第二章：光的电磁理论

2-01 定态光波与复振幅描述

1.1 波动概述
1.2 定态光波的概念
1.3 复振幅描述
1.4 平面波和球面波的复振幅描述
1.5 强度的复振幅描述

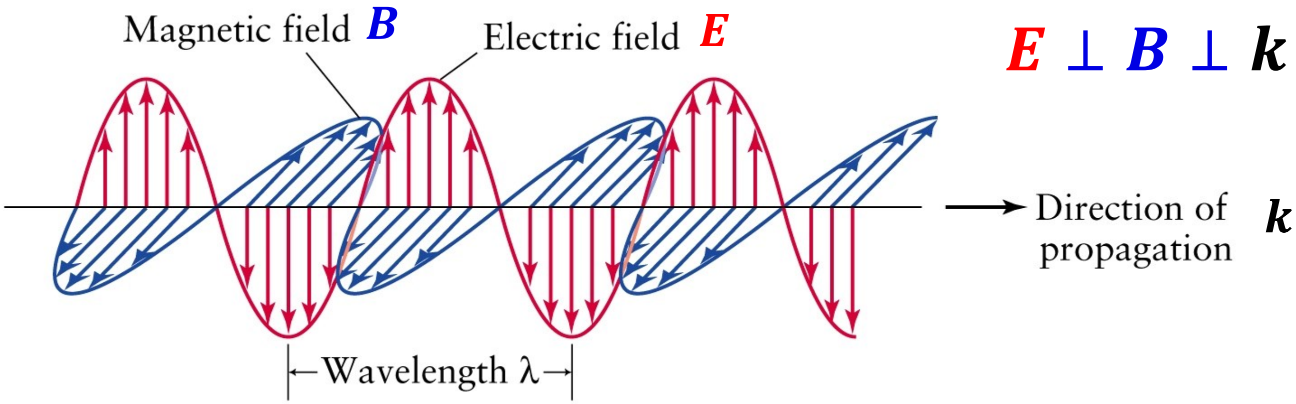
1.波动概述

- 1678年，Huygens提出光的波动学说。
- 1801年，T．Young在光通过双孔的实验中，首次观察到了光的干涉现象。
- 1808年，Malus观察到了光的偏振现象，说明光是横波。
- 1817年，Fresnel用波动理论分析光的衍射
- 1865年，Maxwell提出电磁波理论，断言光是电磁波。
- 1887年，Hertz证实光是电磁波。

→光的电磁波模型

光是交变电磁波

- 波长~500nm，频率~10^{14}Hz
- 从传播的角度看，是波动，是振动的**传播**
- 用**速度、方向、振幅**等参数描述
- 从物理量分布的角度看，是**交变**的**空间场**
- 用**电场强度、磁场强度**等物理量描述
- **时间**、**空间**是描述波的重要参量



$\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{\lambda}$: 波长；（介质中波长=真空中波长/n）；

$\boldsymbol{\nu = c/\lambda}$: 频率；（$\omega = \boldsymbol{2\pi\nu}$ 圆频率，角频率）

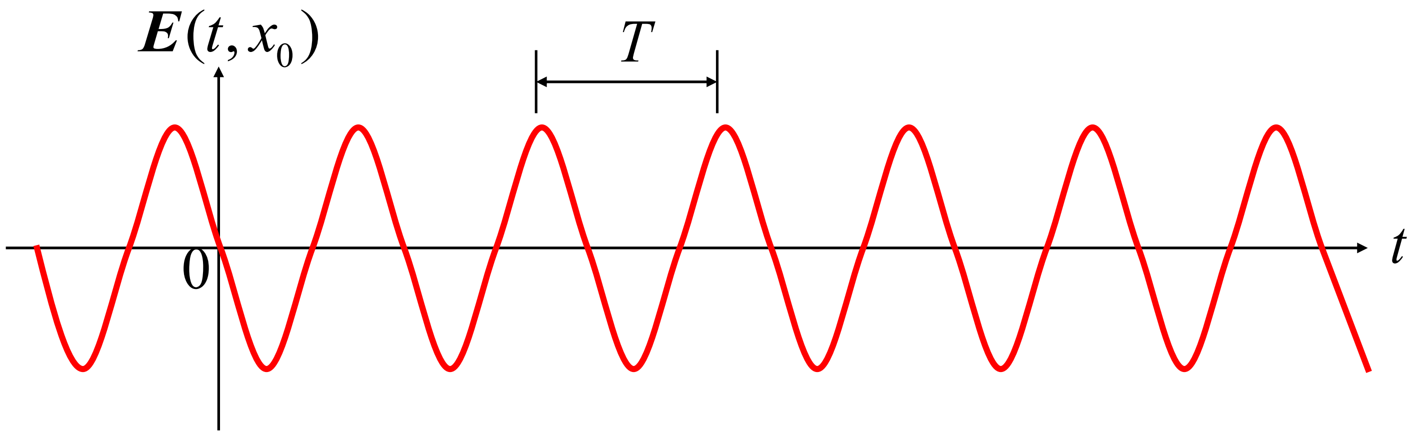
$\boldsymbol{k}$: 波矢；(传播方向)； $|\boldsymbol{k}| = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{c}}$

$\boldsymbol{E}$的振动方向：偏振

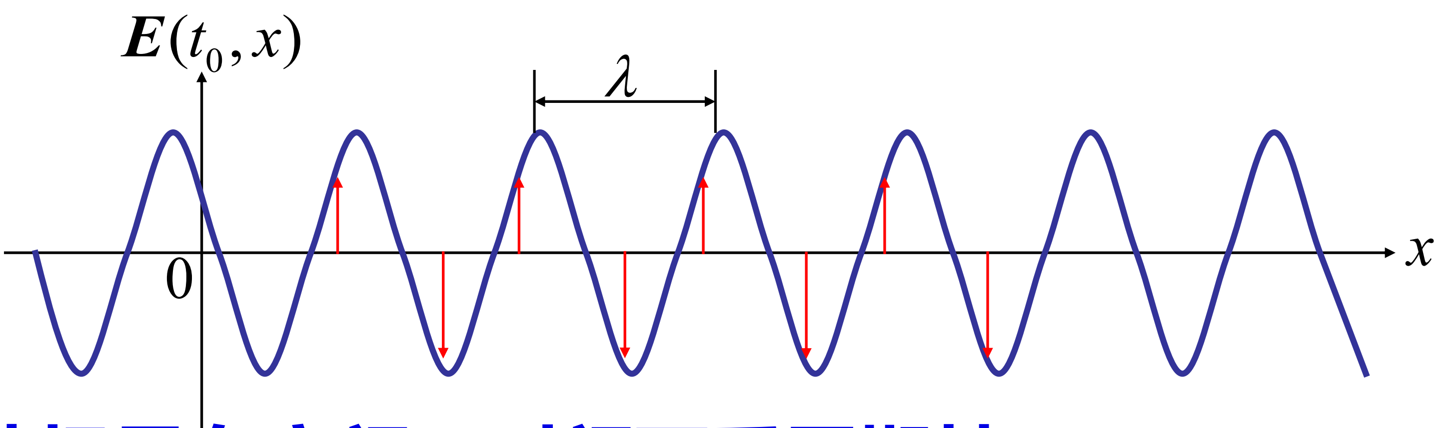
光强：$I = \bar{S} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2c\mu_0}} E_0^2 \propto E_0^2$

波的周期性

- **时间周期性**：波场中任一点的物理量，随时间做周期变化，具有时间上的周期性
- 时间**周期**：T；$\nu = 1/T$：时间**频率**，单位时间内变化（振动）的次数



- **空间周期性**：某一时刻，波场物理量的分布，随空间作周期性变化，具有空间上的周期性
- **波长λ**：空间周期；$\tilde{\nu} = 1/\lambda$：空间频率，单位空间长度内物理量的变化次数，**波数**



- **波场具有空间、时间两重周期性**

振动与波的表达式

- 取定原点（初始的时刻和空间位置）

原点的振动 $E(t,x_0)=A\cos(2\pi\nu t-\varphi_0)$

任一点的振动比原点滞后 $\Delta t = x - x_0 = \Delta x / v$

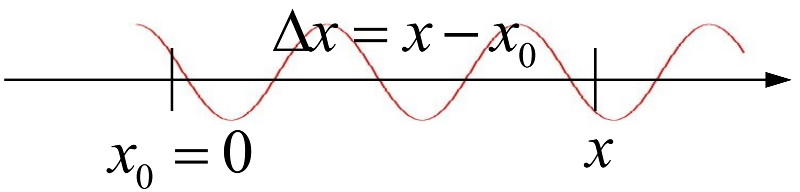
任一点的振动 $E(t,x)=E(t-\Delta t,x_0)$

$$E(t,x)=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x-x_0}{v})-\varphi_0]=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{v})-\varphi_0]$$

$$=A\cos(2\pi\nu t-\frac{2\pi}{\lambda}x-\varphi_0)$$

$$2\pi\nu=\omega \qquad \frac{2\pi}{\lambda}=k$$

$$=A\cos(\omega t-kx-\varphi_0)$$



$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi v/\lambda$$

2π时间内的频率，圆频率（角频率）

$$k = 2\pi/\lambda$$

2π长度内的波数，角波数（圆波数），波矢

$$\varphi(P,t) = \omega t - kx - \varphi_0$$

波的相位，与时间和空间相关

$$U(P,t) = A(P)\cos[\varphi(P,t)]$$

振动取决于相位，所以振动的传播就是相位的传播!!

光波是电磁波（矢量波）

- 电场分量、磁场分量、波的传播方向即波矢等物理量，都是矢量。

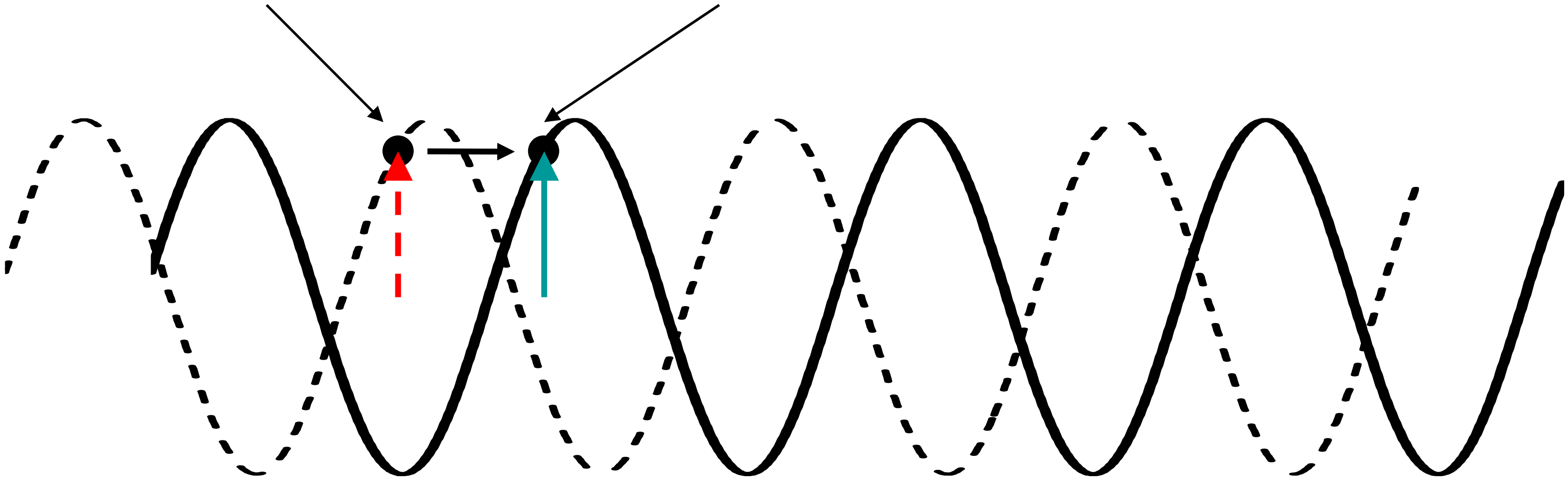
波矢 $$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{n}$ 传播方向的单位矢量

- 电场分量的振幅、磁场分量的振幅、波长、频率等物理量是标量

光的传播

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \;=\; \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t+\Delta t)$$



- 光的传播，是振动的传播，就是将光波场中物理量（电场强度、磁场强度）从空间的一点传播到另一点

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0(P)\cos[\omega t-kz-\varphi_0]$$

- 波场的量值由相位决定
- 物理量的传播其实就是相位的传播，在传播的过程中，相位保持不变。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t+\Delta t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\omega(t+\Delta t)-k(z+\Delta z)-\varphi_0=\omega t-kz-\varphi_0$$

$$k\Delta z-\omega\Delta t=0 \qquad \frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{k}$$

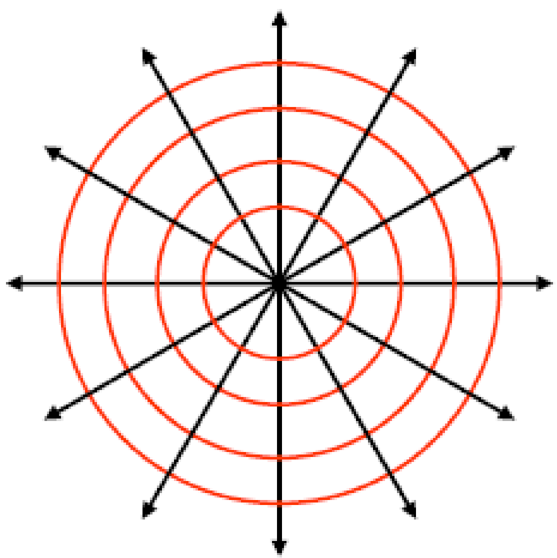
$$\boldsymbol{v}=\frac{\omega}{k}$$

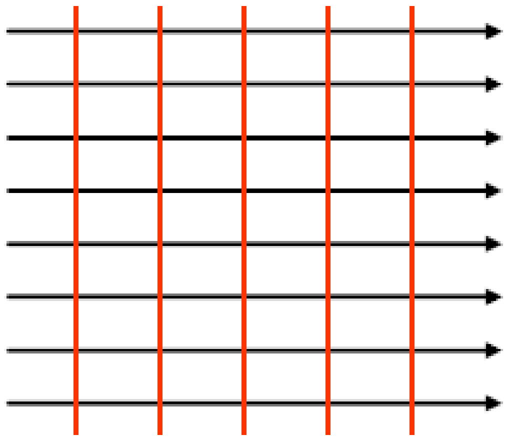
光波相位传播的速度，相速度

波的几何描述

波面(**wave surface**)：等相位面
波线(**wave ray**)：能量传播的方向

波线





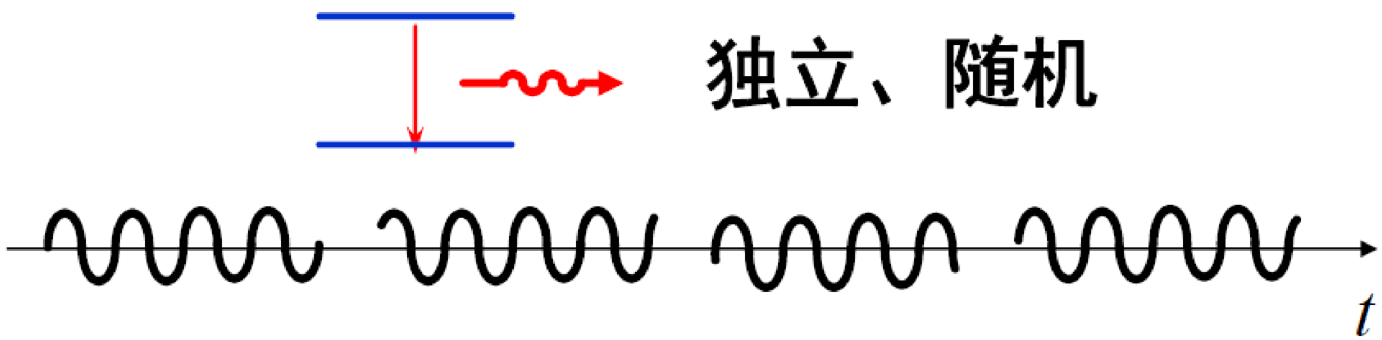
波面

球面波

平面波

2.定态光波

光波的特点：
i）波长短（100nm量级），频率高（100THz）
ii）发射源是微观客体



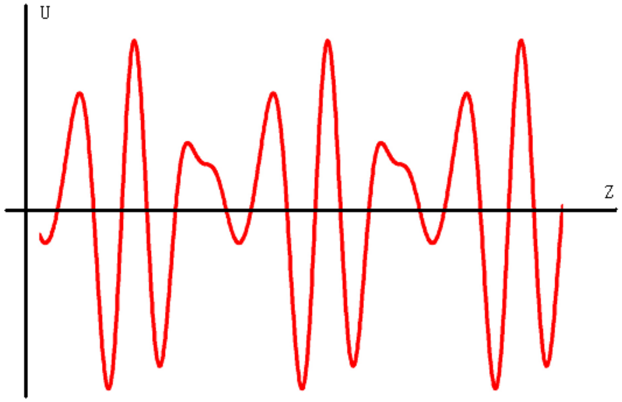
一次发光时间（一个波列）： 10^{-8}s
一个波列包含：10^{6}个周期
→可看做**定态波**。

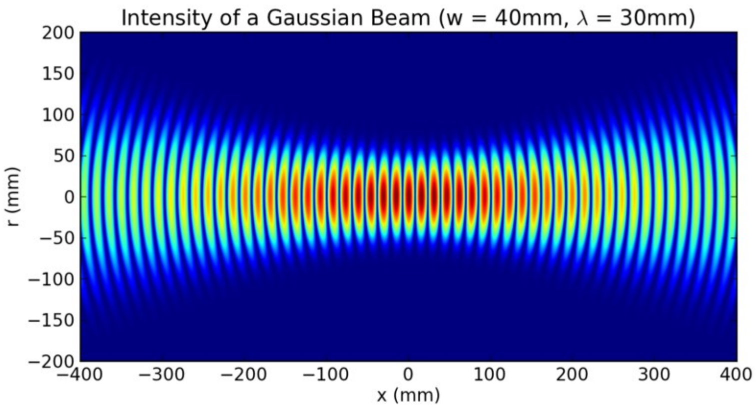
定态(stationary state)波场：

i）空间各点的扰动是同频率的简谐振动；

ii）波场中各点扰动的振幅不随时间变化，扰动在空间形成一个稳定的振幅分布。

- 满足上述要求的光波应当充满全空间，是无限长的单色波列。
- 但当波列的持续时间比其扰动周期长得多时，可将其当作无限长波列处理。
- 任何复杂的非单色波都可以分解为一系列单色波的叠加。
- 定态光波不一定是简谐波，其空间各点的振幅可以不同。





定态标量波的数学描述：

电磁波都是矢量波，应该用矢量表达式描述。但对符合上述条件的定态光波，在一个取定的平面内描述定态光波的振动通常用标量表达式描述。

$$U(P,t) = A(P)\cos[\omega t - \varphi(P)]$$

$A(P)$ 振幅的空间分布

$\varphi(P)$ 相位的空间分布

均与时间 *t* 无关

波面：波场空间中相位相同的曲面构成光波的等相位面，即波面或波阵面。可根据波面的形状将光波分类。

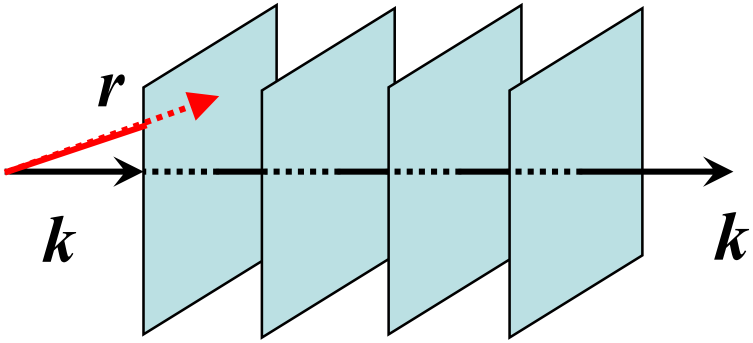
$$\varphi(P) = \text{Const.}$$

平面波：波面是平面

- （a）振幅为常数
- （b）空间位相为直角坐标的线性函数

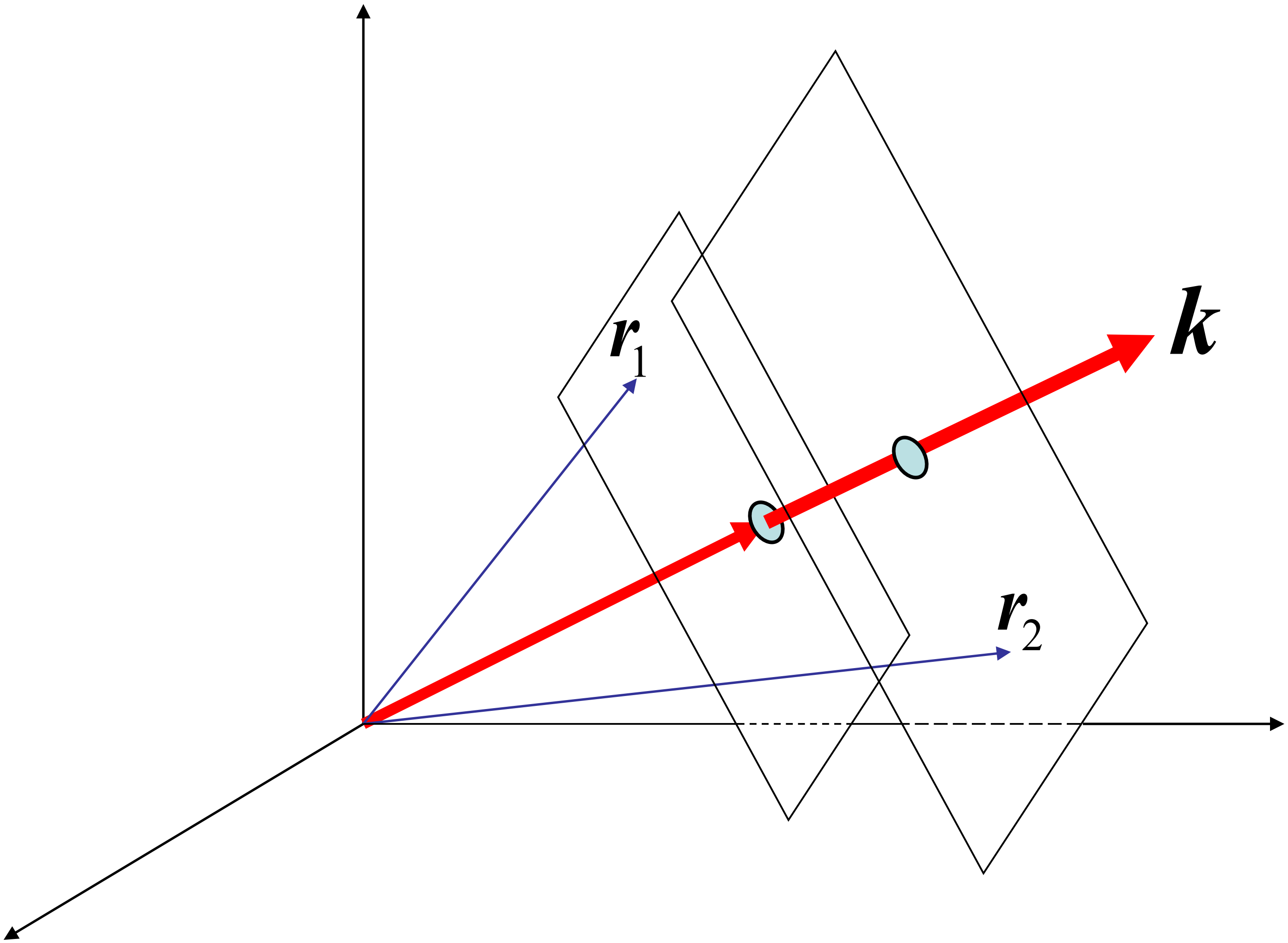
$$\varphi(P) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_0$$

$$= k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0$$



波面　　$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = \text{Const.}$

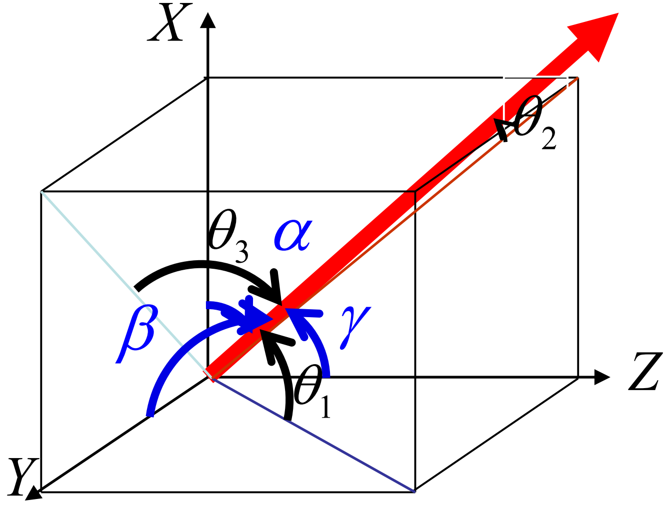
满足上式的点构成与波矢垂直的一系列平面



r1
r2
k

波矢的方向角表示

- 在数学中常用方向余弦表示矢量方向，即用矢量与坐标轴间的夹角表示
- 在光学中习惯上采用波矢与平面间的夹角表示矢量的方向



$$\boldsymbol{k} = k(\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \cos\beta\boldsymbol{e}_y + \cos\gamma\boldsymbol{e}_z)$$

$$\boldsymbol{k} = k(\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2\boldsymbol{e}_y + \sin\theta_3\boldsymbol{e}_z)$$

波场中一点（x,y,z）处的相位为

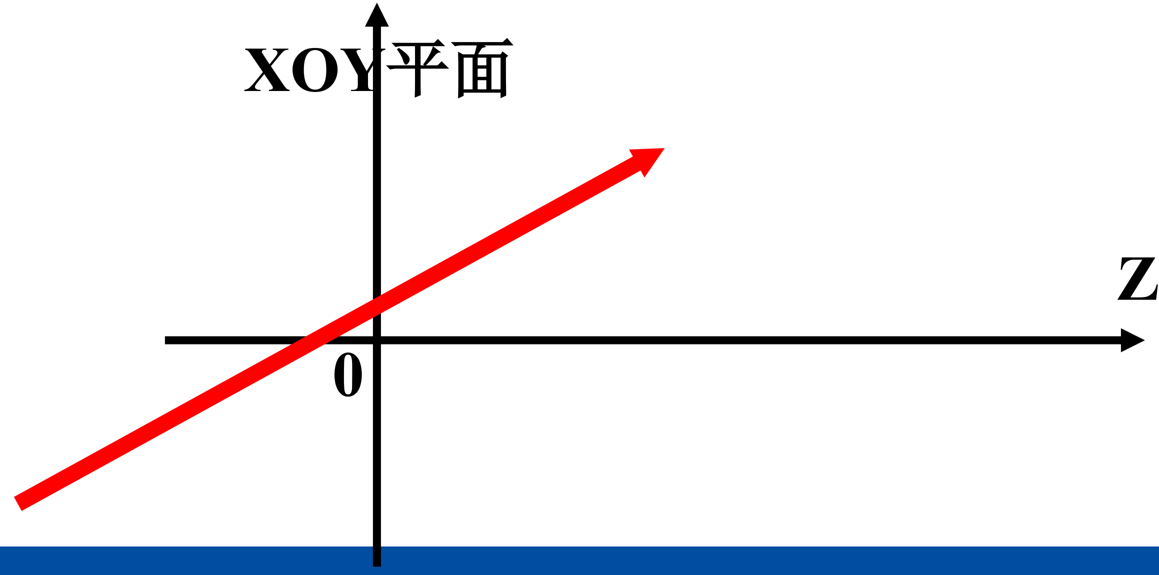
$$\varphi(x,y,z)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0$$

$$\boldsymbol{k}=k(\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x+\sin\theta_2\boldsymbol{e}_y+\sin\theta_3\boldsymbol{e}_z)\qquad \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$$

$$\varphi(x,y,z)=k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2+z\sin\theta_3)+\varphi_0$$

通常取一平面在z=0处，则该平面上的相位分布为

$$\varphi(x,y,0)=k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)+\varphi_0$$



球面波：波面是球面

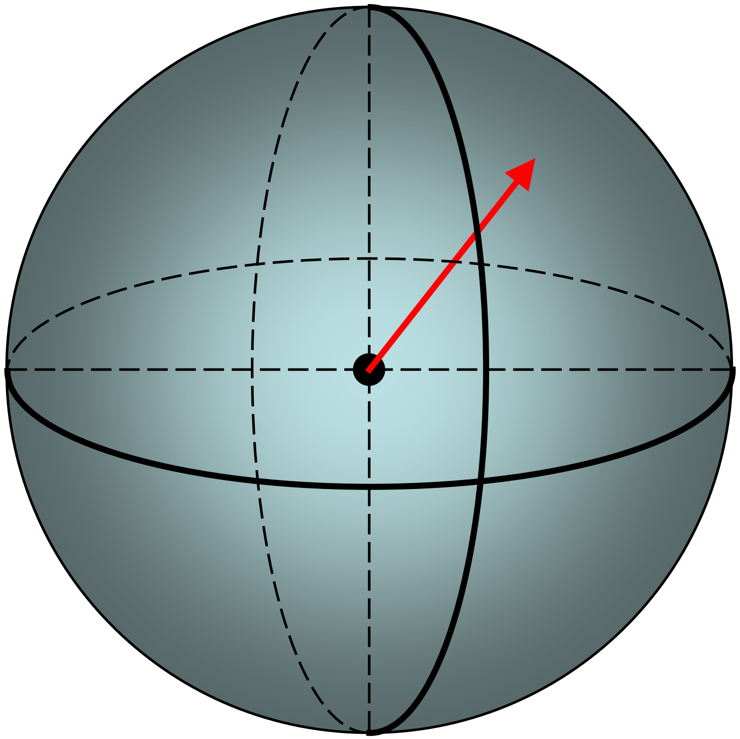
(a) 振幅

$$A(P)=a/r$$

(b) 空间位相

$$\varphi(P)=kr+\varphi_0$$

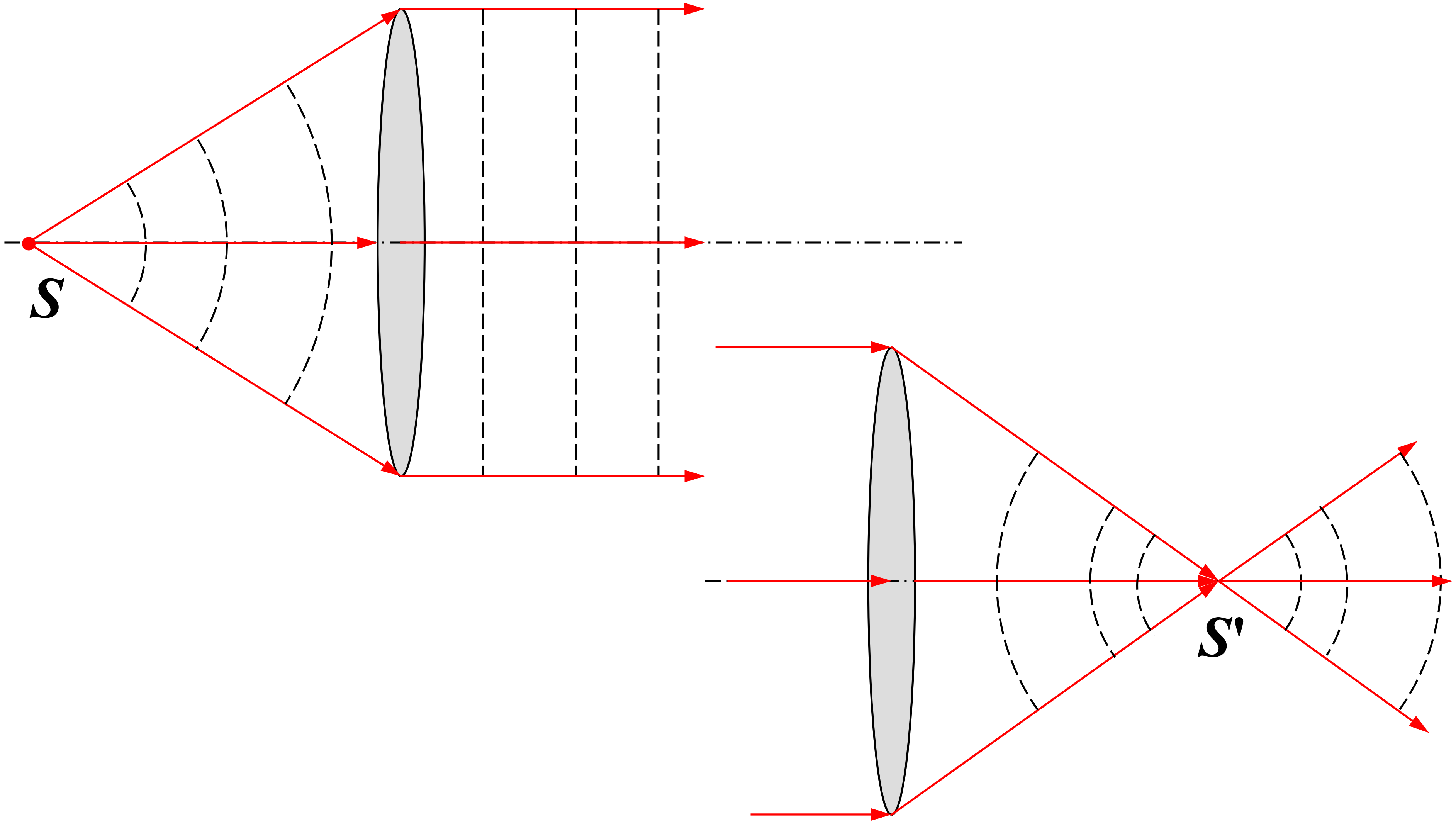
$$\varphi(P)=kr+\varphi_0=\text{Const.}$$



→波面为球面，振幅沿传播方向衰减

→从点源发出或向点源汇聚

发散或汇聚的球面波



3.复振幅描述

- 用复指数的实部或虚部表示余弦或正弦函数，
- 用复数来描述光波的振动

→ 复振幅(complex amplitude)描述

$$U(P,t) = A(P)\cos[\omega t - \varphi(P)]$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{U}\ \ P\ \ t \qquad A(P)\mathrm{e}^{\pm i[\omega t-\varphi(P)]}$$

指数取负号 $\Rightarrow \quad \tilde{U}\ \ P\ \ t \qquad A(P)\mathrm{e}^{-i[\omega t-\varphi(P)]}$

$$= \tilde{U}\ \ P \qquad {}^{i\ \ t}$$

复振幅：$\tilde{U}\ \ P \qquad A\ \ P)\mathrm{e}^{i\varphi(P)}$

1. 包含定态波场中的振幅空间分布和位相空间分布；
2. 模量为振幅的空间分布，辐角为位相的空间 分布。

平面波(plane wave)复振幅描述：

$$U(P,t) = A\cos[\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \varphi_0]$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{U} \;\; P \qquad A \;\; ^{i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0]}$$

球面波(spherical wave)复振幅描述：

$$U(P,t) = \frac{a}{r}\cos[\omega t - kr - \varphi_0]$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{U} \;\; P \qquad \frac{a}{r} \;\; ^{i[kr+\varphi_0]}$$

强度的复振幅描述

$$I(P) = \tilde{U} \quad P \quad \tilde{U} \quad P$$

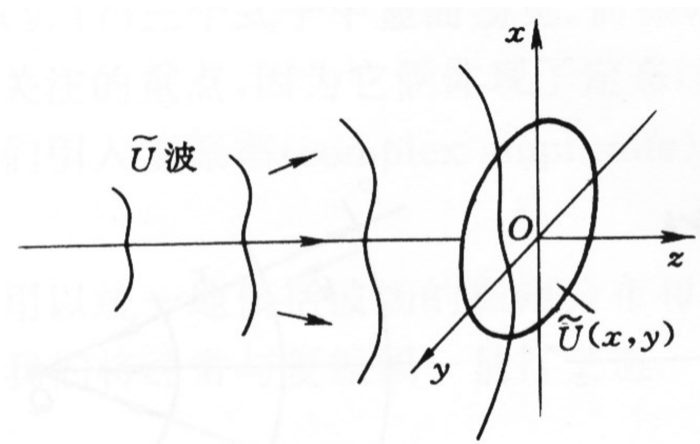
作业：

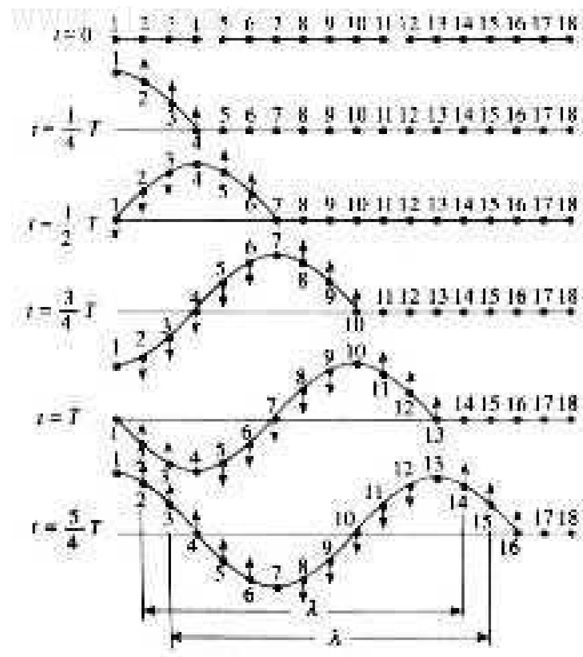
p.147-148: 1, 3, 5, 6

2-02 波前

2.1 波前的概念
2.2 傍轴条件和远场条件（轴上物点）
2.3 傍轴条件和远场条件（轴外物点）
2.4 高斯光束

1.波前(wave front)的概念





冲击波的波前

波前：波场中的任一曲面。更多地指一个平面，如记录介质、感光底片、接收屏幕等;

共轭波(conjugate wave)：在某一波前上互为复数共轭的两列波。

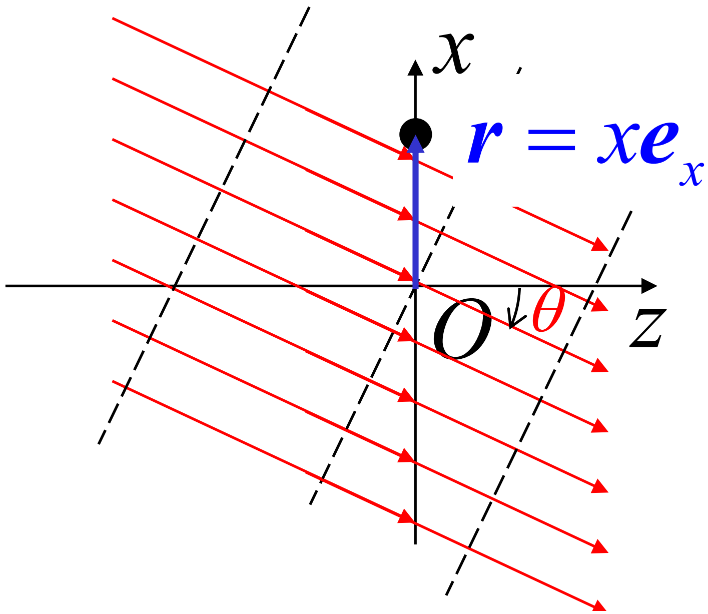
例：一列平面波，传播方向平行于x-z面，与z轴成倾角θ，求波前z=0面上的复振幅分布.

三个波矢分量：$k_x = k sin\theta$, $k_x = 0$, $k_z = k cos\theta$

$$\tilde{U}(x, y, z) = Ae^{i(k(x sin\theta + z cos\theta) + \varphi_0)}$$

在波前 z=0 上：

$$\tilde{U}(x, y, z) = Ae^{i(kx sin\theta + \varphi_0)}$$



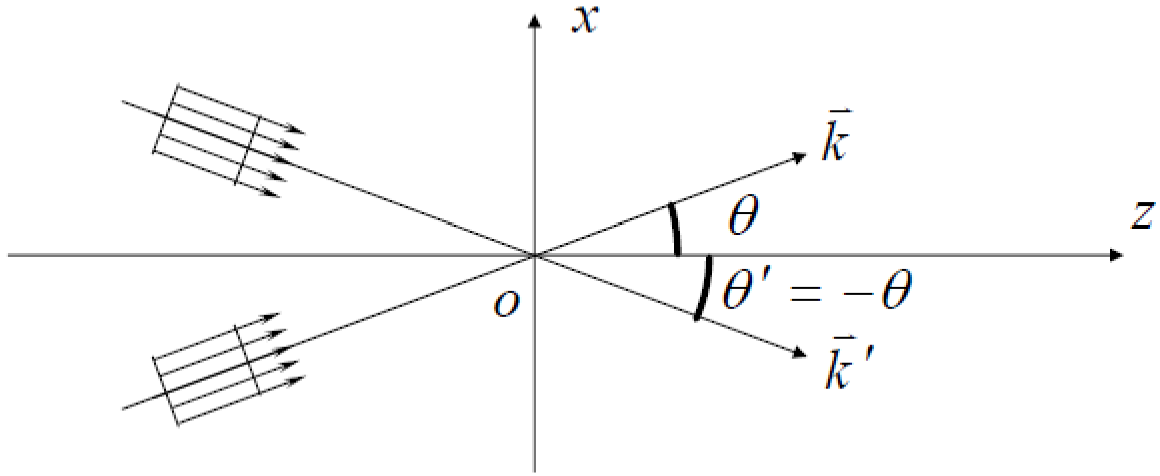
$$\boldsymbol{k} = k(\sin\theta \boldsymbol{e}_x + \cos\theta \boldsymbol{e}_z)$$

$$\varphi(x) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = kx\sin\theta + \varphi_0$$

上述平面波在波前上的共轭波:

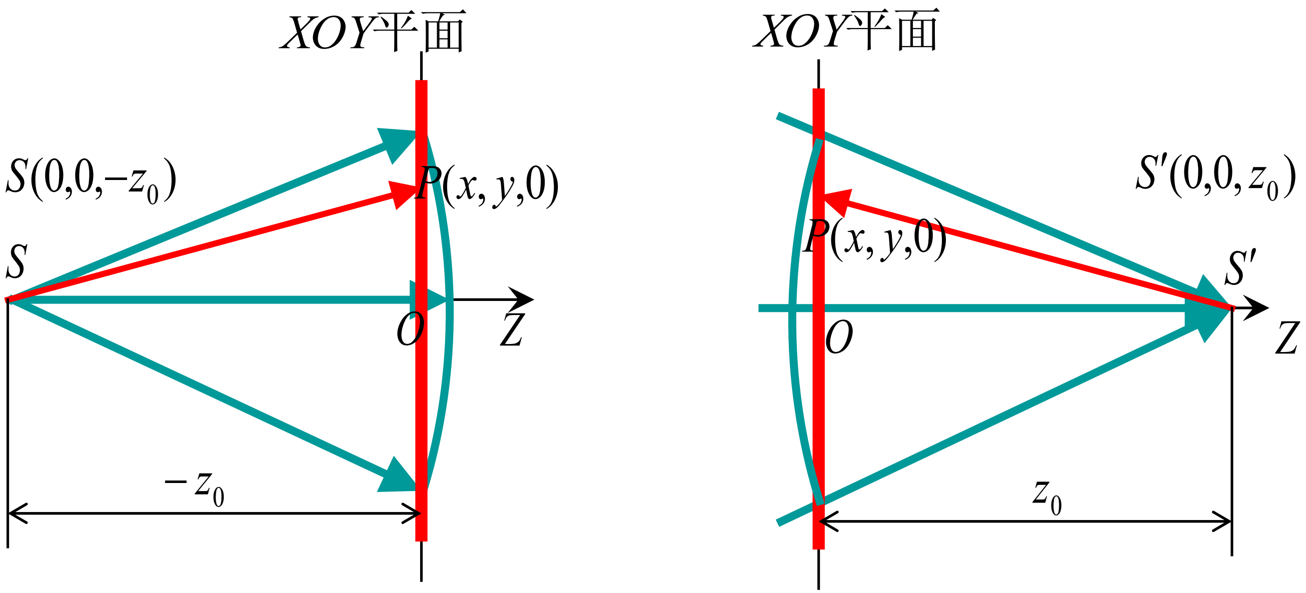
$$\widetilde{U}^*(x,y,z)=Ae^{-i(kx\sin\theta+\varphi_0)}=Ae^{i(kx\sin(-\theta)-\varphi_0)}$$

→x-z平面内倾角-θ的平面波



例2: **z**轴上物点在此z=0平面上产生的复振幅分布

发散的球面波



汇聚的球面波

$$r=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(0\pm z_0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z_0{}^2}$$

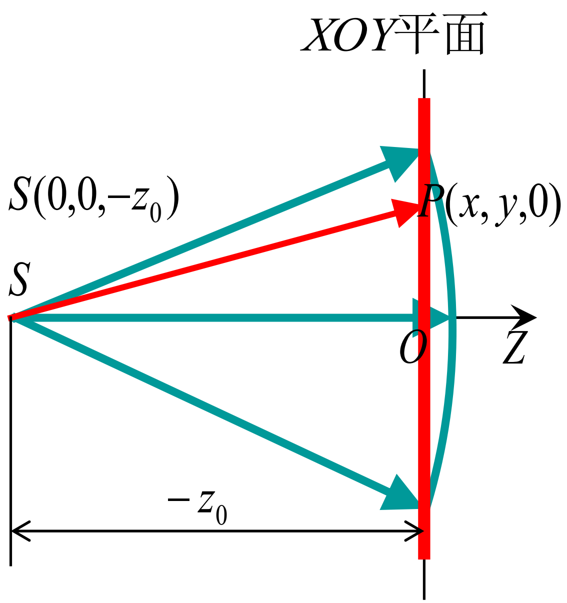
（0，0，z_0）发出的球面波在（x，y，0）平面的振动为

$$U_+(x,y,0)=\frac{A}{r}e^{i(kr+\varphi_0)}=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}e^{i(k\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}+\varphi_0)}$$

（0，0，-z_0）出发出的球面波在（x，y，0）平面上的振动亦为

$$U_-(x,y,0)=\frac{A}{r}e^{i(kr+\varphi_0)}=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}e^{i(k\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}+\varphi_0)}$$

发散的球面波

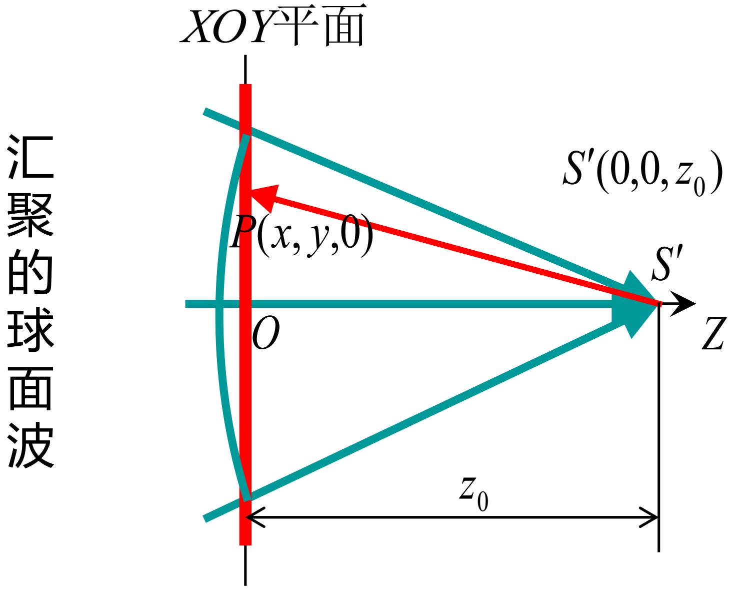


（0，0，z_0）汇聚的球面波在（x，y，0）平面的振动为

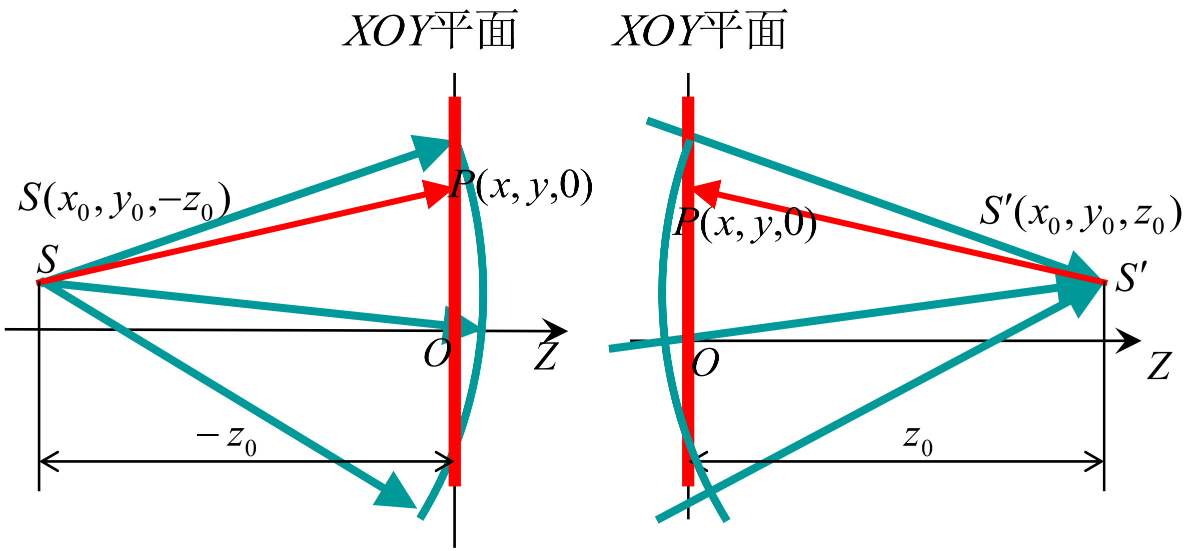
$$U_{+}^{*}(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z_{0}^{2}}}e^{-i(k\sqrt{x^{2}+y^{2}+z_{0}^{2}}-\varphi_{0})}$$

（0，0，-z_0）汇聚的球面波在（x，y，0）平面上的振动亦为

$$U_{-}^{*}(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z_{0}^{2}}}e^{-i(k\sqrt{x^{2}+y^{2}+z_{0}^{2}}-\varphi_{0})}$$



例3: **z**轴外物点在此z=0平面上产生的复振幅分布



$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (0 \pm z_0)^2}$$

$$U_{\pm}(x, y, 0) = \frac{A}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}} e^{i(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}+\varphi_0)}$$

$$U_{\pm}^{*}(x, y, 0) = \frac{A}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}} e^{-i(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}-\varphi_0)}$$

关于共轭波

- 不是在波场中处处共轭，而仅仅是在波场中某一面（通常是接收屏平面）上点点共轭

平面波的共轭波 $z=0, \varphi_0 = 0$

$$\tilde{U} \quad A \; P \quad \exp[ik(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)] \quad (\theta_1, \theta_2)$$

$$\tilde{U} \quad A \; P \; \exp\{ik[x\sin(-\theta_1) + y\sin(-\theta_2)]\} \quad (-\theta_1, -\theta_2)$$

由于上述角度是波矢与平面间的夹角，所以不能认为两列波的方向相反

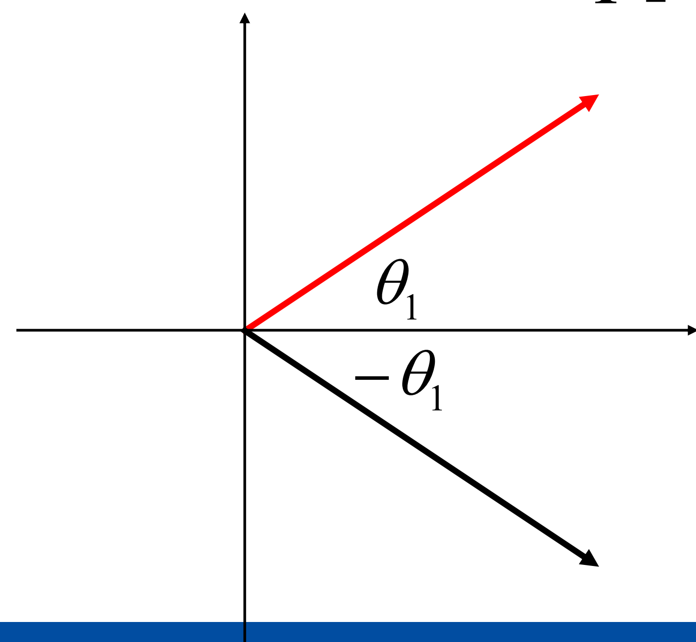
在z =0平面上

$\tilde{\iota}$ $\qquad$ $\text{xp}[ik(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)]$

$\tilde{\iota}$ $\qquad$ $\exp\{ik[x\sin(-\theta_1) + y\sin(-\theta_2)]\}$

如果θ_2=0 $\qquad$ $\tilde{\iota}$ $\qquad$ $\text{xp}[ikx\sin\theta_1]$

$\tilde{\iota}$ $\qquad$ $\exp[ikx\sin(-\theta_1)]$



球面波

$$\widetilde{U} = \frac{A}{r}\exp[ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}]$$

从 (x_0, y_0, z_0) 发出

$$\widetilde{U}^* = \frac{A}{r}\exp[-ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}]$$

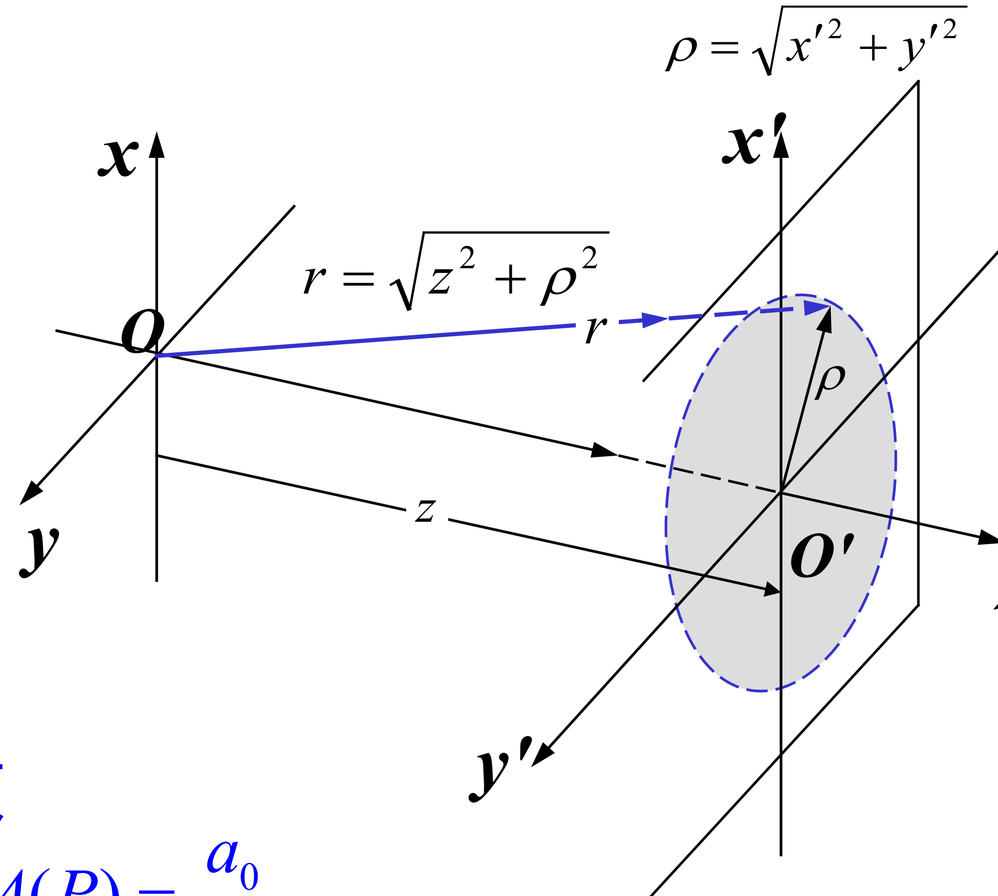
向 (x_0, y_0, z_0) 汇聚

2. 傍轴（paraxial）条件和远场(far field)条件（轴上物点）

- 接收屏上的振幅分布

$$A(P)=\frac{a}{\sqrt{z^2+\rho^2}}=\frac{a}{|z|}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\rho}{z})^2}}$$

$$\xrightarrow{\rho^2 \ll z} \ , \frac{a}{|z|}$$



近轴条件，傍轴条件

$$\boldsymbol{\rho^2 \ll |z|^{\,2}}$$

在接收屏上，振幅为常数

$$A(P)=\frac{a_0}{|z|}$$

- 球面波的相位

$$\varphi(P)=kr=k\sqrt{z^2+\rho^2}=k|z|\sqrt{1+(\frac{\rho}{z})^2}=k|z|+\frac{k\rho^2}{2|z|}+\frac{k\rho^4}{6z^3}+\cdots$$

满足傍轴条件时 $\rho^2 \ll$ 忽略 $\frac{k\rho^2}{2z}\frac{\rho^2}{3z^2}+\cdots$ $\varphi(P)=k|z|+\frac{k\rho^2}{2|z|}$

如果 $\frac{\rho^2}{\lambda}<<|z|$ $\frac{k\rho^2}{2|z|}=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{2|z|}=\frac{\pi\rho^2}{\lambda|z|}\ll$

远场条件 $\frac{k\rho^2}{2|z|}\ll$ 可忽略

相位为 $\varphi(P)=kz$ 可作为平面波处理

1. 两条件相互独立，究竟哪个的限制更强于具体情况（波长）有关。在光波波段，往往是远场条件蕴含傍轴条件。

λ~0.5μm，ρ~1mm，估算满足傍轴条件、远场条件的距离

取>>为**50**倍：

傍轴：$z_1^2 = 50\rho^2$

$$z_1 = \sqrt{50}\,\rho \approx 7\,mm$$

远场：$z_2 = 50\,\rho^2/\lambda \approx 100\,m$

远场蕴含傍轴

λ~1m(声波**)，ρ~10cm**，估算满足傍轴条件、远场条件的距离

傍轴：$z_1 = \sqrt{50}\,\rho \approx 70\,cm$

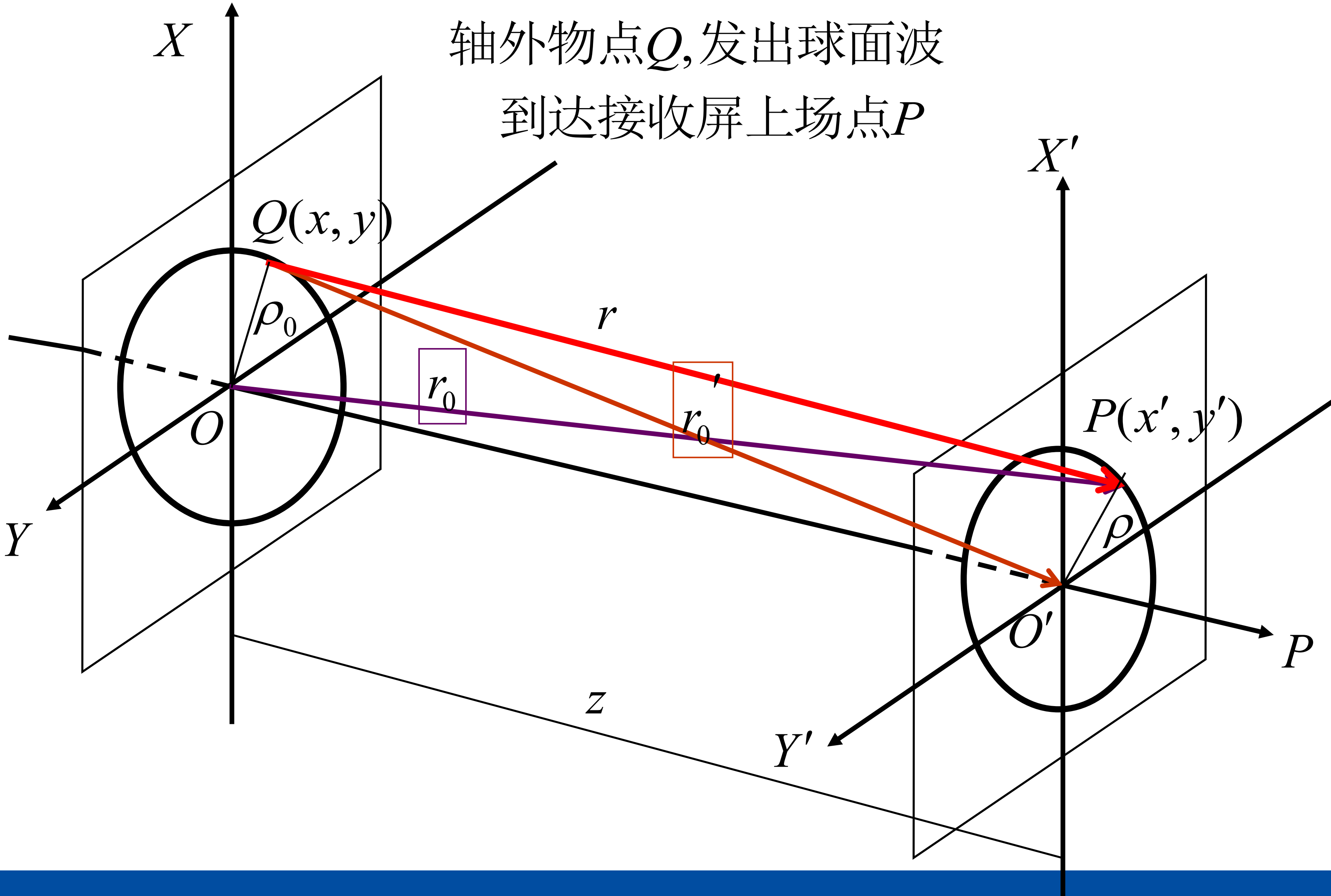
远场：$z_2 = 50\,\rho^2/\lambda \approx 50\,cm$

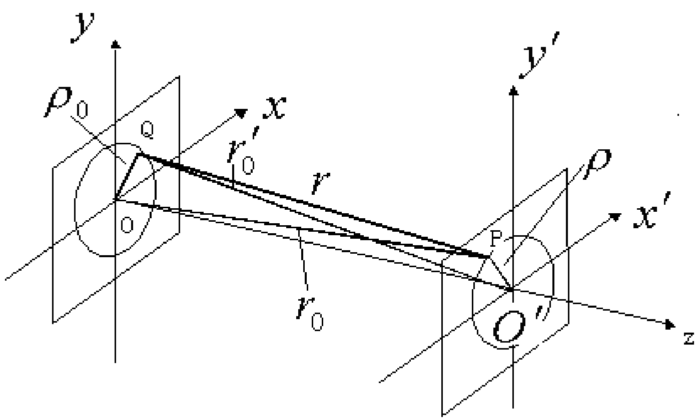
傍轴蕴含远场

2. 当两条件同时满足时：即正入射的平面波。

$$\tilde{U}\quad x\quad y \qquad \frac{a}{z}\mathrm{e}^{ikz}$$

3. 傍轴条件和远场条件（轴外物点）





$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}$$

$$r_0=\sqrt{\rho^2+z^2}=\sqrt{x'^2+y'^2+z^2}$$

$$r_0'=\sqrt{\rho_0{}^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Q到O的距离 $\rho_0=\sqrt{x^2+y^2}$

物点场点都满足近轴条件时，有

$$r_0\approx|z|+\frac{x'^2+y'^2}{2|z|}\qquad r_0'\approx|z|+\frac{x^2+y^2}{2|z|}$$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$$

$$= |z| \sqrt{\frac{(x - x')^2}{z^2} + \frac{(y - y')^2}{z^2} + 1}$$

$$\approx |z| + \frac{x'^2 + y'^2}{2|z|} + \frac{x^2 + y^2}{2|z|} - \frac{xx' + yy'}{|z|}$$

$$= r_0' + \frac{x'^2 + y'^2}{2|z|} - \frac{xx' + yy'}{|z|}$$

$$\boxed{r_0' \approx |z| + \frac{x^2 + y^2}{2|z|}}$$

或者 $$= r_0 + \frac{x^2 + y^2}{2|z|} - \frac{xx' + yy'}{|z|}$$

$$\boxed{r_0 \approx |z| + \frac{x'^2 + y'^2}{2|z|}}$$

屏上的复振幅为

$$\tilde{U}\quad x\quad y\qquad \frac{a}{z}\exp[ik(r_0'+\frac{x'^2+y'^2}{2|z|})]\exp[-k\frac{xx'+yy'}{|z|}]$$

$$\approx\frac{a}{z}\exp[ik(r_0+\frac{x^2+y^2}{2|z|})]\exp[-k\frac{xx'+yy'}{|z|}]$$

振幅具有平面波的特点

远场条件为

物点 $|z|>>\rho_0{}^2/\lambda \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{\lambda}<<z \qquad \frac{y^2}{\lambda}<<z$

场点 $|z|>>\rho^2/\lambda \quad\Rightarrow\quad \frac{x'^2}{\lambda}<<z \qquad \frac{y'^2}{\lambda}<<z$

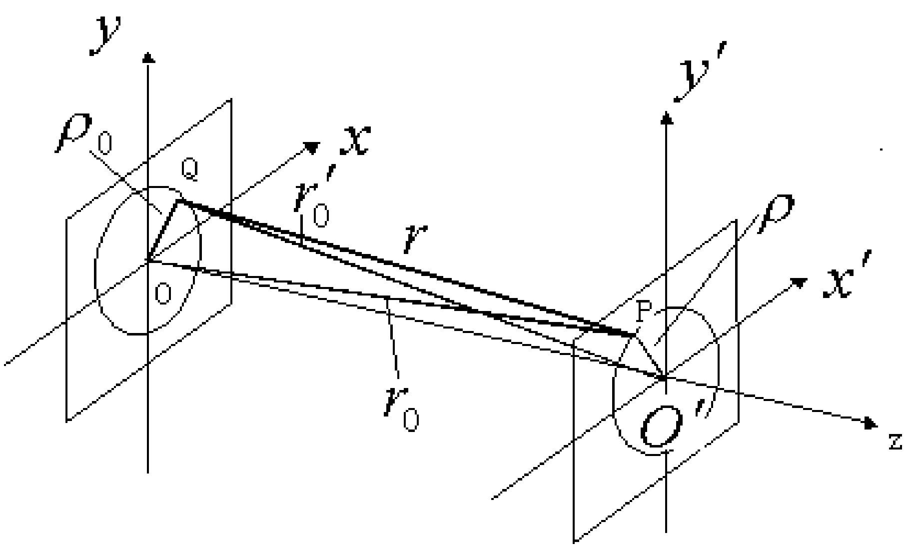
如果物点Q再满足远场条件的话，有

$$\tilde{U}\ \ x\ \ \ y \qquad \frac{a}{z}\exp[ik(r_0)]\exp[-k\frac{xx'+yy'}{|z|}]$$

或者，如果场点P再满足远场条件的话，有

$$\tilde{U}\ \ x\ \ \ y \qquad \frac{a}{z}\exp[ik(r_0')]\exp[-k\frac{xx'+yy'}{|z|}]$$

振幅和相位都变为平面波



入射平面波的波矢为

$$\cos\alpha = -\frac{x}{z} \qquad \cos\beta = -\frac{y}{z}$$

$$\sin\theta_1 = -\frac{x}{z} \qquad \sin\theta_2 = -\frac{y}{z}$$

沿着QO′方向

傍轴条件、远场条件可看着球面波向平面波的转化。

4.高斯光束(Gaussian beam)

光学谐振腔(**optical resonant cavity**)内能够稳定存在的一种光场，其复振幅描述为：

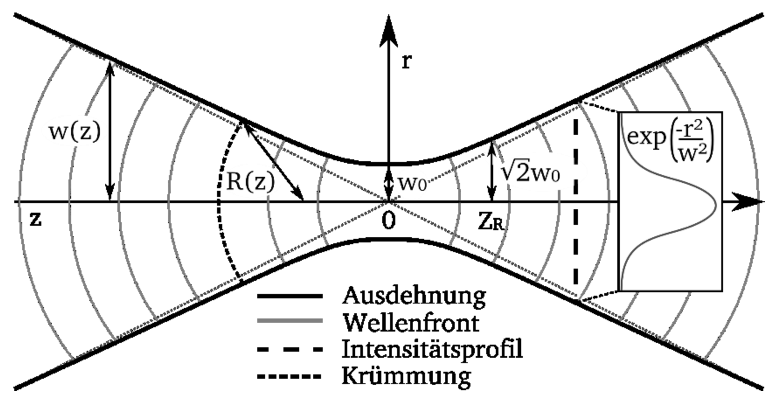
$$\tilde{U}(x,y,z)=\frac{A}{\omega(z)}\exp[-\frac{x^2+y^2}{\omega^2(z)}]\exp\{-ik[\frac{x^2+y^2}{2r(z)}+z]+i\varphi(z)\}$$

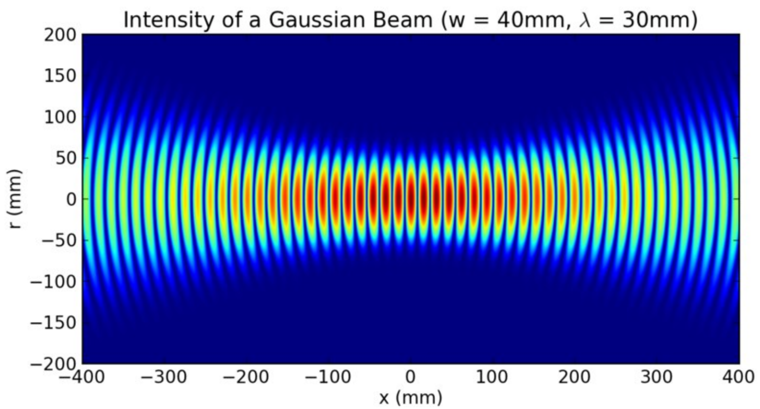
其中：

$$\omega(z)=\omega_0(1+\frac{\lambda^2 z^2}{\pi\omega_0^4})^{1/2}$$

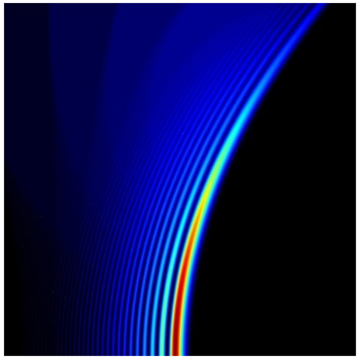
$$r(z)=z(1+\frac{\pi\omega_0^4}{\lambda^2 z^2})$$

ω_0: 束腰（**beam waist**）

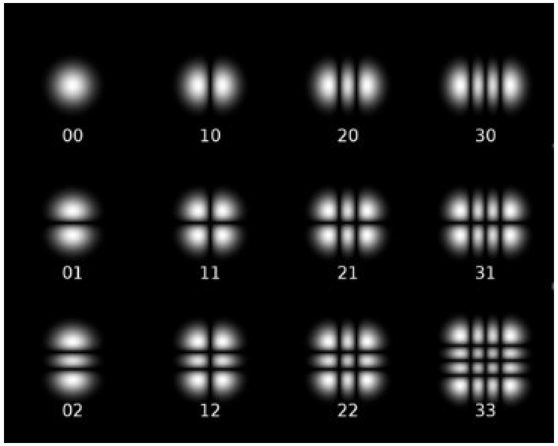




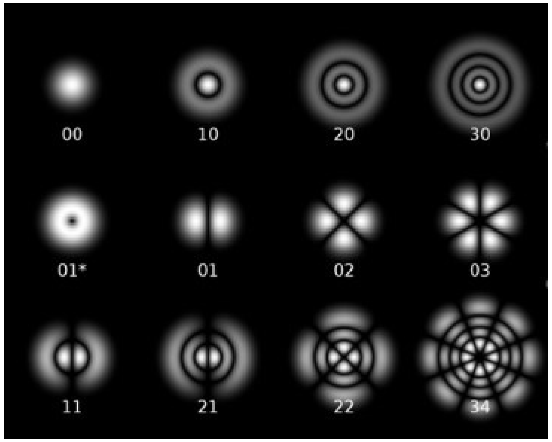
Gaussian beam



Airy beam



Hermite-Gaussian mode



Laguerre-Gaussian mode

★ 调研报告：

9. Gaussian beam and Airy beam

10. Hermite-Gaussian mode and Laguerre-Gaussian mode

作业：

p.159-160: 1, 2

思考题：

1、请举例说明无线电波和光波的异同之处。

2、波动光学的傍轴条件和几何光学的傍轴条件相同吗？请说明理由。