件：

$$d^2 \ll D^2, R_p^2 \ll D^2$$



- 轴外物点和场点都满足近轴条件
- 可以求得发出的光波在屏上的复振幅



# 近轴条件下点光源在接收屏上的复振幅分布

$$r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

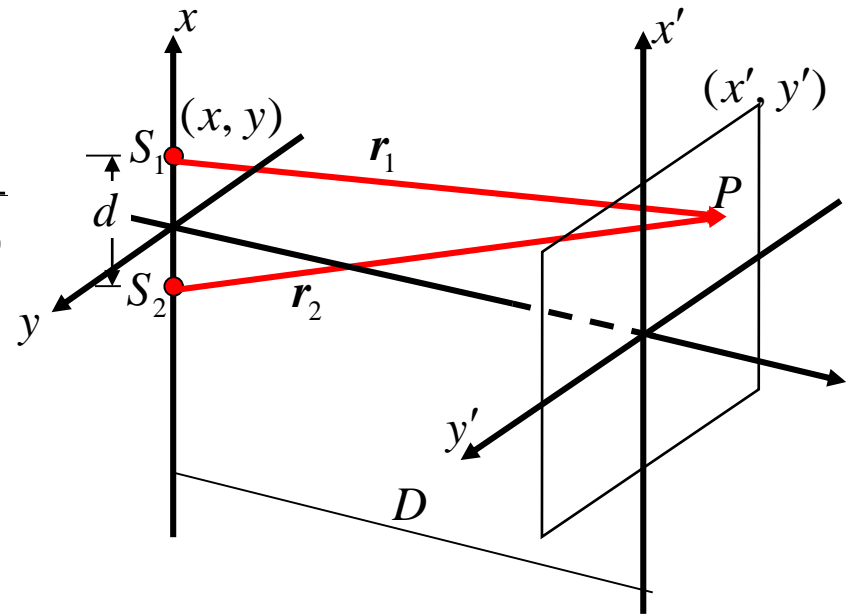
$z=0 \quad z'=D$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + D^2 - 2(xx' + yy')}$$

$$= \sqrt{\rho^2 + x'^2 + y'^2 + D^2 - 2(xx' + yy')}$$

$$= D \sqrt{1 + \frac{\rho^2 + x'^2 + y'^2}{D^2} - \frac{2(xx' + yy')}{D^2}}$$

$$\approx D + \frac{\rho^2 + x'^2 + y'^2}{2D} - \frac{xx' + yy'}{D}$$



两列波在  $P$  点的振幅  
 $A/D$

$y=0$

$$r_1 = D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D} - \frac{d}{2D} x'$$

$x = \pm d/2$

$$r_2 = D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D} + \frac{d}{2D} x'$$

两列波在  $P$  点的相位  
 $kr_1, \quad kr_2$

$$\tilde{U}_1(x', y') = \frac{A}{D} \exp\left\{ik\left[D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D}\right]\right\} \exp\left(\frac{-ikd}{2D} x'\right)$$

$$\tilde{U}_2(x', y') = \frac{A}{D} \exp\left\{ik\left[D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D}\right]\right\} \exp\left(\frac{ikd}{2D} x'\right)$$

合成的复振幅为  $\tilde{U}(x', y') = \tilde{U}_1(x', y') + \tilde{U}_2(x', y')$

$$= \frac{A}{D} \left[ \exp\left(\frac{-ikd}{2D} x'\right) + \exp\left(\frac{ikd}{2D} x'\right) \right] \exp\left\{ik\left[D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D}\right]\right\}$$

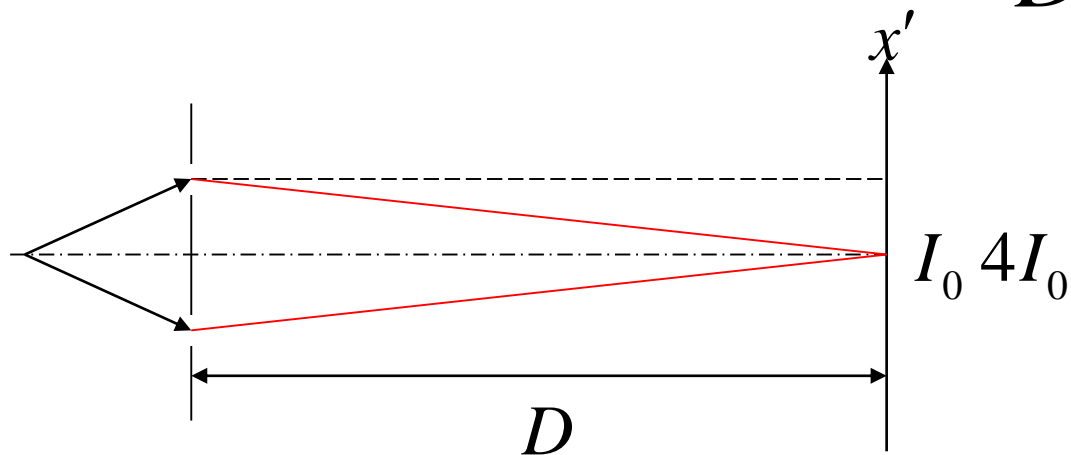
$$= \frac{2A}{D} \cos\left(\frac{kd}{2D} x'\right) \exp\left\{ik\left[D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D}\right]\right\}$$

强度分布为

$$I = \left(\frac{2A}{D}\right)^2 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right) = 4\left(\frac{A}{D}\right)^2 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)$$

$$= 4I_0 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right) \quad I_0 = \left(\frac{A}{D}\right)^2$$

从一个孔中出射的光波在屏中心的强度



$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{kd}{2D} x'\right)$$

**干涉相长  
(亮条纹)**  $\frac{kd}{2D} x' = j\pi \Rightarrow x' = j\pi \frac{2D}{kd} = j \frac{D}{d} \lambda$

**干涉相消  
(暗条纹)**  $\frac{kd}{2D} x' = (2j+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

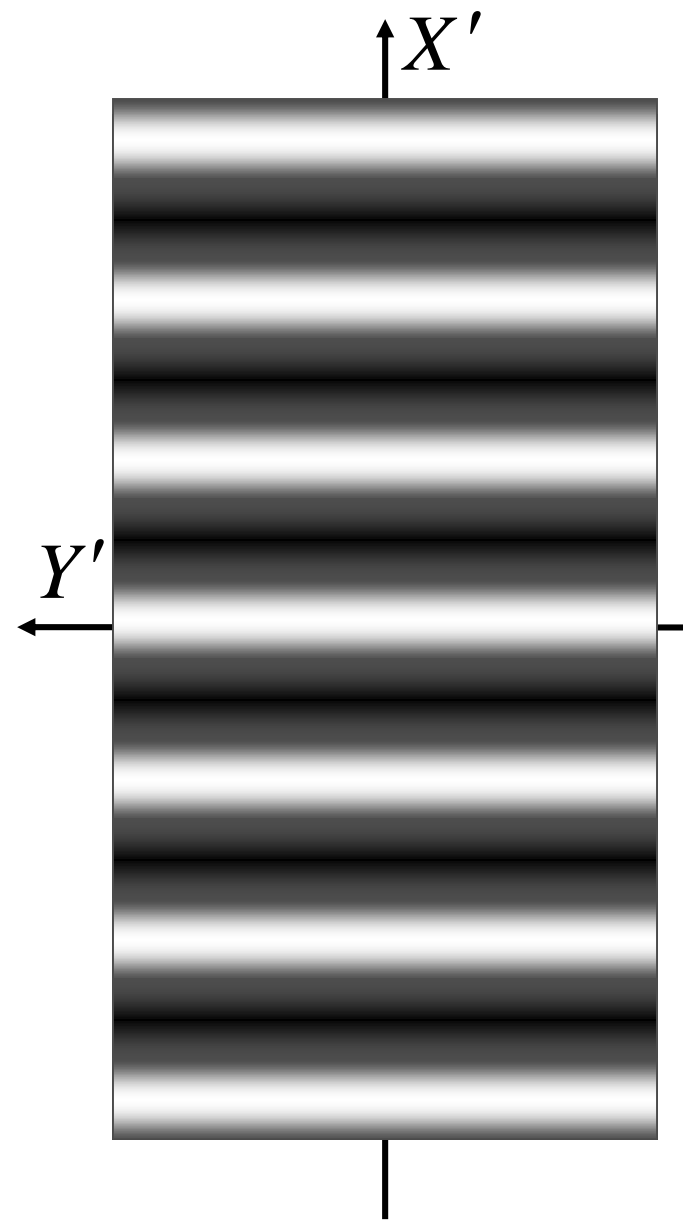
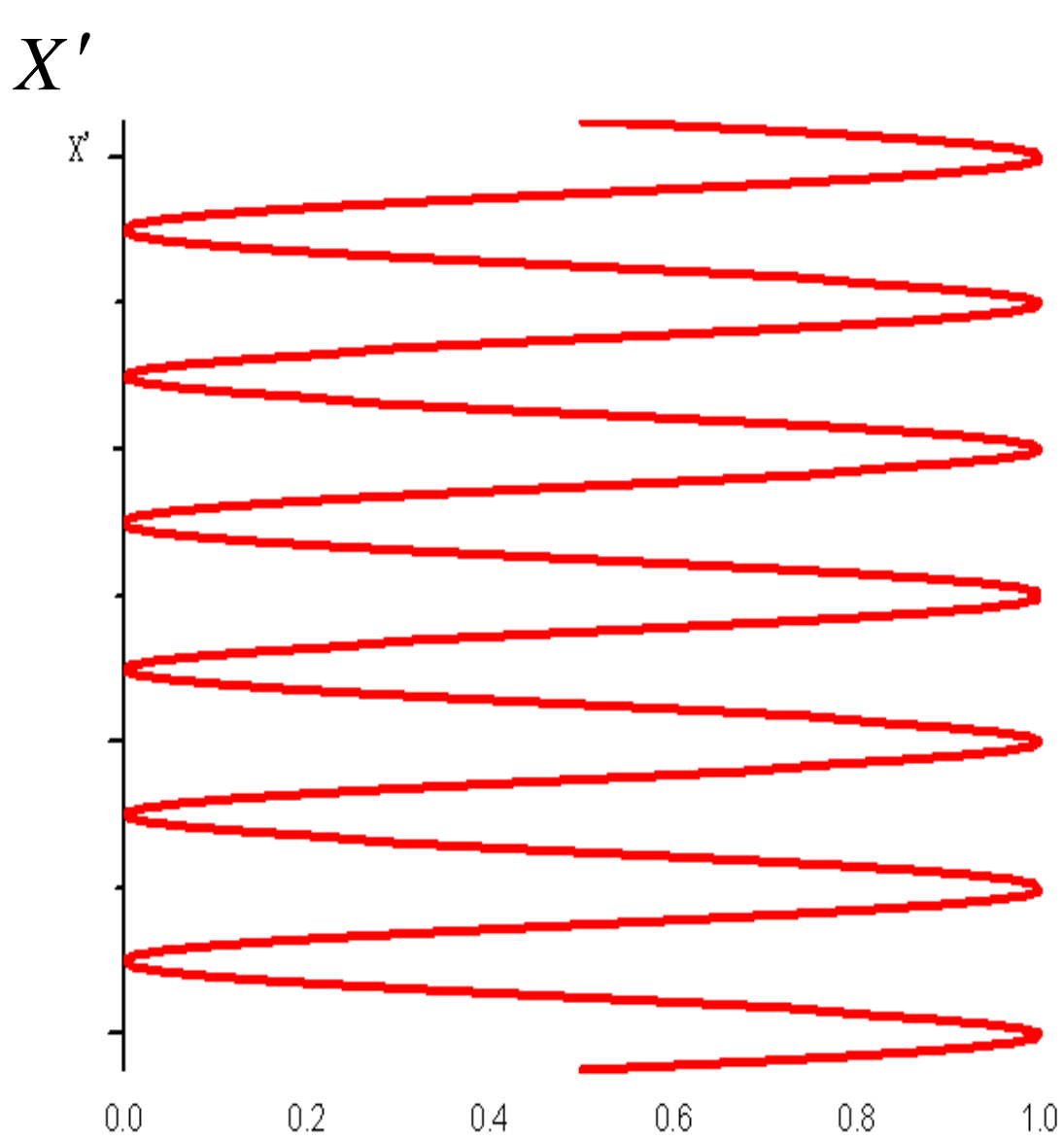
$$x' = (2j+1) \frac{\pi}{2} \frac{2D}{kd} = \frac{2j+1}{2} \frac{D}{d} \lambda$$

**是一系列等间隔的平行直条纹**

**相邻亮 (暗) 条纹间隔**

$$\Delta x' = \lambda D / d \quad \Delta \theta \approx d / D$$

$$\Delta x' \approx \lambda / \Delta \theta \quad \Delta x' \Delta \theta \approx \lambda$$



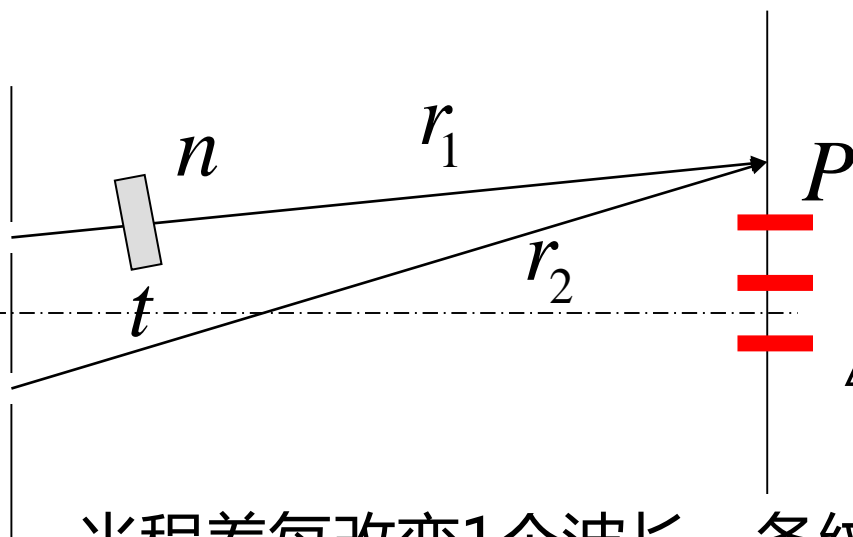


如光源和接收屏之间充满介质，则亮条纹位置为

$$x' = j \frac{D}{d} \frac{\lambda}{n}$$

相邻亮（暗）条纹间隔

$$\Delta x' = \frac{D}{d} \frac{\lambda}{n}$$



$$\begin{aligned} (r_1) &= r_1 - t + nt \\ &= r_1 + (n - 1)t \end{aligned}$$

$$\Delta L(P) = (r_1 - r_2) + (n - 1)t$$

光程差每改变1个波长，条纹移动1个间隔

# 讨论：

1. 简单：只有一个分光波的装置

巧妙：A、自身之间相干叠加；B、不同波列之间光强叠加（非相干）

深刻：A、找到了相干光；B、干涉是自身的一部分与另一部分的线性叠加；

## 十大“最美的物理学实验”之首

2. 如光源向某方向移动，则条纹反向移动。

3. 如光源包含两个波长的单色光，则屏幕上有两套间距不同的条纹存在。

4. 可应用在波长测量等。  $\lambda = \Delta x' d / D$

## 思考：

1. 如果光源非单色光？——光场时间相干性
2. 如果光源有限宽度？——光场空间相干性，单缝衍射
3. 如果光强慢慢减小，甚至每次都是一个光子？

——量子光学和量子理论

4. 如果用电子代替光子？——检验波动性，波粒二象性

存在不可区分性

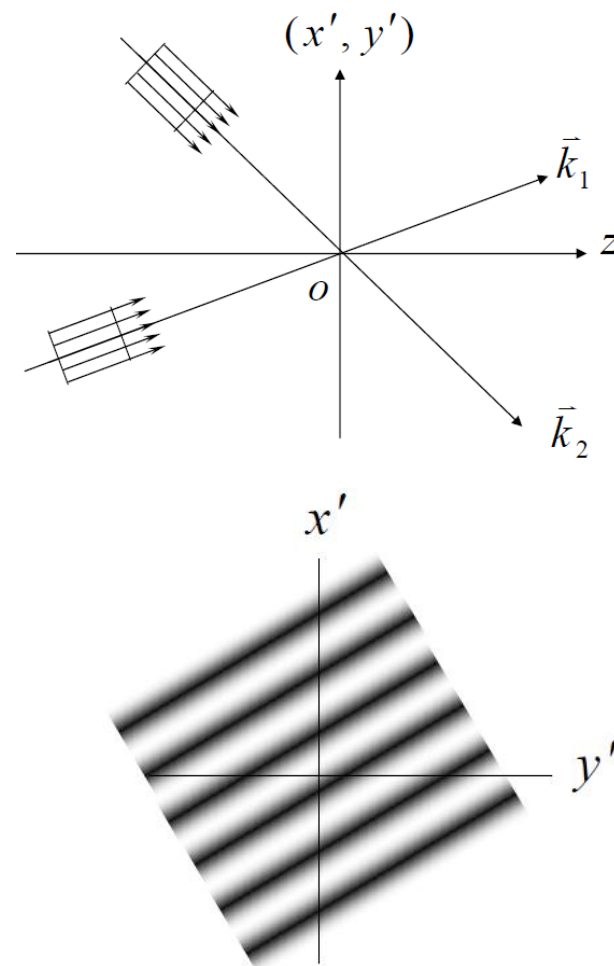


干涉

### 3. 两束平行光的干涉，空间频率(spatial frequency)

两束平行光束的干涉：

- 两列同频率单色光，振幅分别为  $A_1, A_2$ ；初相位为  $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ ，方向余弦角为  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ， $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$
- 研究在  $Z=0$  的波前上的相位分布



$z=0$   
处

$$\mathbf{k} = k(\cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z) \quad \mathbf{r} = x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y + z' \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k(\cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z)(x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y)$$

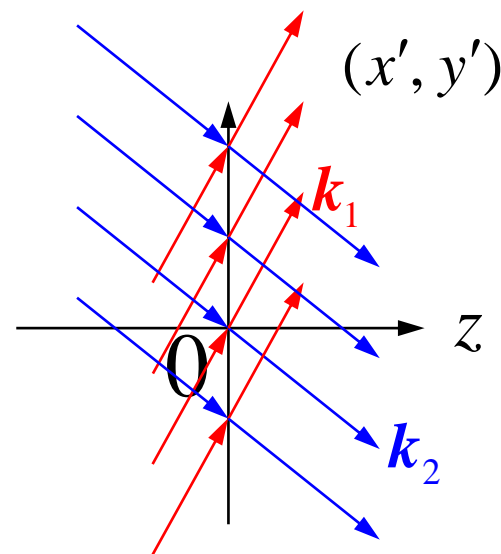
$$\varphi_1(x', y') = k(\cos \alpha_1 x' + \cos \beta_1 y') + \varphi_{10}$$

$$\varphi_2(x', y') = k(\cos \alpha_2 x' + \cos \beta_2 y') + \varphi_{20}$$

$$\Delta \varphi(x', y') = k(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)x' + k(\cos \beta_2 - \cos \beta_1)y' + \varphi_{20} - \varphi_{10}$$

$$I(x', y') = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta \varphi$$

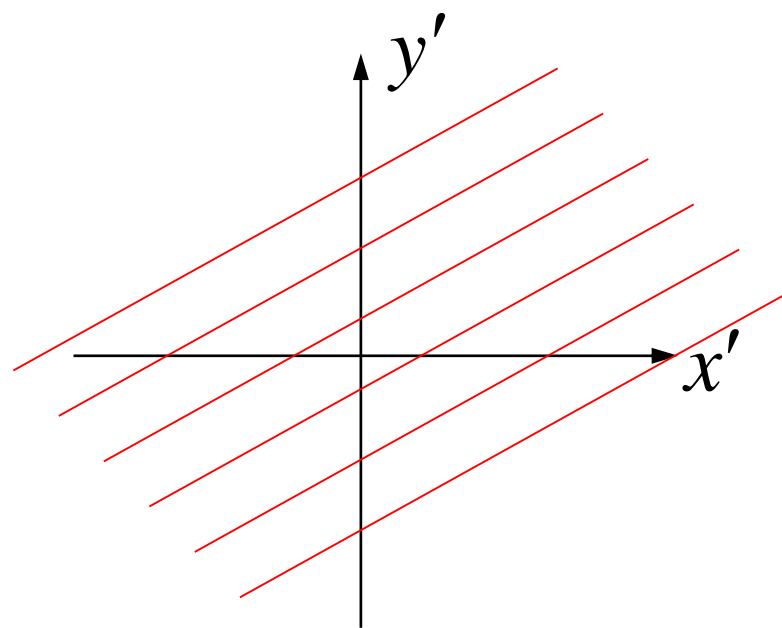
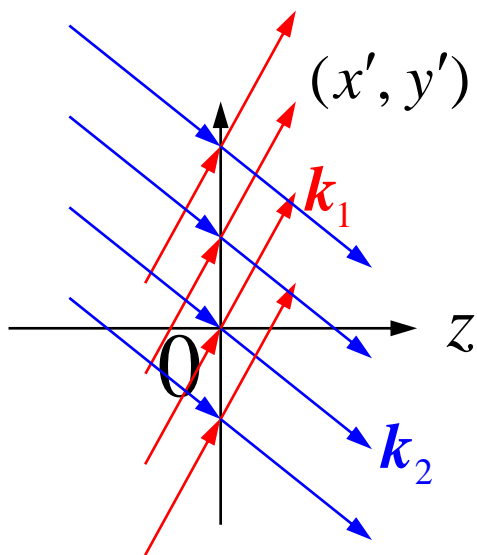
$$\Delta \varphi = \begin{cases} 2j\pi & \text{亮纹} \\ (2j+1)\pi & \text{暗纹} \end{cases}$$



$$k(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)x' + k(\cos \beta_2 - \cos \beta_1)y' + (\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \begin{cases} 2j\pi \\ (2j+1)\pi \end{cases}$$

亮、暗条纹都是等间隔的平行直线，形成平行直线族，斜率为

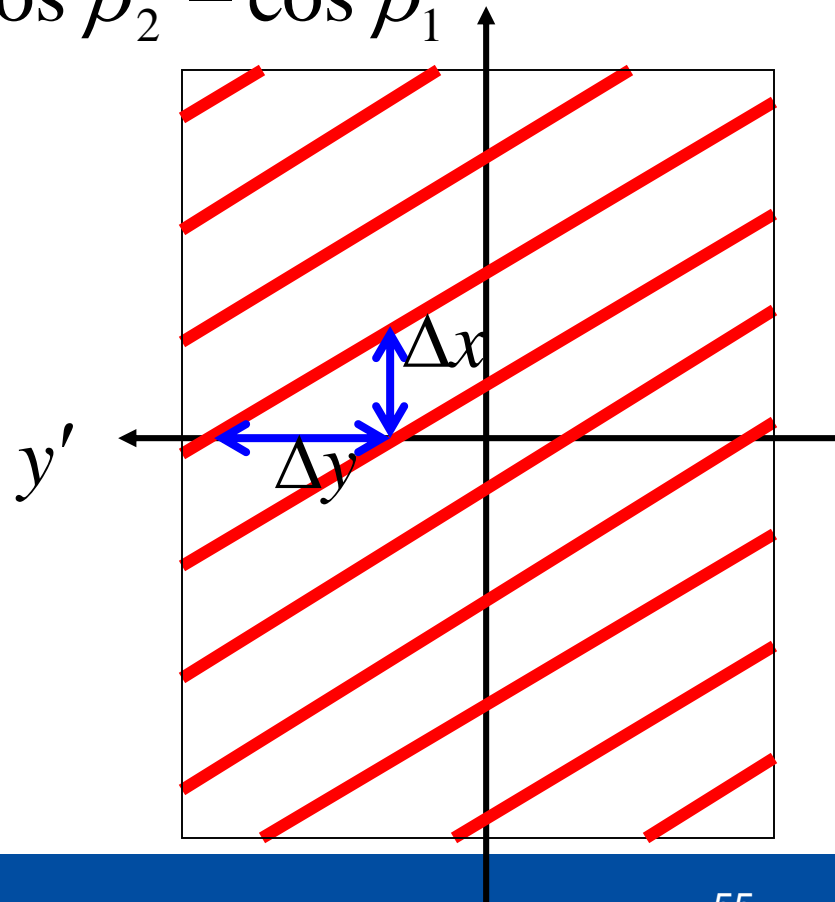
$$-\frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}{\cos \beta_2 - \cos \beta_1}$$



$$\begin{cases} \Delta x = \frac{2\pi}{k(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)} = \frac{\lambda}{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1} \\ \Delta y = \frac{2\pi}{k(\cos \beta_2 - \cos \beta_1)} = \frac{\lambda}{\cos \beta_2 - \cos \beta_1} \end{cases} \quad \text{条纹间隔}$$

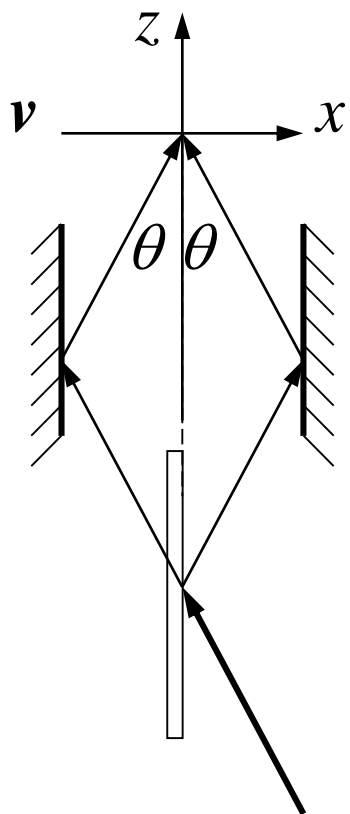
或条纹的空间频率

$$\begin{cases} f_{x'} = \frac{1}{\Delta x} \\ f_{y'} = \frac{1}{\Delta y} \end{cases}$$



## 例1

- 为测量粒子的速度，用两列波长为 $\lambda$ 的相干光照射粒子的路径，并使入射方向与路径法线间成 $\theta$ 角。记录反射光信号。接收器每秒收到 $n$ 个反射光的信号，求粒子速度。



两列光在 $xy$ 平面上的相位分布可表示为

$$\varphi_1 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta \mathbf{e}_x + 0 \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z) \cdot (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + 0 \mathbf{e}_z)$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta \quad \varphi_2 = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta$$

在 $xy$ 平面上亮纹  $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} x \sin \theta = 2j\pi$

平面上亮纹间距  $\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$

信号频率  $n = \frac{v}{\Delta x}$

粒子速度  $v = n \Delta x = \frac{n \lambda}{2 \sin \theta}$



## 例2

两束相干的平行HeNe激光 ( $\lambda=632.8\text{nm}$ ) , 传播方向在xz面内, 与z轴夹角  $\theta_1 = \pi/6$  ,  $\theta_2 = -\pi/4$  , 求干涉条纹的间距和空间频率?

$$\begin{aligned} \text{间距: } \Delta x' &= \frac{\lambda}{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2} = \frac{\lambda}{\sin \theta_1 - \sin \theta_2} \\ &= \frac{632.8\text{nm}}{\sin(\pi/6) - \sin(-\pi/4)} = 0.524\mu\text{m} \end{aligned}$$

空间频率:

$$f_{x'} = \frac{1}{\Delta x'} \approx 1896\text{mm}^{-1}$$

同上题，如想获得低频 $20\text{mm}^{-1}$ 的干涉条纹，求两平行光的夹角。

空间频率：

$$f_{r'} = \frac{\sin \theta_1 - \sin \theta_2}{\lambda} \approx \frac{\theta_1 - \theta_2}{\lambda} = \frac{\Delta\theta}{\lambda}$$

夹角：

$$\Delta\theta \approx f_{r'} \lambda = 20 \times 632.8 \frac{\text{nm}}{\text{mm}} \approx 0.013 \text{rad} \approx 45'$$

大夹角  $\leftrightarrow$  高空间频率

小夹角  $\leftrightarrow$  低空间频率

**作业：**

p.180-181: 2, 3, 5, 7, 8