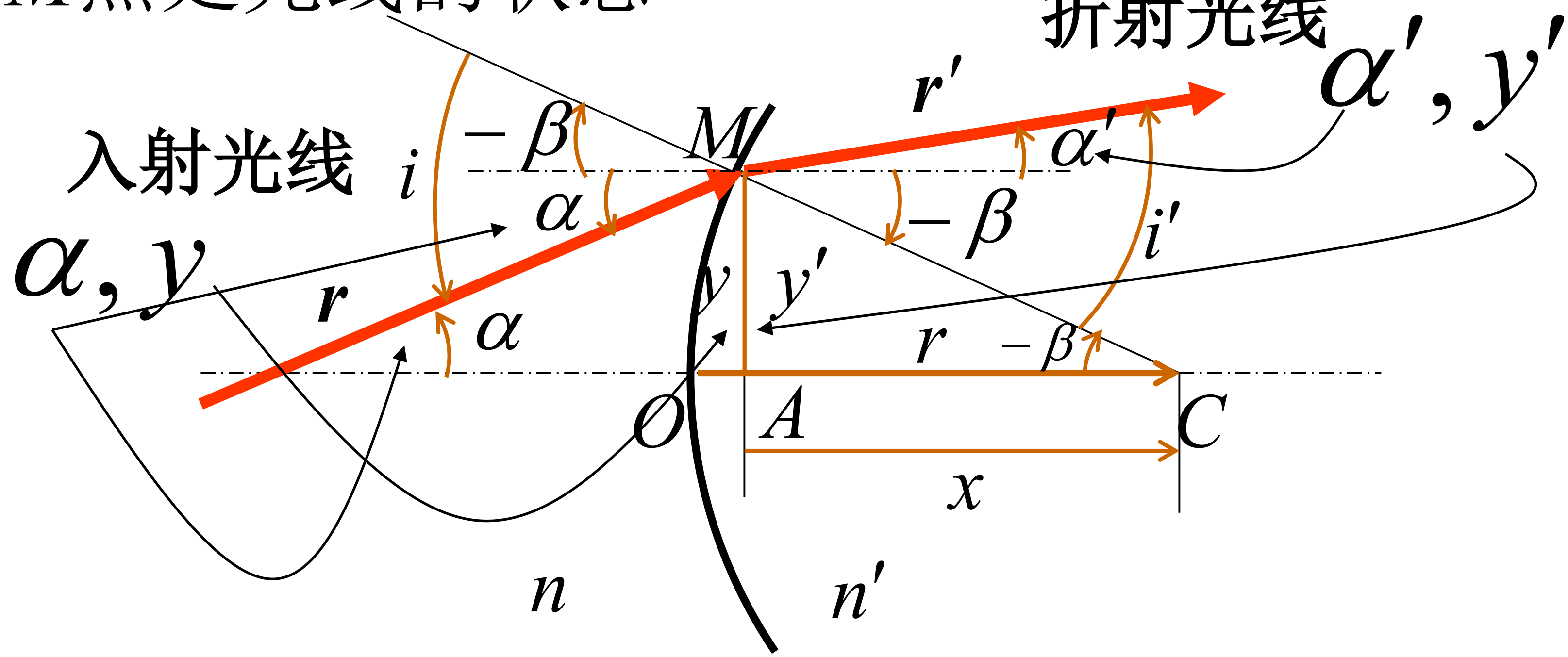
# 1-04 矩阵光学

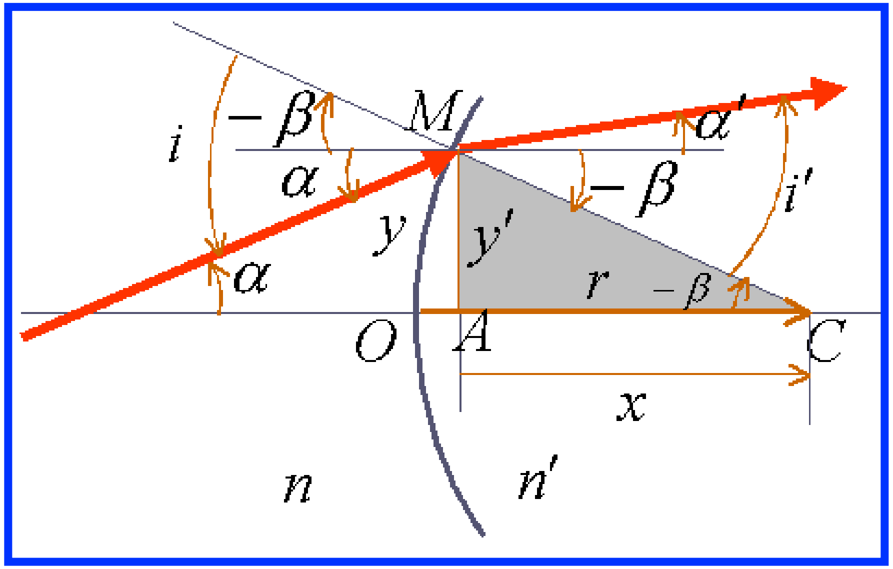
# 光线转换矩阵

- 一．光线的状态
- 光线的特征可以用两个要素描述：光线的方向，和线上一点的位置。
- 可用光线相对于主光轴的角度表示其方向，用线上一点到主光轴的距离表示该点的位置。
- 光线经过球面后，方向改变，上述角度和高度的数值会发生改变。

# 1.光线的矩阵表示

- 单球面的折射和反射
- $M$点处光线的状态






$$i = \alpha - \beta \quad i' = \alpha' - \beta$$

在$\Delta MAC$中 $\quad -\beta = y'/x = y/x$

满足近轴条件 $\quad ni \approx n'i'$

$$n(\alpha + y/x) = n'(\alpha' + y/x)$$

注意 $\quad x \approx r$

$$n'\alpha' \approx n\alpha - \frac{n'-n}{r} y = n\alpha - \Phi y$$

$$\begin{cases} n'\alpha' = n\alpha - \Phi y \\ y' = 0 + y \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & -\Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

表示光线入射前后的状态，称为光线的状态矩阵

表示折射球面的作用，称为折射矩阵

$$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{r}'=\begin{bmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{bmatrix} \qquad R=\begin{bmatrix} 1 & -\Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}'=R\boldsymbol{r}$$

光线的状态矩阵　折射矩阵

$|R|=1$　　折射矩阵行列式值等于1

对于反射球面　$n'=-n=-1$　　$\Phi=-\dfrac{2}{r}$

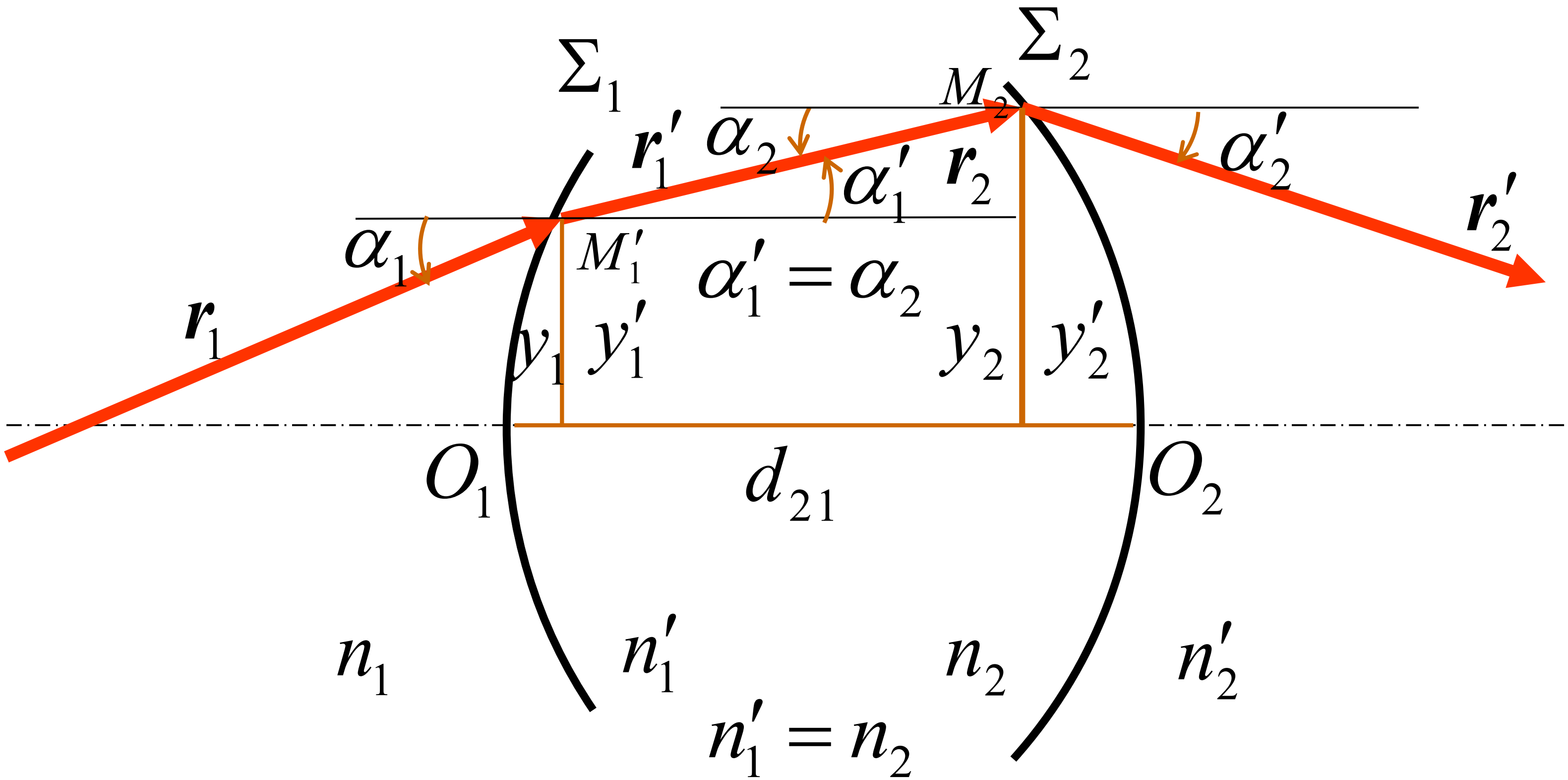
状态矩阵表示的是光线在某一点的状态，而不是整个光线的状态。

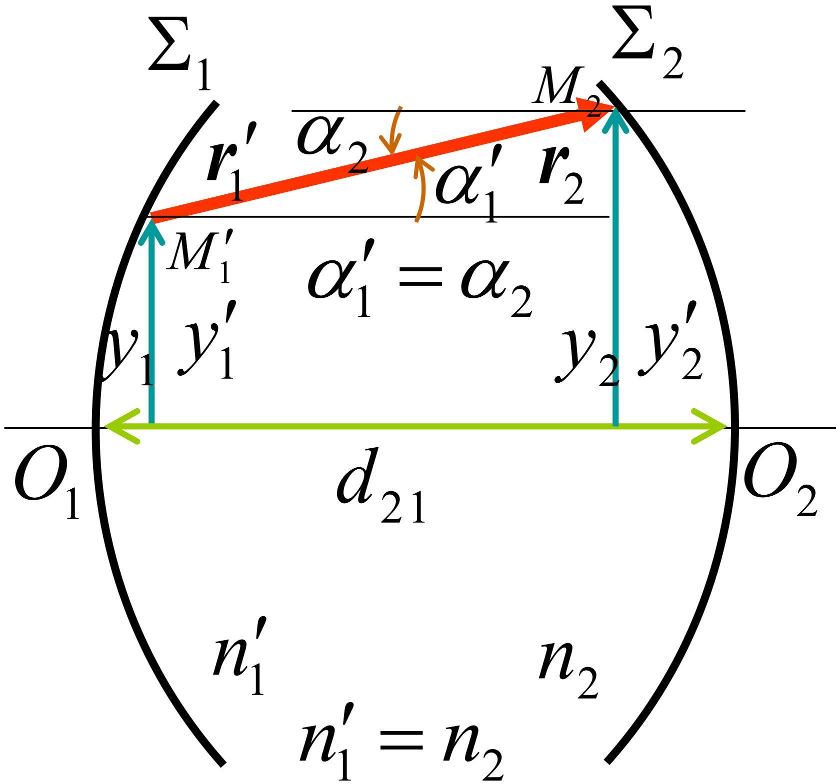
所以，选取的点不同，状态矩阵就不同。

折射矩阵表示的是在入射点前后，光线状态的改变。

# 2.过渡矩阵

- 光线经过连续两个球面的折射



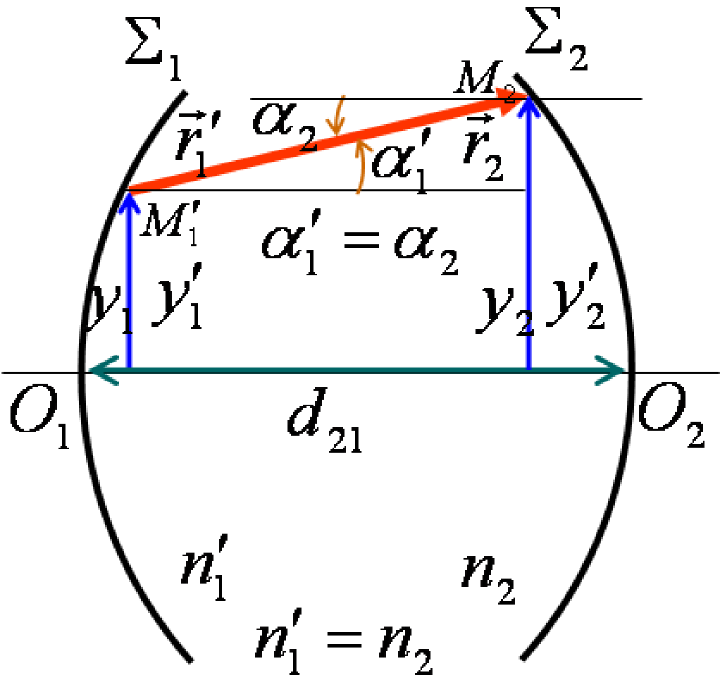



光线从第一折射面到第二折射面，状态改变

$$M_1':\ \boldsymbol{r}_1' = \begin{bmatrix} n_1'\alpha_1' \\ y_1' \end{bmatrix}$$

$$M_1':\ \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

这一过程中，没有发生折射，是自由传播，称为过渡。两折射面之间的空间称为过渡空间




$d_{21}$ 过渡空间的长度

$n_1' = n_2$ 过渡空间的折射率

$$y_2 \approx d_{21}\alpha_1' + y_1'$$

$$n_2\alpha_2 = n_1'\alpha_1' + 0$$

$$y_2 = (d_{21}/n_1')n_1'\alpha_1' + y_1'$$

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_1' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1'\alpha_1' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = T_{21}\boldsymbol{r}_1'$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_1' & 1 \end{bmatrix}$$ 称为两折射面间的过渡矩阵 $|T_{21}| = 1$

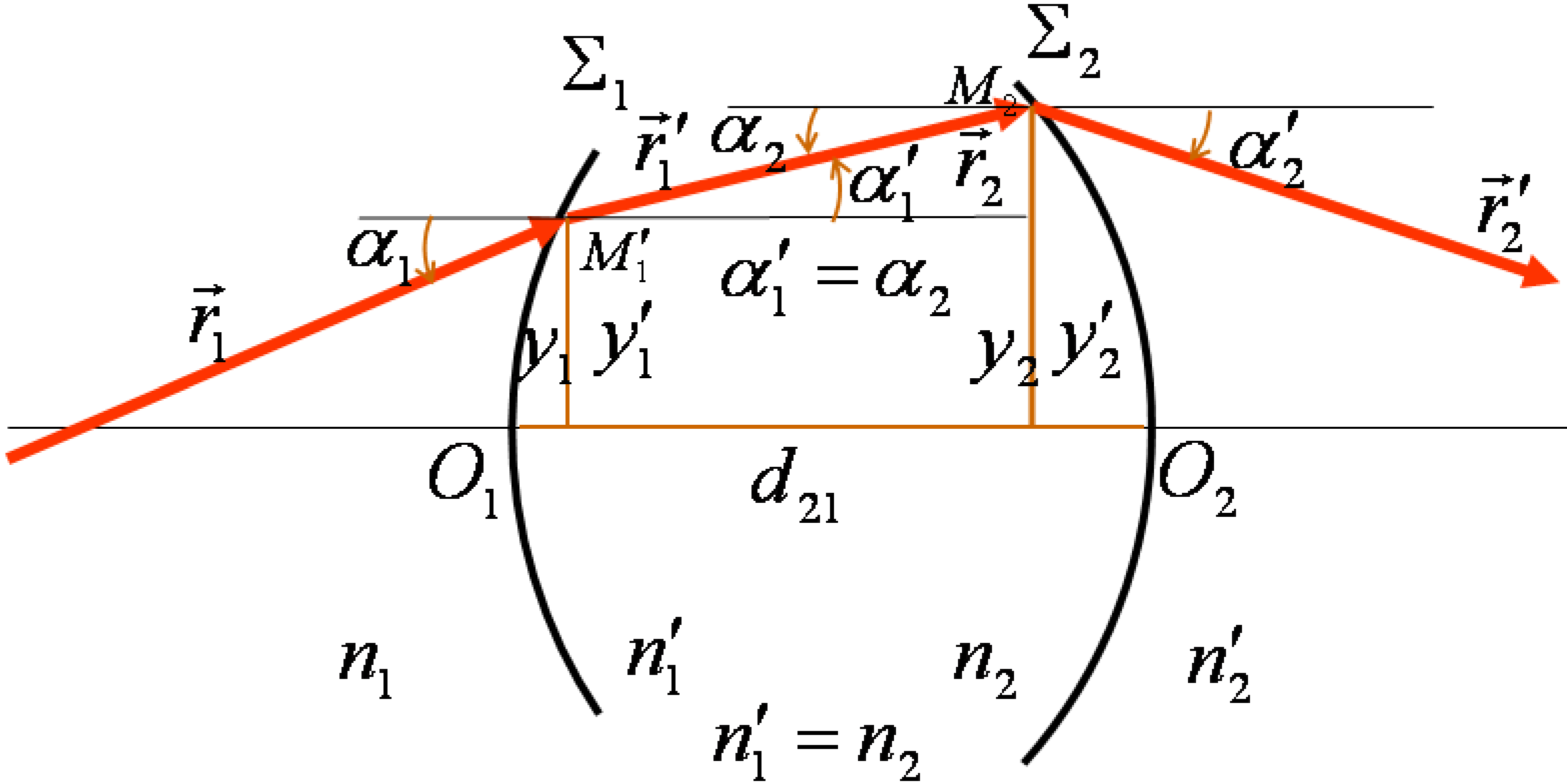
经过过渡空间后

$$\boldsymbol{r}_2 = T_{21}\boldsymbol{r}_1' = T_{21}R_1\boldsymbol{r}_1$$

经过整个系统后

$$\boldsymbol{r}_2' = R_2\boldsymbol{r}_2 = R_2T_{21}R_1\boldsymbol{r}_1$$

$\boldsymbol{r}_2' = S\boldsymbol{r}_1$  $S = R_2T_{21}R_1$ 称为共轴球面系统的系统矩阵



$$S = R_2 T_{21} R_1$$

$$S=\begin{bmatrix}1 & -\Phi_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ d_{21}/n_1' & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\Phi_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\Phi_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\Phi_1\\ d_{21}/n_1' & -\Phi_1 d_{21}/n_1'+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\Phi_2 d_{21}/n_1' & -(\Phi_1+\Phi_2-\Phi_1\Phi_2 d_{21}/n_1')\\ d_{21}/n_1' & 1-\Phi_1 d_{21}/n_1'\end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}\quad S_{11}=1-\Phi_2 d_{21}/n_1' \quad S_{12}=-(\Phi_1+\Phi_2-\Phi_1\Phi_2 d_{21}/n_1')$$

$$S_{21}=d_{21}/n_1' \qquad S_{22}=1-\Phi_1 d_{21}/n_1'$$

$$\Phi=-S_{12}$$ 系统的光焦度

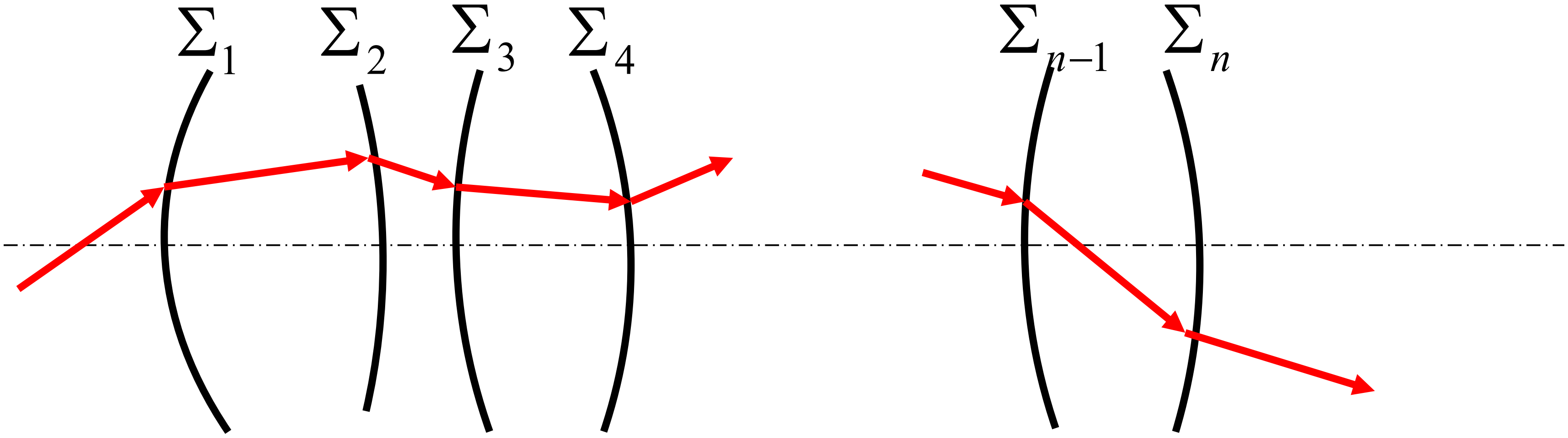
$$|S|=\begin{vmatrix}1-\Phi_2 d_{21}/n_1' & -(\Phi_1+\Phi_2-\Phi_1\Phi_2 d_{21}/n_1')\\ d_{21}/n_1' & 1-\Phi_1 d_{21}/n_1'\end{vmatrix}=1$$

# 对于n个共轴球面组成的系统

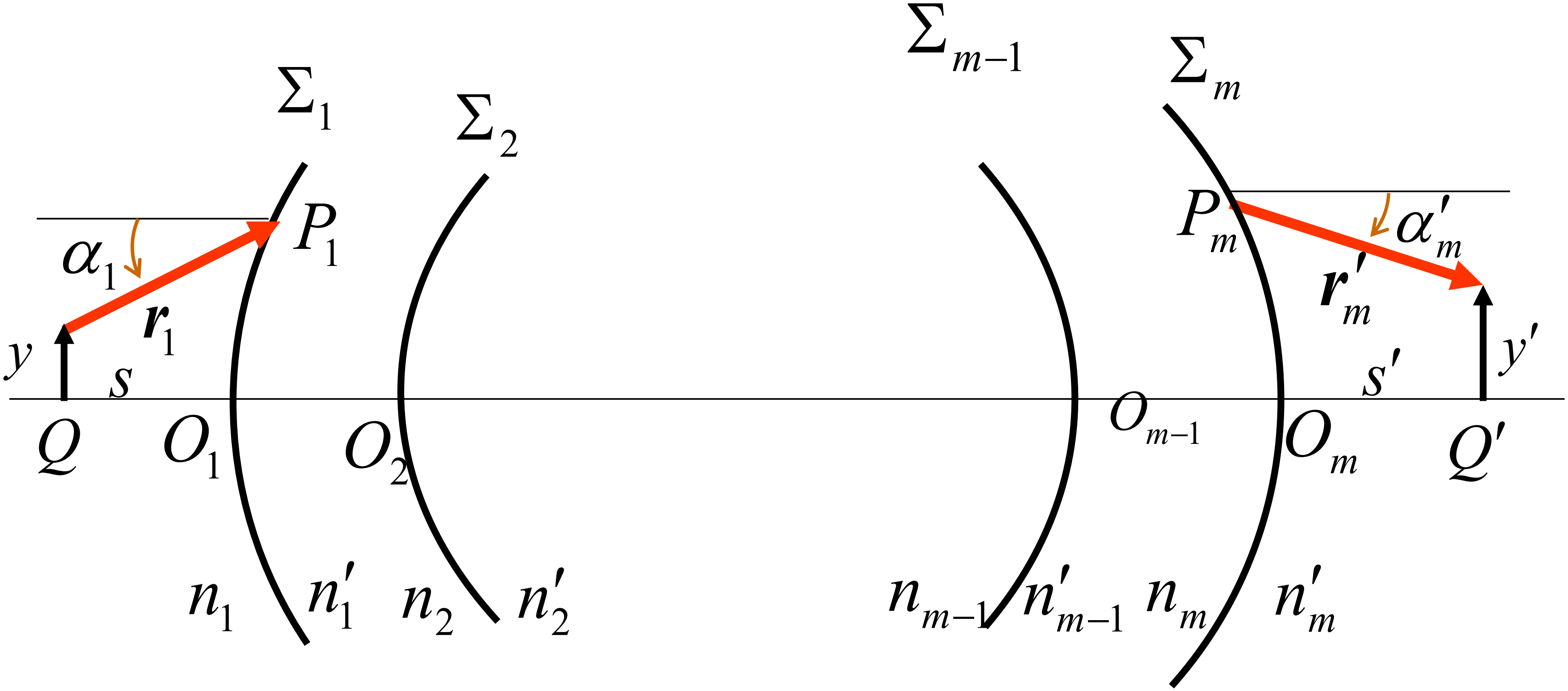
- 其系统矩阵一般可表示为

$$S = R_n T_{n,n-1} R_{n-1} \cdots\cdots R_4 T_{43} R_3 T_{32} R_2 T_{21} R_1$$

$$|S| = 1$$



# 3. 成像矩阵的计算




在系统前后，各有一个过渡空间

物$Q$的状态矩阵

$$\boldsymbol{r}_Q = \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{bmatrix}$$

像$Q'$的状态矩阵

$$\boldsymbol{r}'_{Q'} = \begin{bmatrix} n'_m\alpha'_m \\ y' \end{bmatrix}$$

$Q$到$P_1$处自由空间的过渡矩阵为

$$T_{1Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s/n_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$P_m$到$Q'$处自由空间的过渡矩阵为

$$T_{Q'm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s'/n'_m & 1 \end{bmatrix}$$

系统矩阵为 $S$

$Q$到$Q'$的光线的矩阵变换为 $\boldsymbol{r}'_{Q'} = T_{Q'm} S T_{1Q} \boldsymbol{r}_Q$

物像之间光线的变换用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} n'_m\alpha'_m \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s'/n'_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s/n_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s'/n'_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} + (s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21} + (s/n_1)S_{22} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{11} + (s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1n'_m)S_{12} & S_{22} + (s'/n'_m)S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [S_{11} + (s/n_1)S_{12}]n_1\alpha_1 + S_{12}y \\ [S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1n'_m)S_{12}]n_1\alpha_1 + [S_{22} + (s'/n'_m)S_{12}]y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} S_{11} + (s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1n'_m)S_{12} & S_{22} + (s'/n'_m)S_{12} \end{bmatrix}$$

称为物像矩阵，其行列式的值等于1

$$y' = [S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1 n'_m)S_{12}]n_1\alpha_1 + [S_{22} + (s'/n'_m)S_{12}]y$$

**近轴条件下， $y'$与$\alpha_1$无关**

$$[S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1 n'_m)S_{12}]n_1\alpha_1 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} S_{11} + (s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ 0 & S_{22} + (s'/n'_m)S_{12} \end{bmatrix}$$

$$y' = [S_{22} + (s'/n'_m)S_{12}]y$$

$$-(s'/n'_m)[S_{11} + (s/n_1)S_{12}] = S_{21} + (s/n_1)S_{22}$$

$$\frac{s'}{n'_m} = -\frac{S_{21} + (s/n_1)S_{22}}{S_{11} + (s/n_1)S_{12}}$$

**用系统矩阵元素表示的物像关系**

系统的横向放大率为 $\beta = \dfrac{y'}{y} = S_{22} + (s'/n'_m)S_{12}$

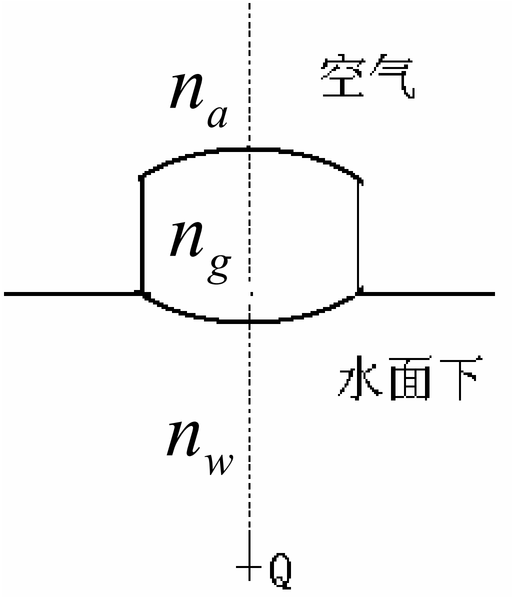
由于 $|A| = \begin{vmatrix} S_{11} + (s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ 0 & S_{22} + (s'/n'_m)S_{12} \end{vmatrix} = 1$

所以 $[S_{11} + (s/n_1)S_{12}][S_{22} + (s'/n'_m)S_{12}] = 1$

横向放大率亦可表示为 $\beta = 1/[S_{11} + (s/n_1)S_{12}]$

系统的物像矩阵可记为 $A = \begin{bmatrix} 1/\beta & -\Phi \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$

**1、一个等曲率双凸透镜，放在水面上。球面半径为3cm，中心厚度2cm，玻璃和水的折射率分别为1.50和1.33。透镜下4cm处物点Q。计算两曲面的光焦度，并计算Q点像的位置。**




**解法一：逐次成像法**

$$\Phi_1=\frac{n_g-n_w}{r_1}=\frac{1.50-1.33}{0.03}=5.67\text{m}^{-1}$$

$$\Phi_2=\frac{n_a-n_g}{r_2}=\frac{1.00-1.50}{-0.03}=16.67\text{m}^{-1}$$

**Q第一次成像** $$\frac{n_g}{s_1}+\frac{n_w}{s}=\Phi_1$$

$$s_1=\frac{n_g}{\Phi_1-\frac{n_w}{s}}=\frac{1.50}{5.67-\frac{1.33}{0.04}}=-0.054\text{m}$$

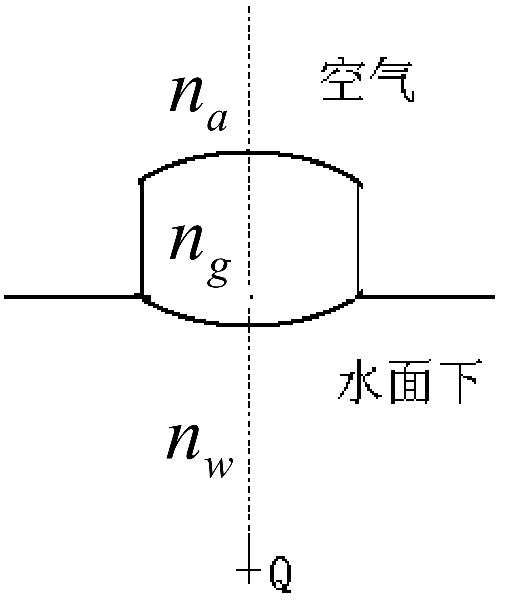
**第二次成像，物距s2=0.02+0.054=0.074m**

$$\frac{n_a}{s'}+\frac{n_g}{s_2}=\Phi_2$$

$$s_1=\frac{n_a}{\Phi_2-\frac{n_g}{s_2}}=\frac{1.00}{16.67-\frac{1.50}{0.074}}=-0.28\text{m}$$

**在前镜面下26cm处**

解法二：用矩阵方法




$$S=\begin{pmatrix}1 & -\Phi_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ d/n_g & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\Phi_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -16.67\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.02/1.5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5.67\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.78 & -21.17\\ 0.013 & 0.93\end{pmatrix}$$

$$\frac{s'}{n'_m}=-\frac{(s/n_1)S_{22}+S_{21}}{(s/n_1)S_{12}+S_{11}}$$

$$s'=-\frac{(s/n_1)S_{22}+S_{21}}{(s/n_1)S_{12}+S_{11}}n'_m=-\frac{\frac{0.04}{1.33}\times 0.93+0.013}{\frac{0.04}{1.33}(-21.17)+0.78}=-0.28\text{m}$$

作业：

利用 $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \alpha \\ y \end{bmatrix}$ 作为状态矩阵，写出球面折射矩阵，过渡矩阵以及薄透镜变换矩阵。

# 1.05 几何光学仪器

# 1 人眼

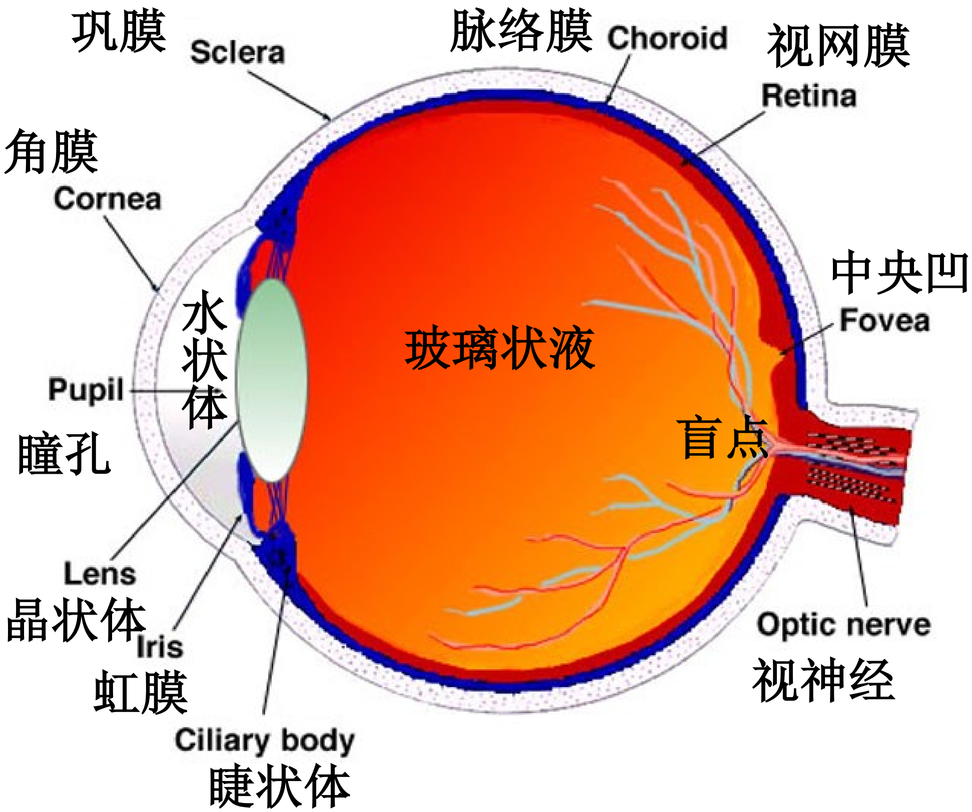
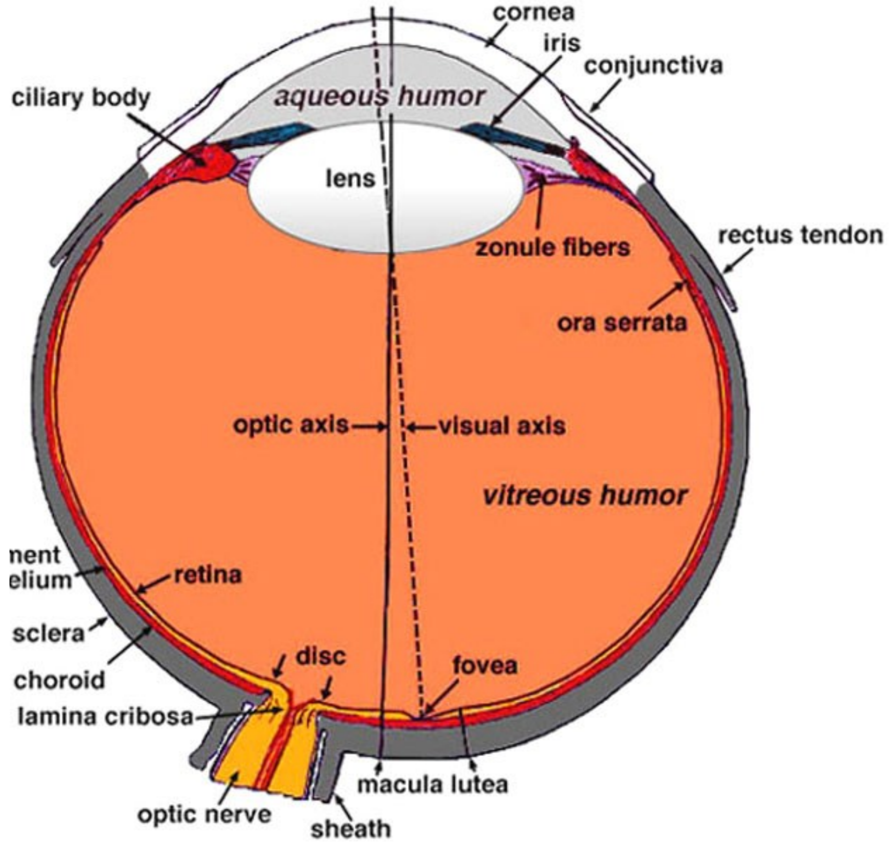



Fig. 6. Vertical sagittal section of the adult human eye.




Sagittal horizontal section of the adult human eye.

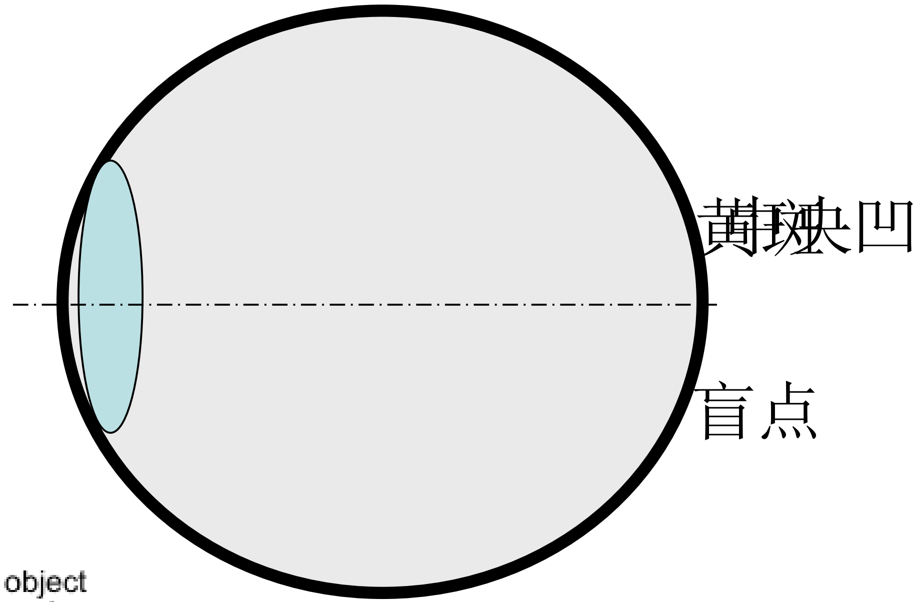
眼睛的水平剖面

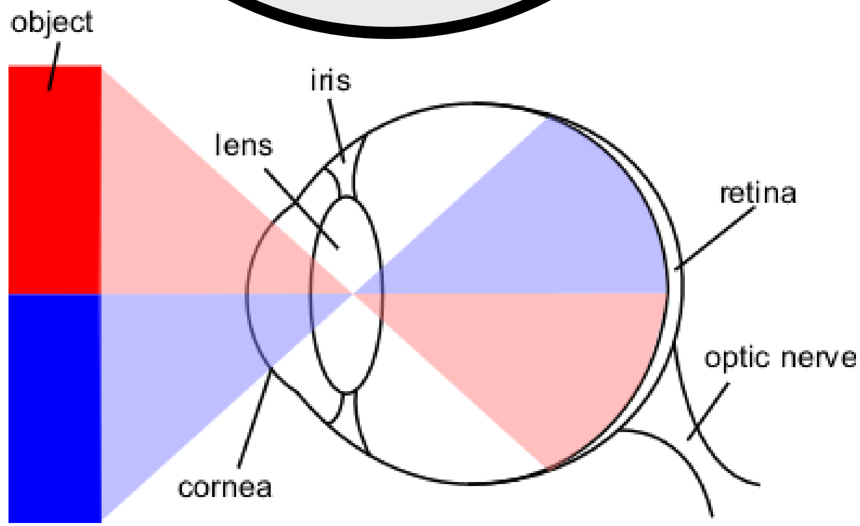
## 明视距离

$s_0 \geq 25\text{cm}$

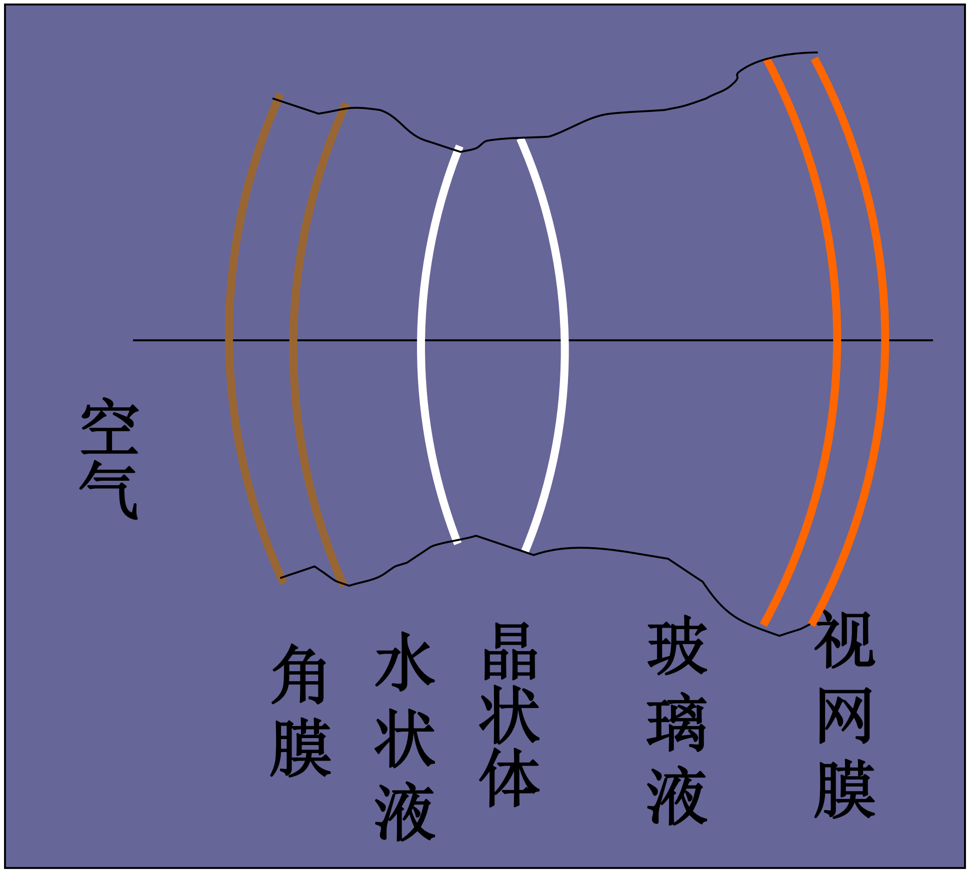
人眼所见的，都是视网膜上所成的实像

无论是实物、实像、还是虚像，经过眼睛后，都在视网膜上成实像。



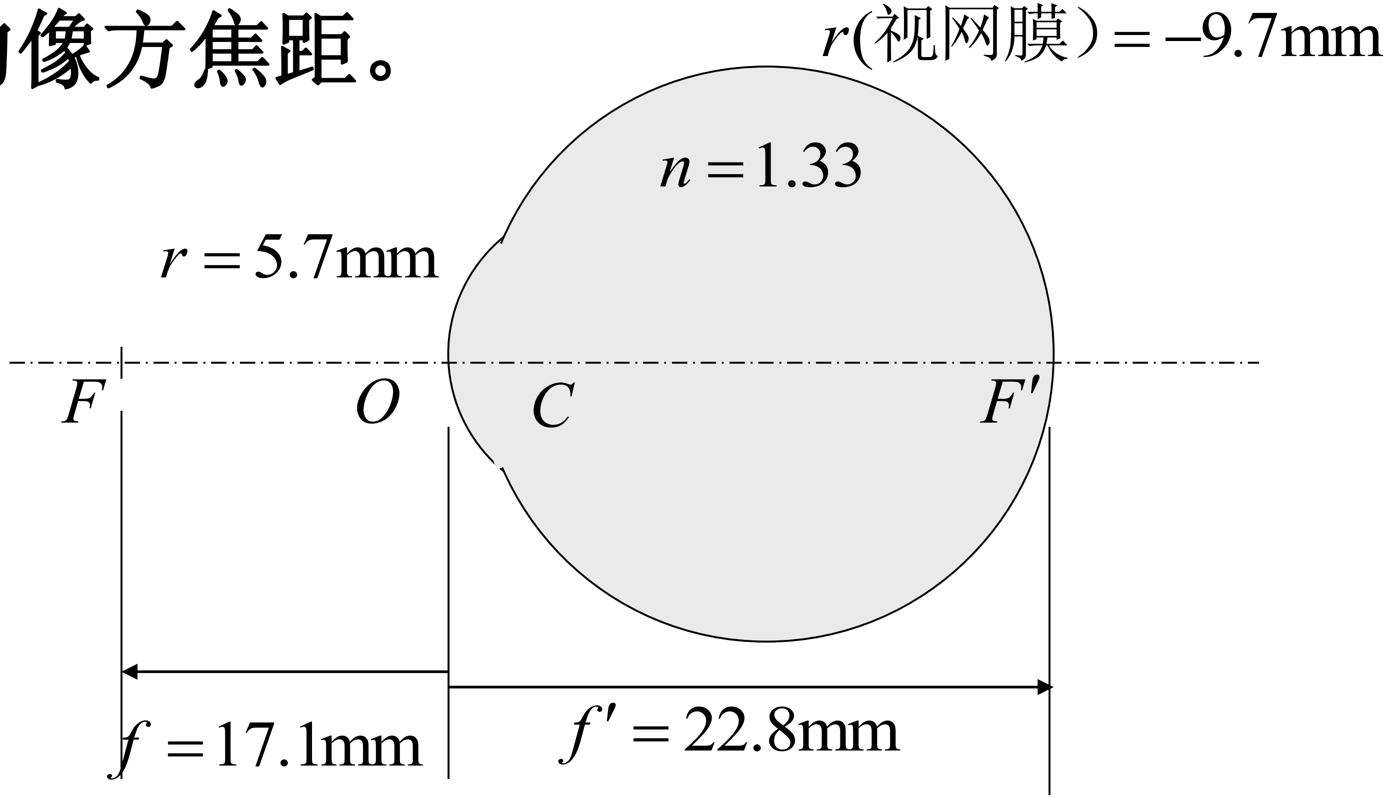
# 示意眼




| | d(mm) | n |
|---|---|---|
| 角膜 | 0.5 | 1.376 |
| 水状液 | 3.1 | 1.336 |
| 晶状体 | 3.6 | 1.386 |
| 玻璃液 | 17.2 | 1.336 |

| r(mm) |
|---|
| 7.7 |
| 6.8 |
| 10.0 |
| -6.0 |
| -9.7 |

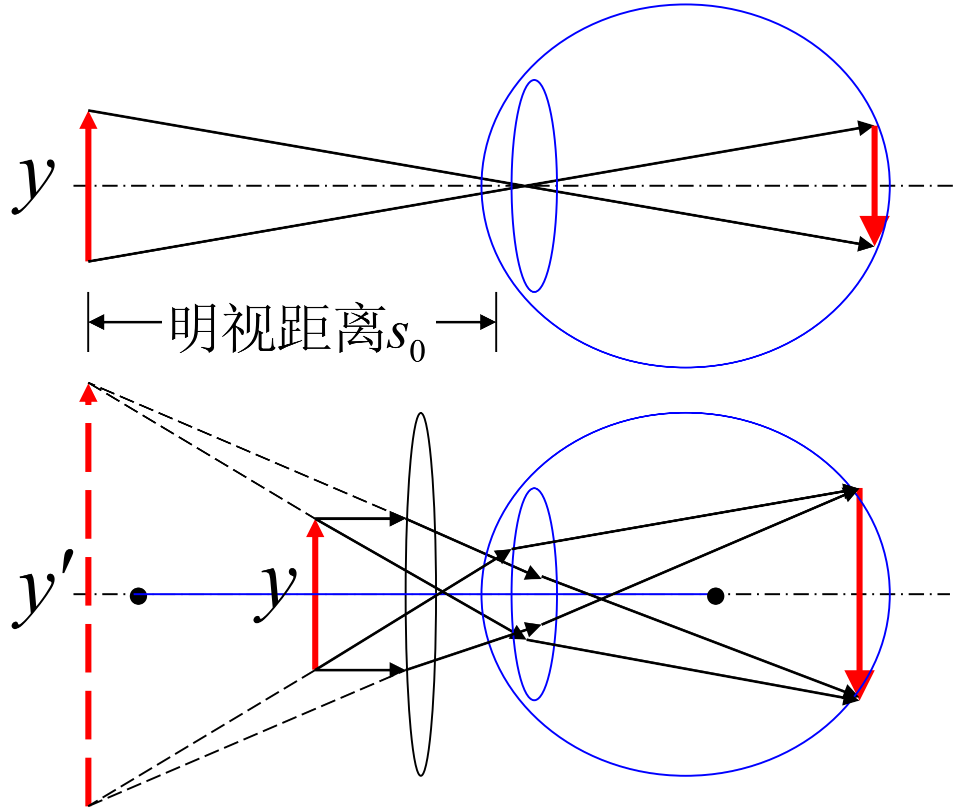
- 简化眼
- 等效于一个可变焦距的凸透镜。视网膜到光心的距离等于眼睛对无穷远处聚焦时的像方焦距。



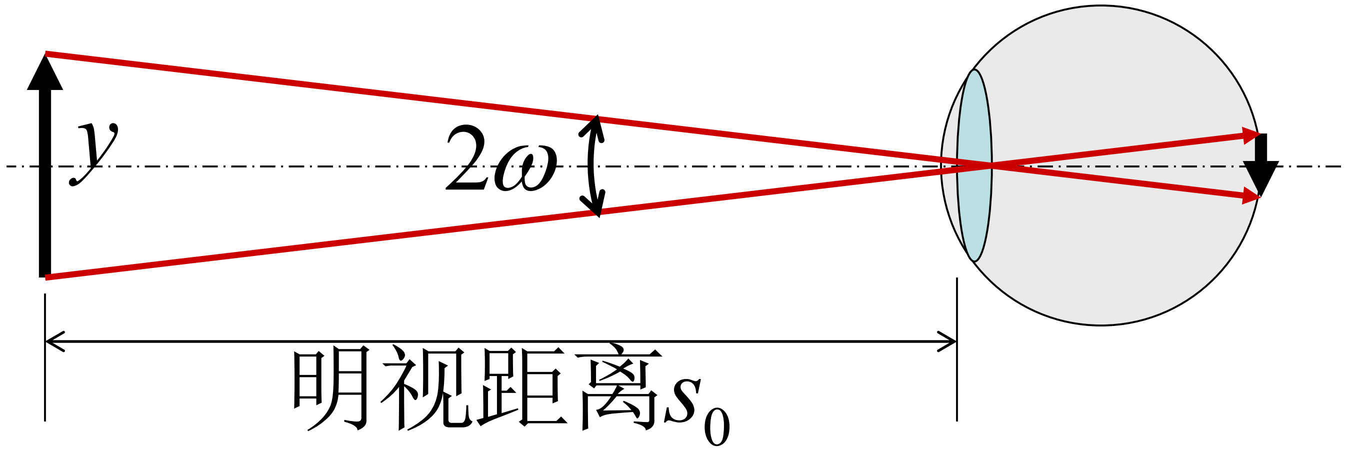
# 2 放大镜

- 是一种目镜，作用是成一放大的虚像，便于眼睛观察。

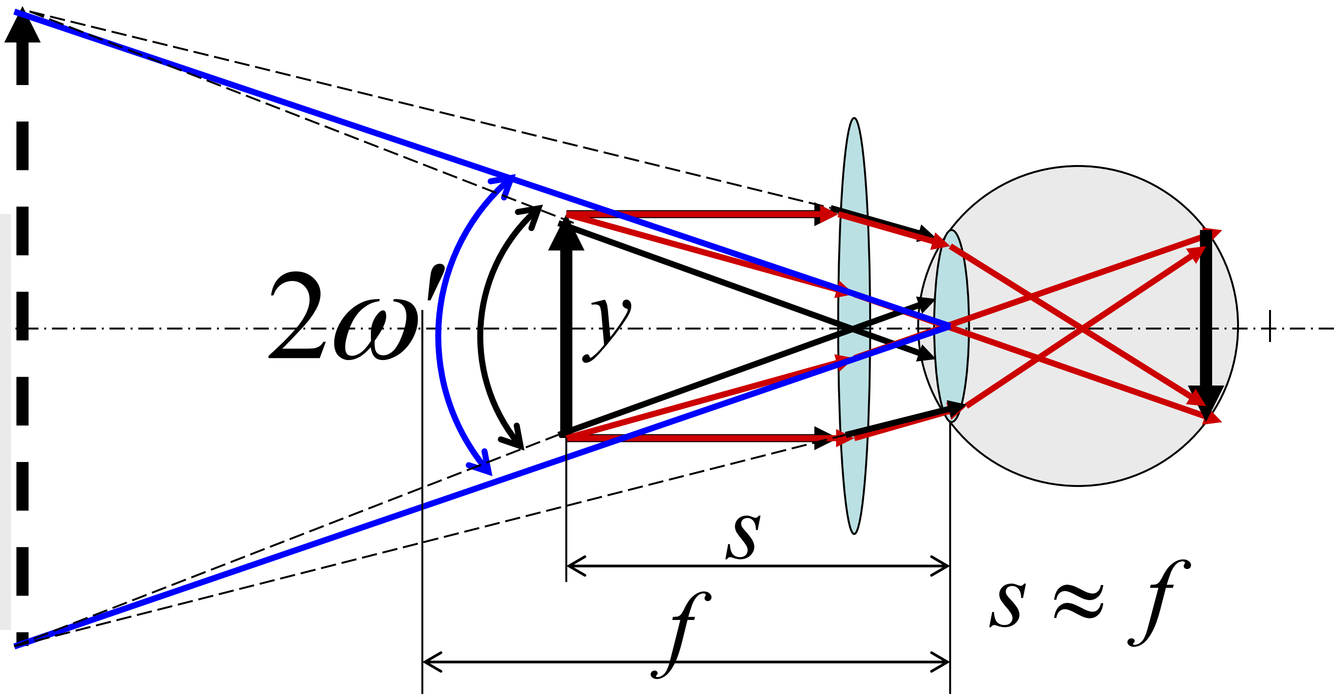
可以通过比较$y'$与$y$得到放大镜对物体的横向放大率，也可以比较它们对眼睛张角的变化得到角放大率



$$2\omega = y / s_0$$




$$2\omega' \approx y / f$$

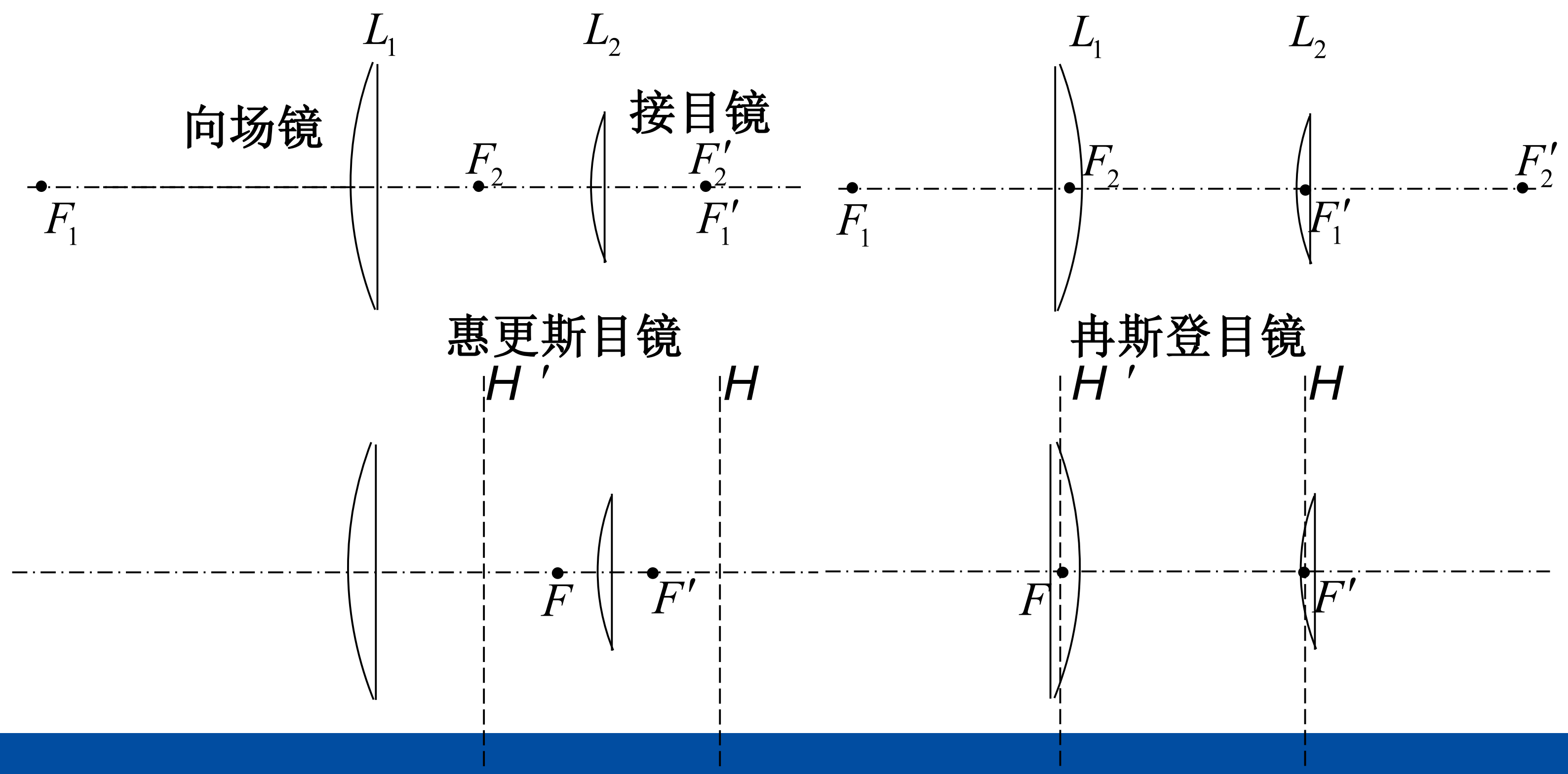



**角放大率**

$$M_e = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{s_0}{f}$$

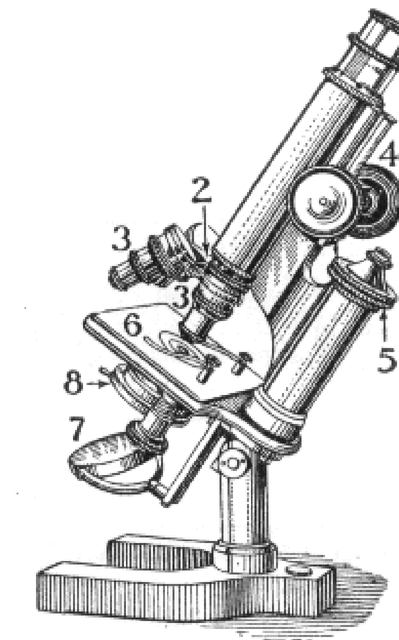
# 3 目镜

- 目镜用在光学仪器上，作用与放大镜相似，都是成一个眼睛可直接观察的虚像。
- 通常都与物镜结合使用，观察物镜所成的实像。



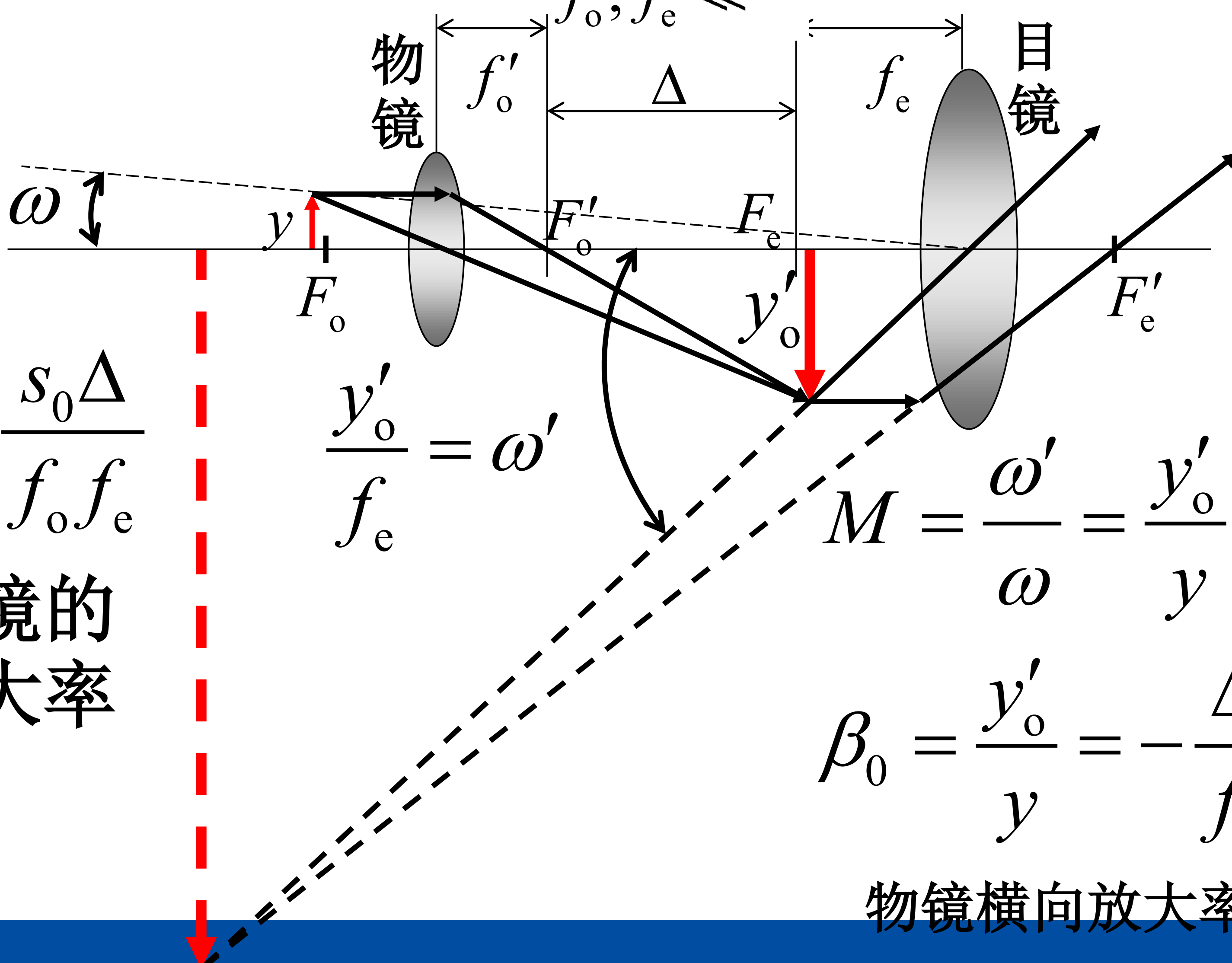
# 4 显微镜

- 具有高放大倍数的光学仪器
- 由物镜组和目镜组构成


**Robert Hooke's microscope** **microscope**

# 显微镜光路与原理




$$\frac{y}{s_0} = \omega$$

$$M = -\frac{s_0 \Delta}{f_o f_e}$$

$$\frac{y'_o}{f_e} = \omega'$$

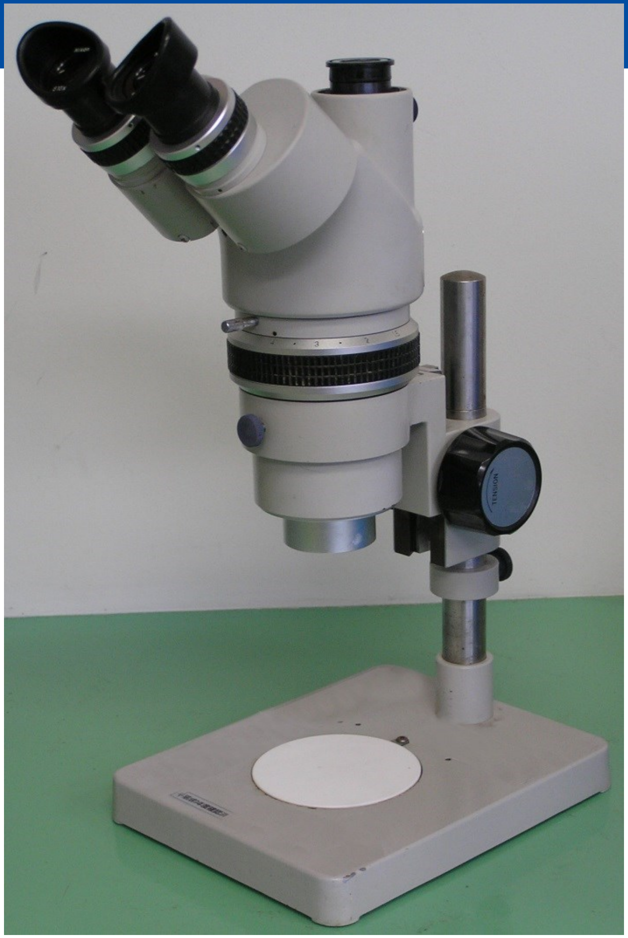
显微镜的角放大率

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{y'_o}{y}\frac{s_0}{f_e}$$

$$\beta_0 = \frac{y'_o}{y} = -\frac{\Delta}{f_o}$$

物镜横向放大率

An 1879 Carl Zeiss Jena Optical microscope



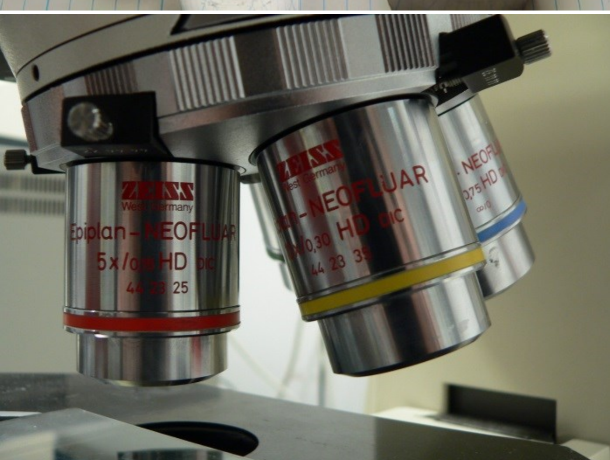
Stereo microscope

Scientist using a stereo microscope outfitted with a digital imaging pick-up

显微镜的角放大率

$$M = -\frac{s_0 \Delta}{f_o f_e}$$






# 显微目镜的参数及标识

- 目镜类别：惠更斯目镜（H）、冉斯登目镜（R），凯尔纳目镜(K)，等
- 放大倍数，5×，10×，……
- 目视场直径（mm）Φ20，……


Figure 1

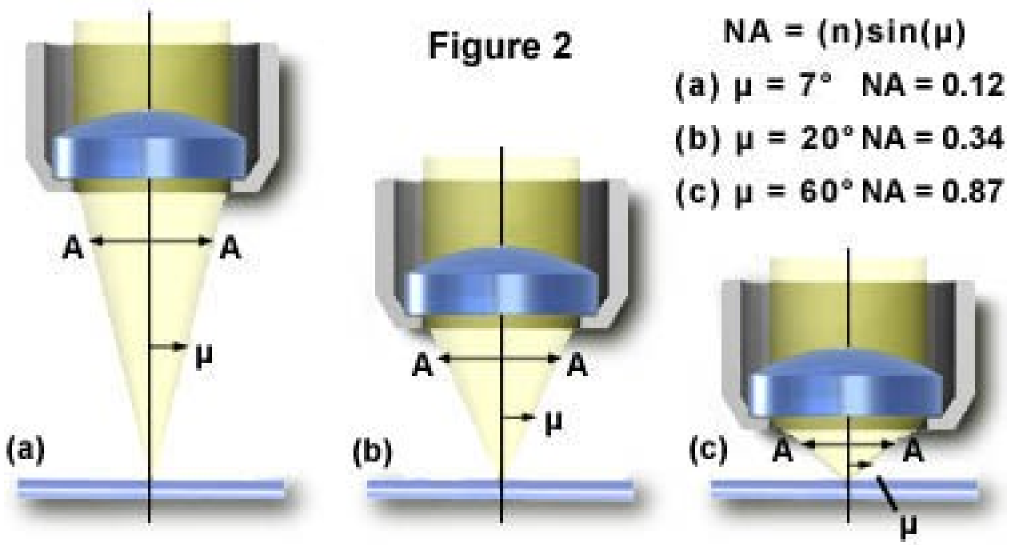



Figure 2

# 5 望远镜

用于观察远处物体，将物体对眼睛的张角扩大，相当于在近处成一缩小的实像，再通过目镜观察。

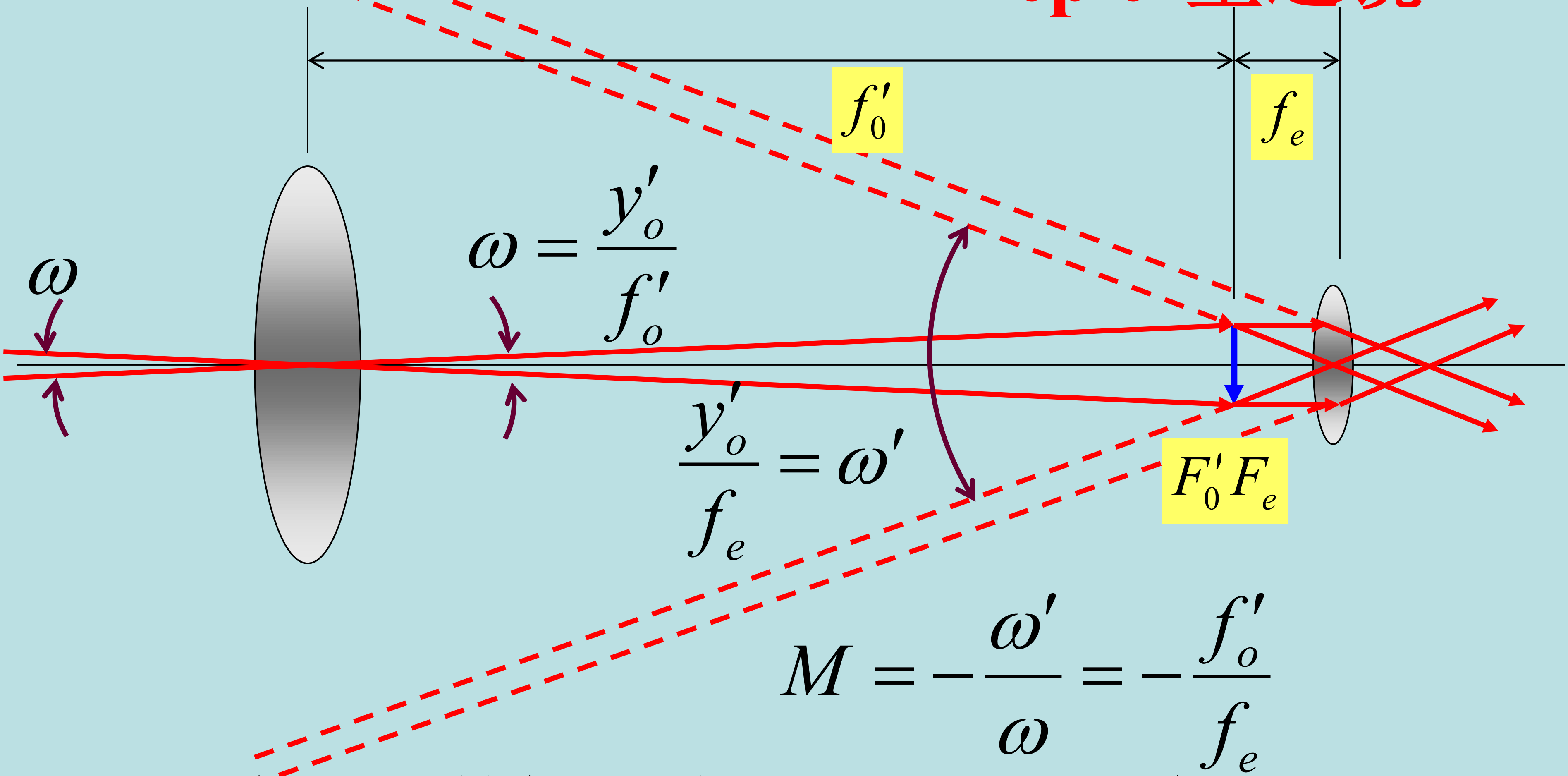
**The Hubble Space Telescope as seen from Space Shuttle *Discovery* during its second servicing mission**

**Soviet-made miniature 2.5 × 17.5 monocular.**

**The 100 inch (2.5 m) Hooker reflecting telescope at Mount Wilson Observatory near Los Angeles, California.**

# Kepler望远镜

∞处物，对物镜的张角ω很小



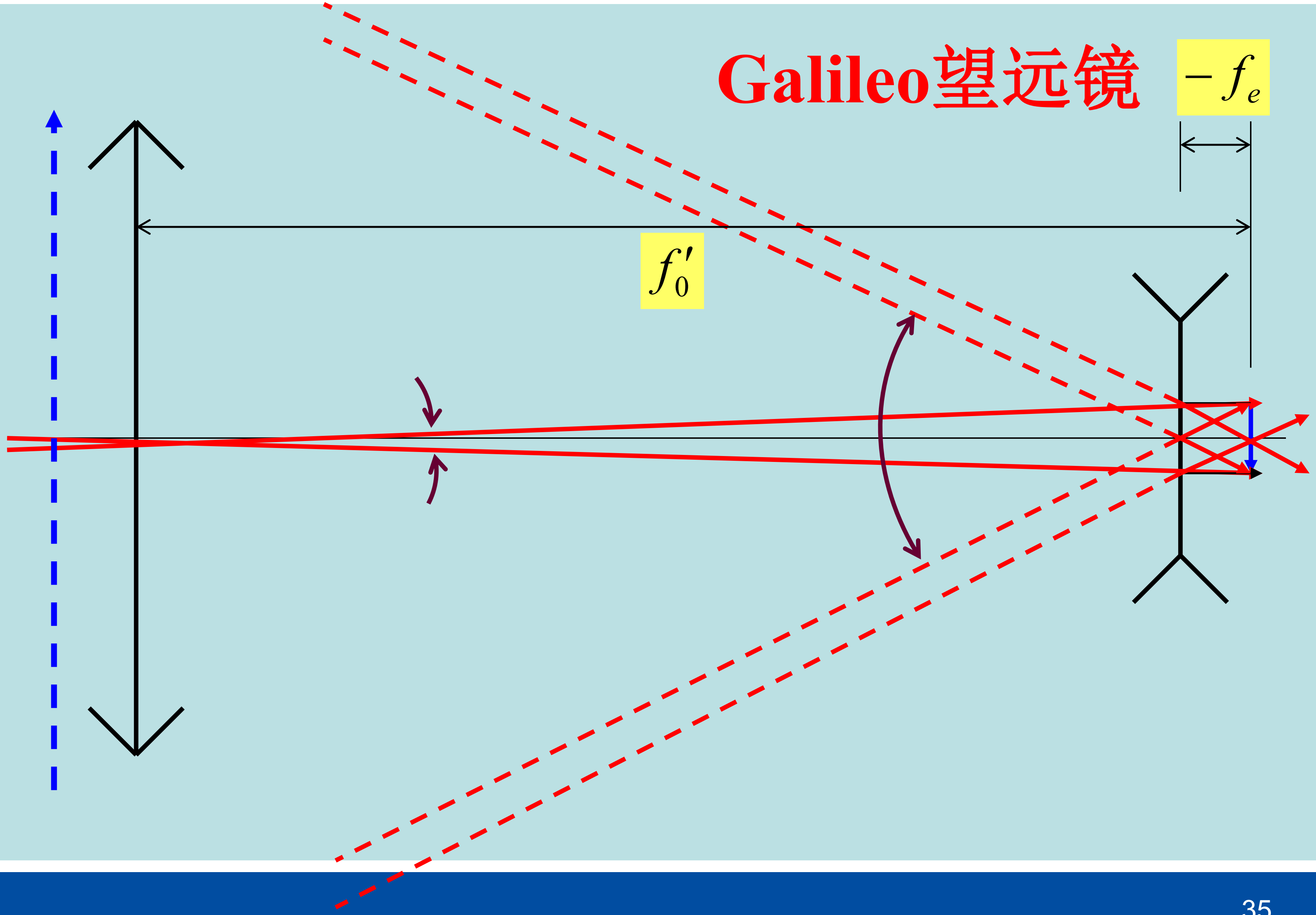

$$\omega = \frac{y_o'}{f_o'}$$

$$\frac{y_o'}{f_e} = \omega'$$

$$M = -\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{f_o'}{f_e}$$

望远镜的参数标识为$M \times D, D$:物镜的孔径

# Galileo望远镜



# 6 照相机

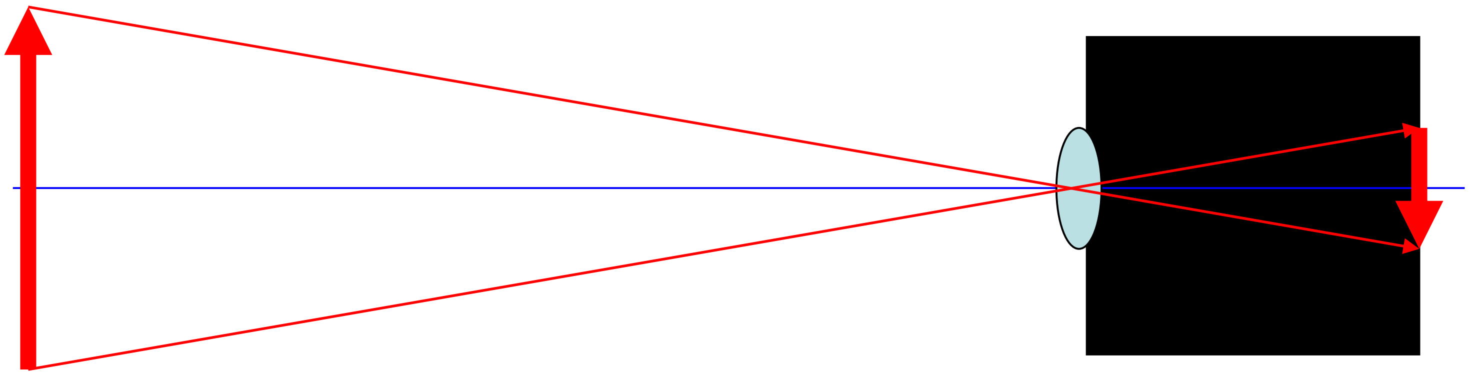
单镜头反光照相机

Single-lens reflex camera， SLR

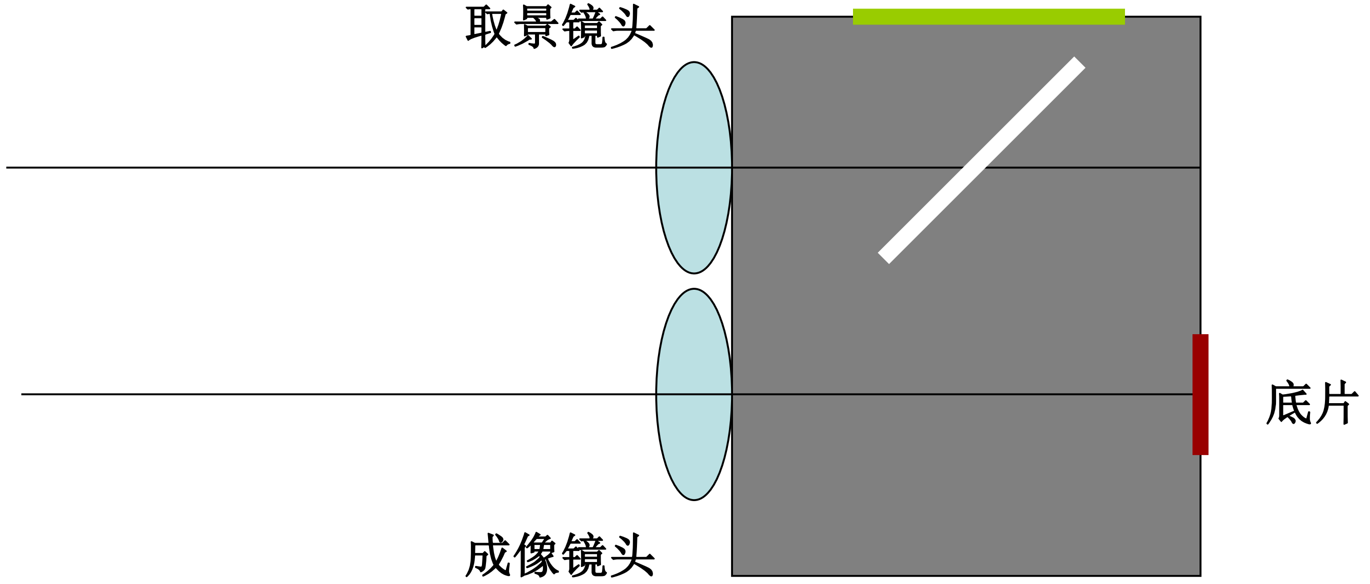

旁轴取景器式照相机

**Rangefinder camera**

# 箱式照相机



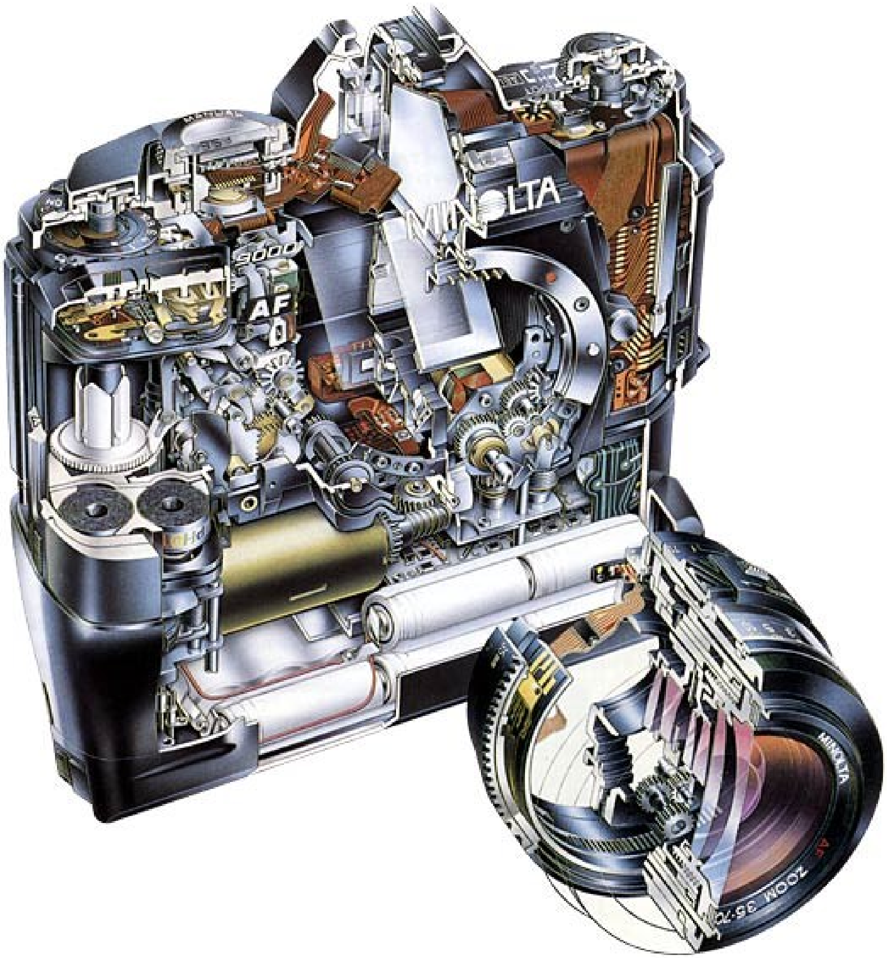
# 双镜头反光照相机

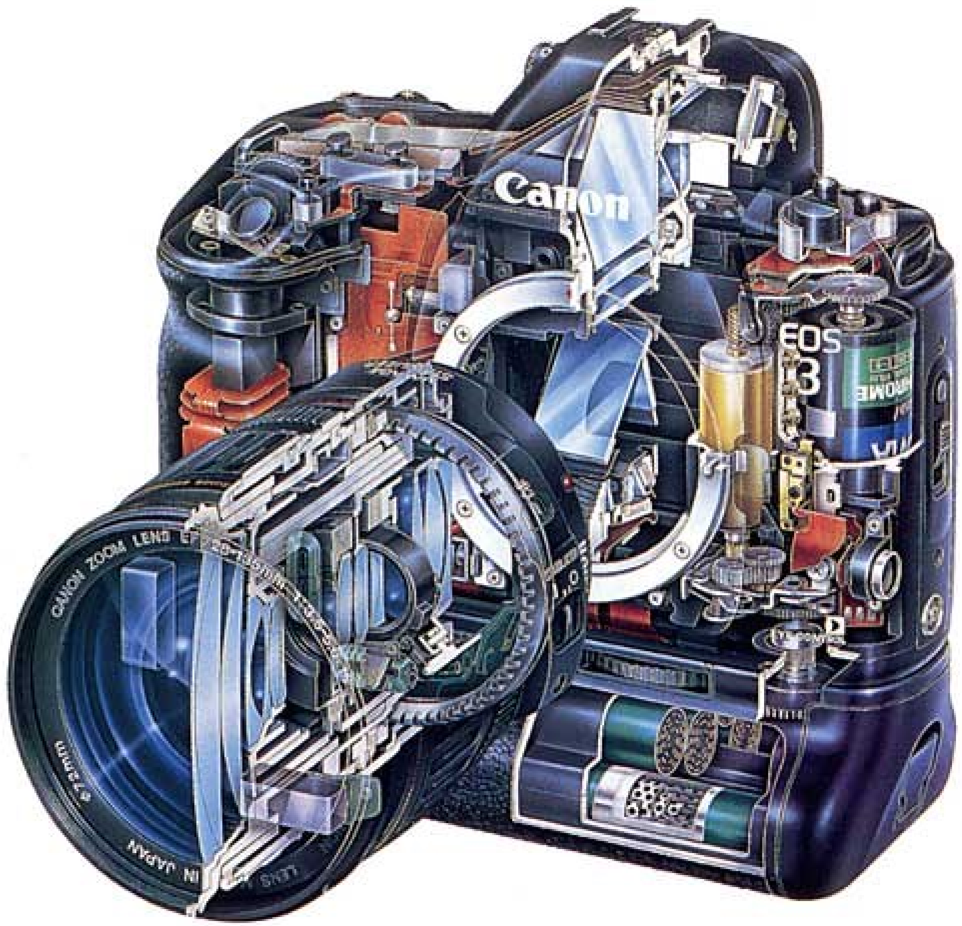



海 鸥
HAIOU
HAIOU-31
SHANGHAI CHINA
PHOTOGRAPHY STUDIO


SLIK

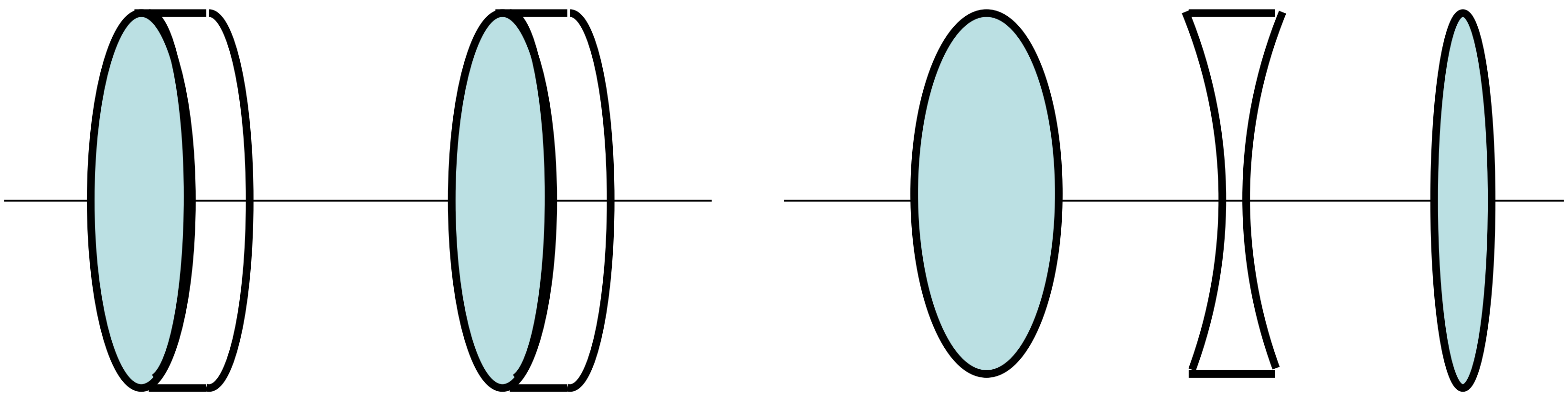
# 单镜头反光照相机



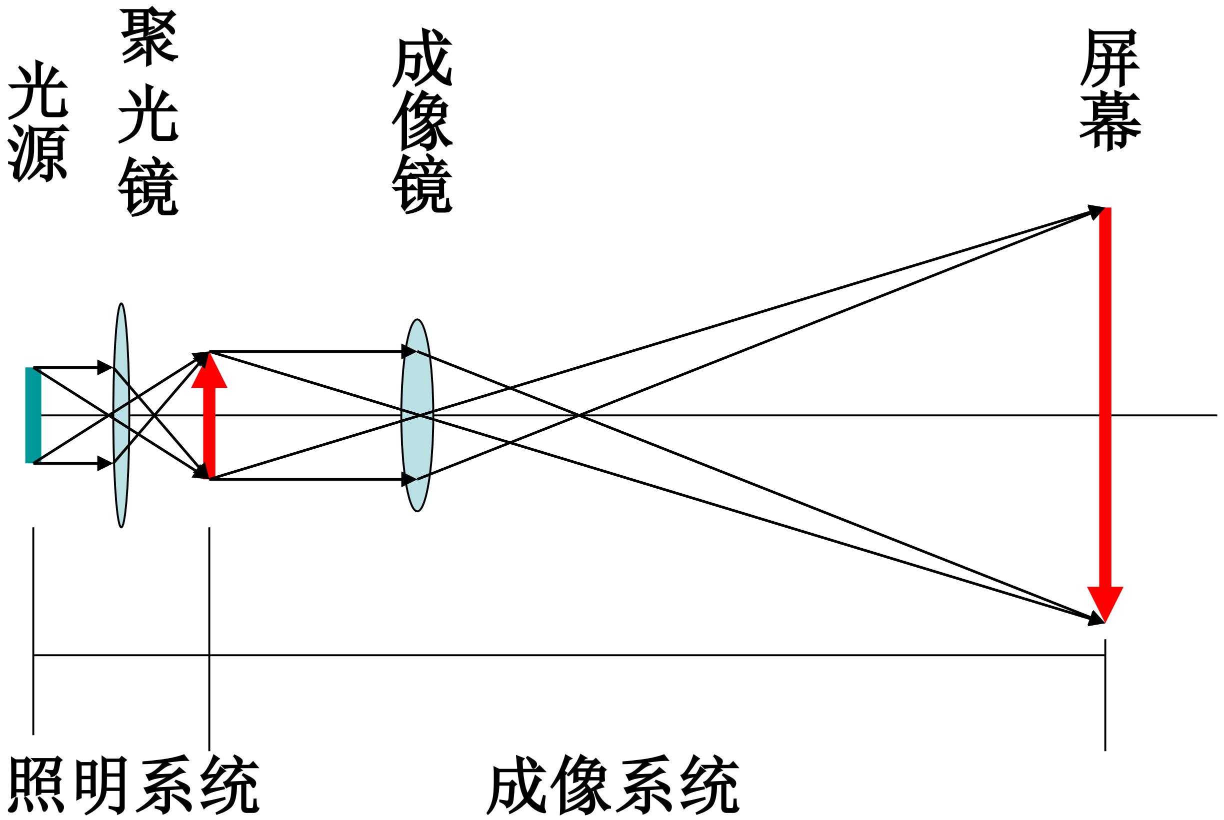



# 照相机的镜头

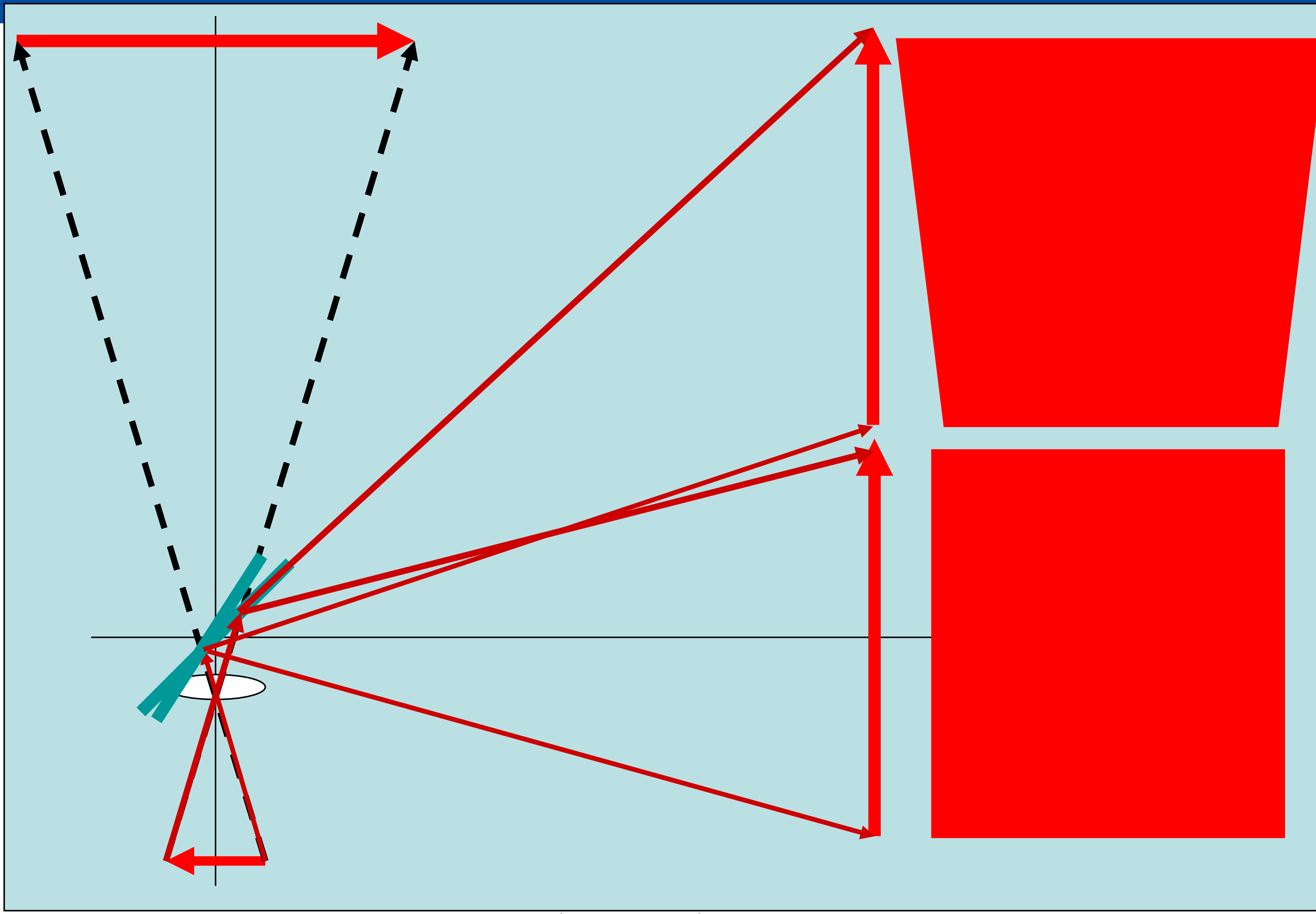
- 为了获得高质量的影像，镜头通常由多组球面透镜构成，可以消除色差、像差、球差、彗差等。



# 7 投影仪器




放映机



投影仪