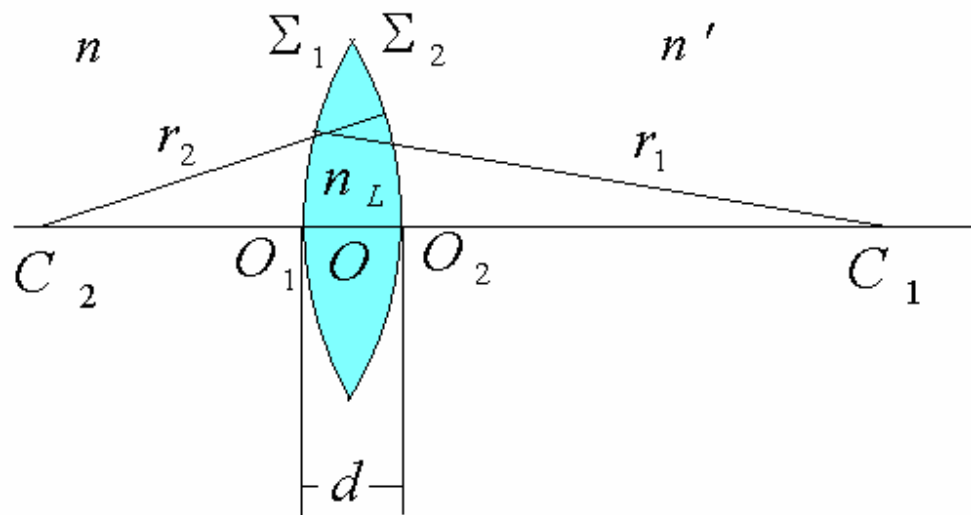


1-03 透镜、理想光具组

薄透镜成像

1. 薄透镜

由两个折射球面组成，过两球面圆心的直线为光轴，顶点间距 d 。



如果满足 $d \ll r_1, r_2, |s|, |s'|$

就是薄透镜，通常可以 $d = 0$

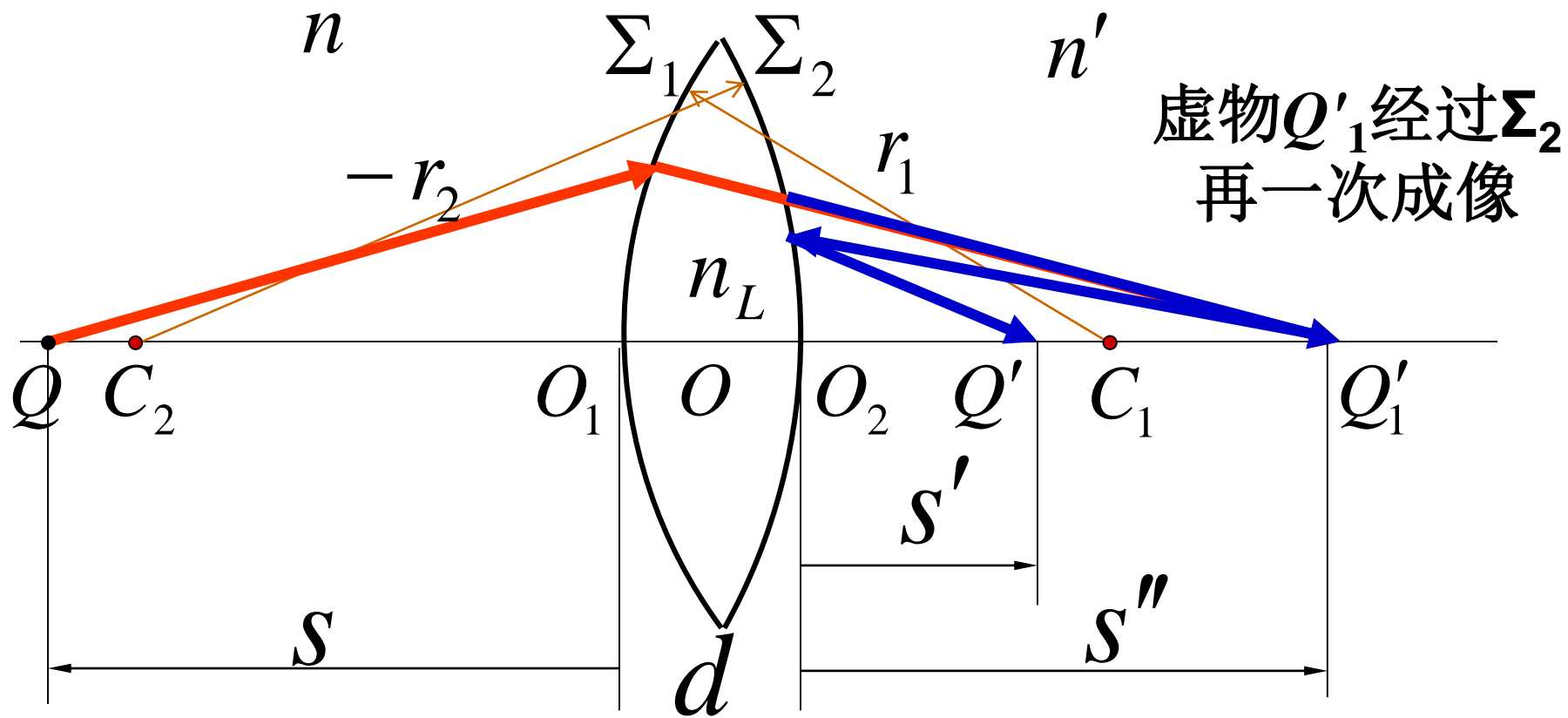
可以认为，两球面顶点重合，称为光心，记为 O 。

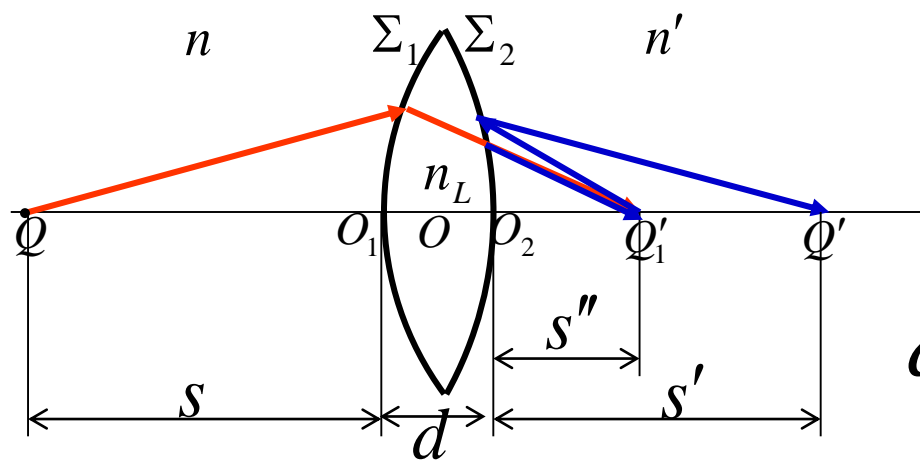
逐次成像法

- 成像透镜由两个折射球面组成，透镜使光线经过了两个球面的折射
- 可以用**逐次成像法**得到透镜的成像公式
- 物 Q_1 经第一面折射成像 Q_2 （应用物像关系可确定像）
- Q_2 无论虚实，总是发出光线的，对第二面来说等效于物
- Q_2 作为第二面的物，经第二面折射成像 Q_3 （再次应用物像关系可确定像）
- **反复应用**上述方法，可得到最终的像

2. 薄透镜成像公式

- 1. 用逐次成像法推导





第一次成像

$$\frac{n_L}{s'' + d} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1}$$

$d = 0$

$$\frac{n_L}{s''} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1}$$

$$\Phi_1 = \frac{n_L - n}{r_1}$$

第二次成像 物在像方，虚物

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n_L}{-s''} = \frac{n' - n_L}{r_2}$$

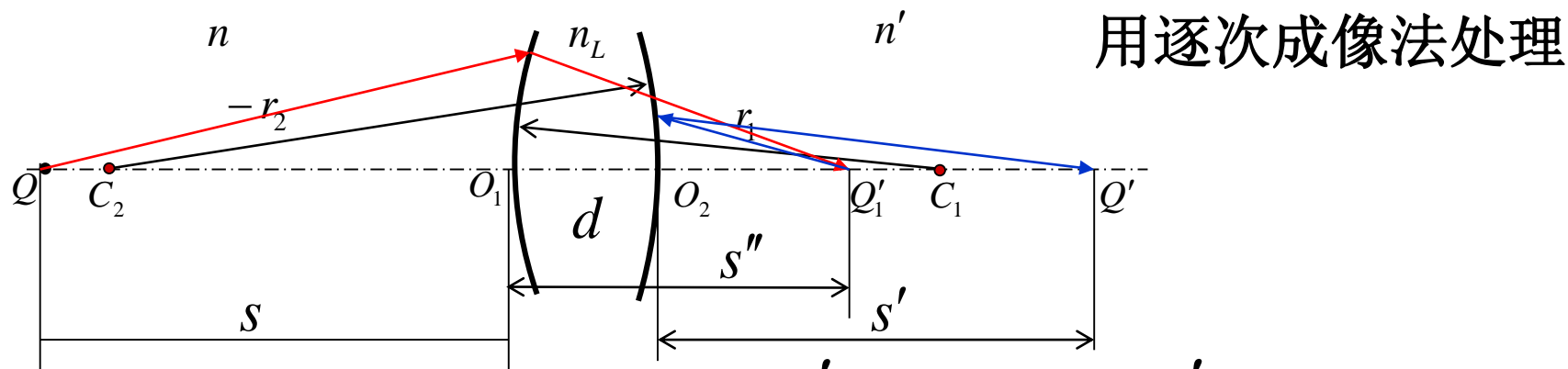
$$\Phi_2 = \frac{n' - n_L}{r_2}$$

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$$

$$\Phi = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}$$

薄透镜的光焦度，单位是屈光度（diopter, D），对于眼镜，度数为 100Φ

厚透镜的“光焦度”



用逐次成像法处理

$$\frac{n_L}{s''} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1} \qquad \frac{n'}{s'} + \frac{n_L}{d - s''} = \frac{n' - n_L}{r_2}$$

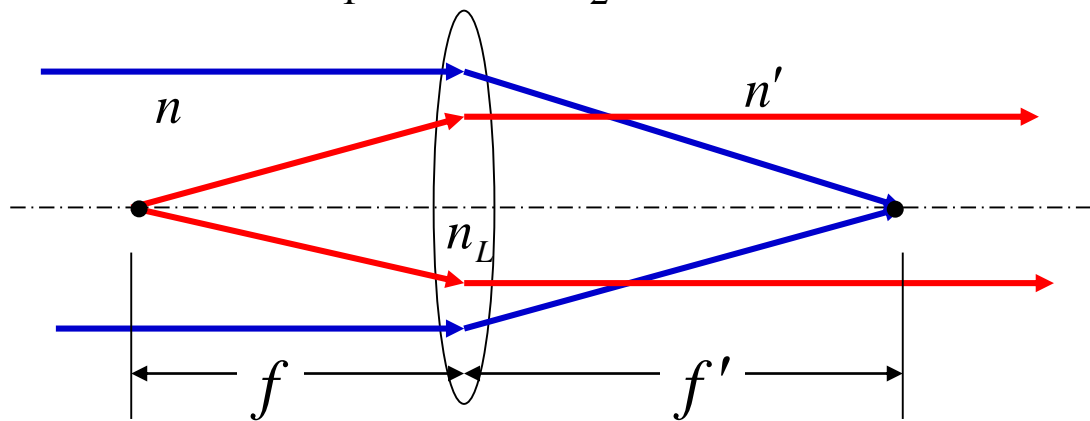
$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} - \frac{n_L}{s''} - \frac{n_L}{d - s''}$$

由于 s'' 与 s 有关，因而厚透镜不存在“光焦度”这一参量

3 . 薄透镜的焦点与焦平面

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}$$

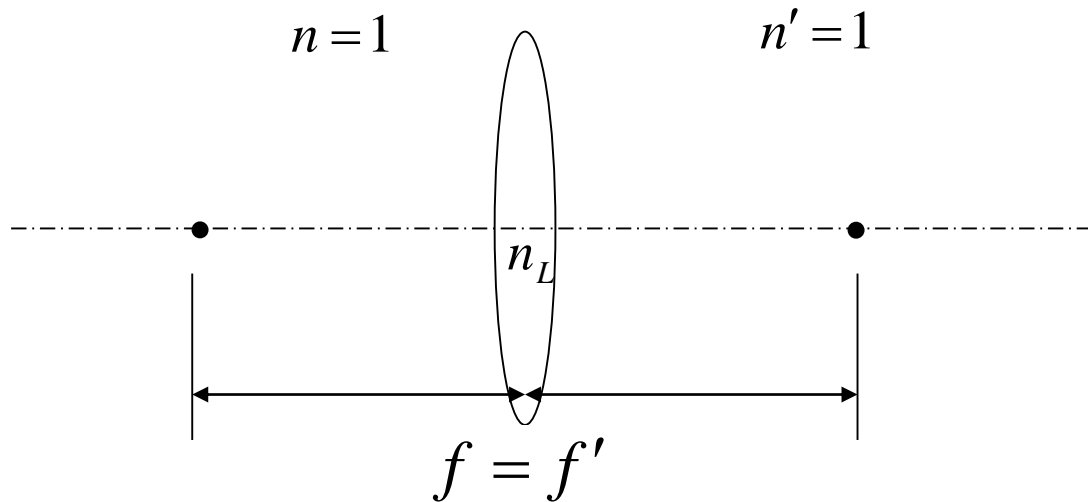
$$s' = \infty \quad f = \frac{n}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} = \frac{n}{\Phi} \quad \text{物方焦距}$$



$$s = \infty \quad f' = \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} = \frac{n'}{\Phi} \quad \text{像方焦距}$$

空气中的薄透镜

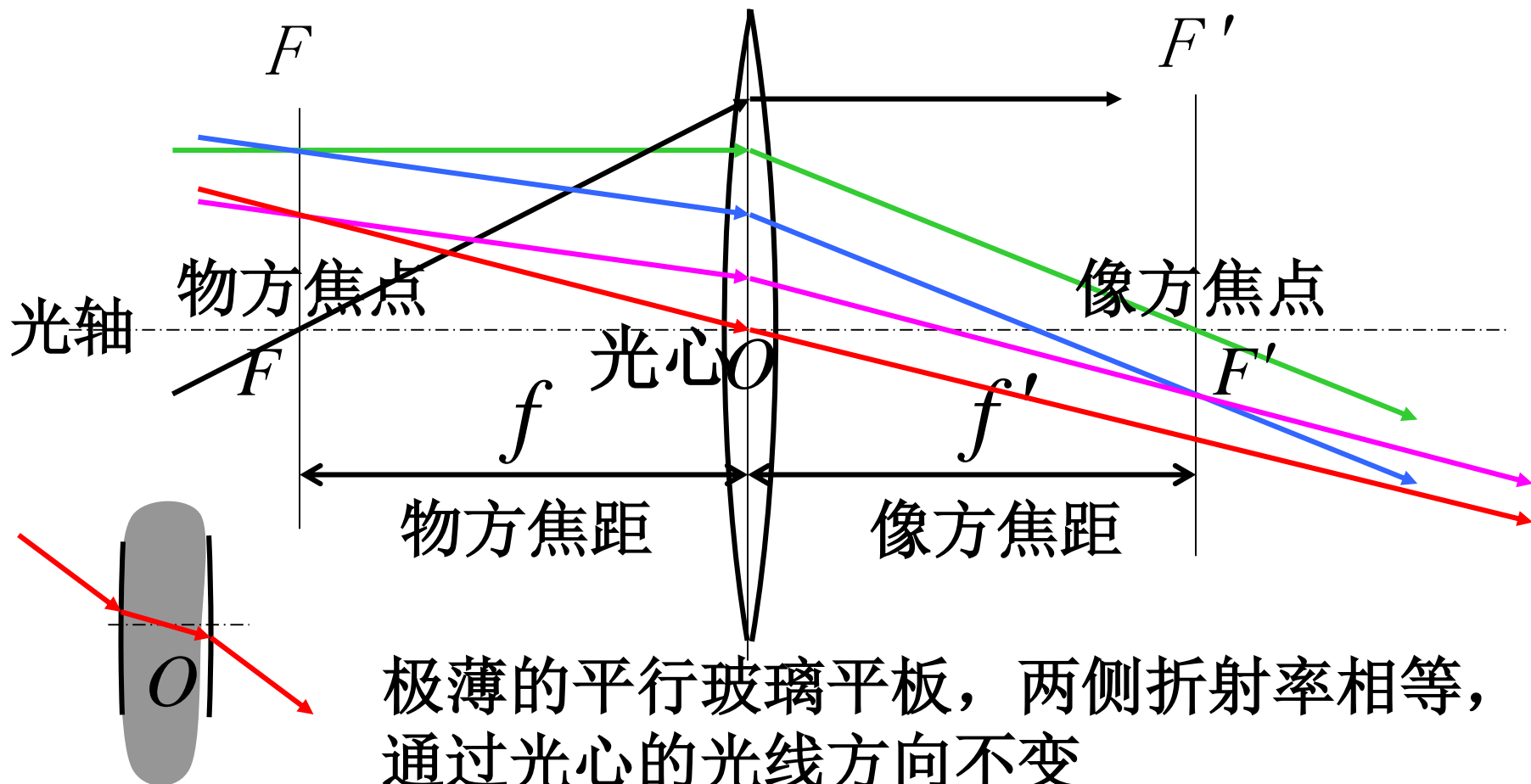
$$n = n' = 1 \quad f = f' = \frac{1}{(n_L - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad \text{磨镜者公式}$$



4. 薄透镜的光学参数与光学特性

物方焦平面

像方焦平面



极薄的平行玻璃平板，两侧折射率相等，
通过光心的光线方向不变

成像的基本光学单元

- 凡是存在简单的物像关系，而且其中的**距离有共同的度量起点**，即可以用下述公式描述的光学器件 $\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \Phi$ $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$ 是成像光具组的**基本单元**
- 单个折射面、反射面，以及薄透镜，都是基本的成像单元
- 厚透镜不是基本的成像单元，是两个折射球面构成的光具组，用逐次成像法求解

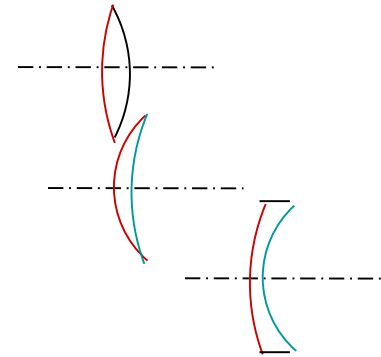
正透镜与负透镜

- 焦距为正值的透镜是正透镜；焦距为负值的透镜是负透镜。
- 正透镜的像方焦点在像方；负透镜的像方焦点在物方。
- 正透镜使入射的平行光汇聚在像方焦点；负透镜使入射的平行光发散。
- 空气中，中间厚边缘薄的透镜是正透镜；中间薄边缘厚的透镜是负透镜。

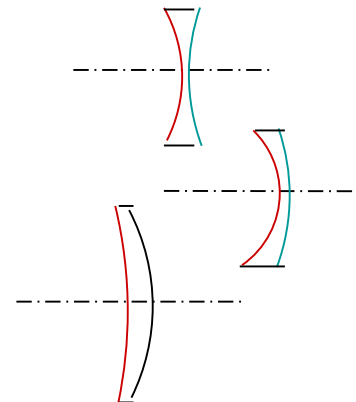
$$f = f' = \frac{1}{(n_L - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

正透镜 $\frac{1}{r_1} > \frac{1}{r_2}$ 负透镜 $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{r_2}$

$$r_1 > 0 \begin{cases} \begin{cases} r_2 < 0 \\ r_2 > 0 \ \& \ r_2 > r_1 \end{cases} \Rightarrow f = f' > 0 \\ r_2 > 0 \ \& \ r_2 < r_1 \Rightarrow f = f' < 0 \end{cases}$$



$$r_1 < 0 \begin{cases} \begin{cases} r_2 > 0 \\ r_2 < 0 \ \& \ |r_2| > |r_1| \end{cases} \Rightarrow f = f' < 0 \\ r_2 < 0 \ \& \ |r_2| < |r_1| \Rightarrow f = f' > 0 \end{cases}$$



从Fermat原理看，这是很自然的结果。

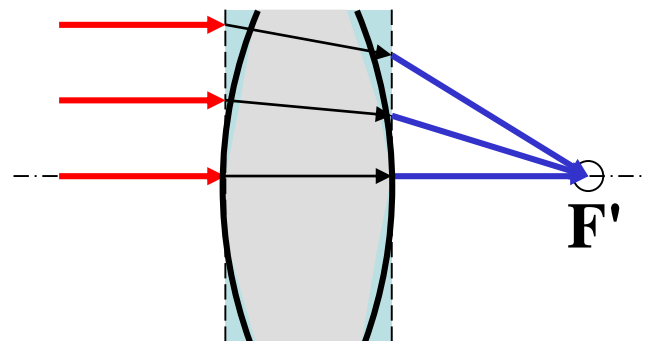
从费马原理看光学成像

- 证明空气中的正透镜必定是中间厚边缘薄；负透镜必定是中间薄边缘厚
- 所谓正透镜，系指物方焦点在其物方，而像方焦点在其像方

- 以平行光正入射证明

平行光自左侧入射，汇聚到正透镜右侧焦点

光线愈远离光轴，所经过距离愈长



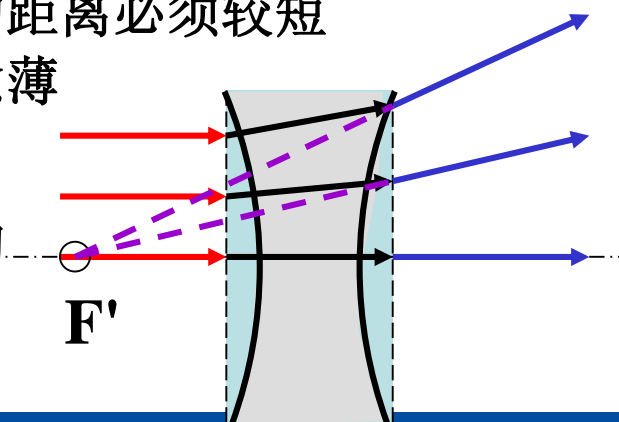
为使光程相等，则远离光轴的光线，其在透镜中的距离必须较短

所以正透镜的形状，必须愈远离中心轴线，厚度愈薄

正透镜的形状，必定是中间厚边缘薄的结构

同理，负透镜的形状，必定是中间薄边缘厚的结构

光线在透镜中的光程 + 虚光线的虚光程 = 定值

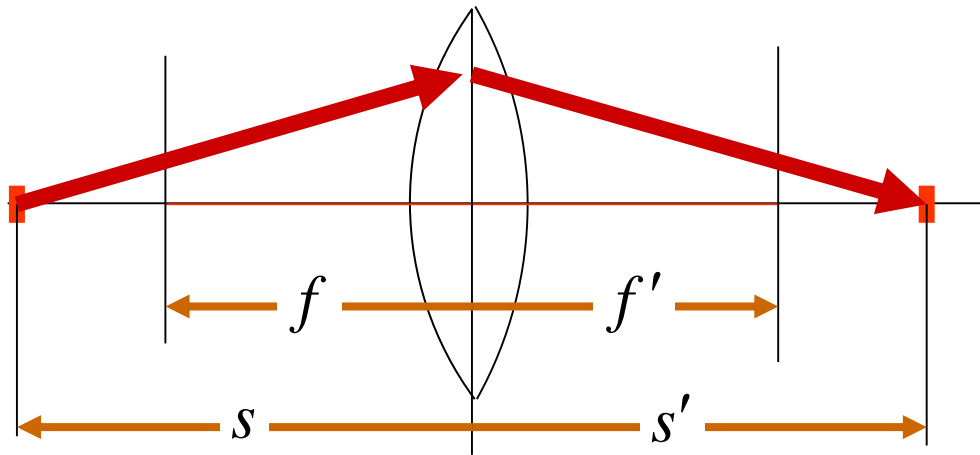


Gauss物像公式

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \quad \frac{1}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} \left(\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} \right) = 1$$

距离从光心算起

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

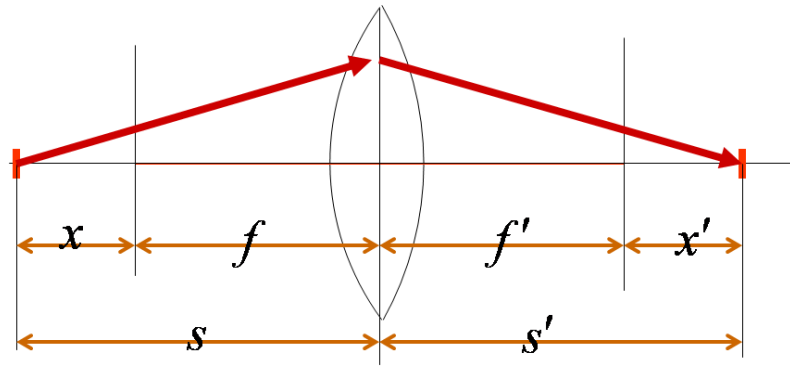


图示

Newton物像公式

$$s = x + f \quad s' = x' + f' \quad \frac{f'}{x' + f'} + \frac{f}{x + f} = 1$$

如果距离从焦平面算起
点在焦平面之外为正值

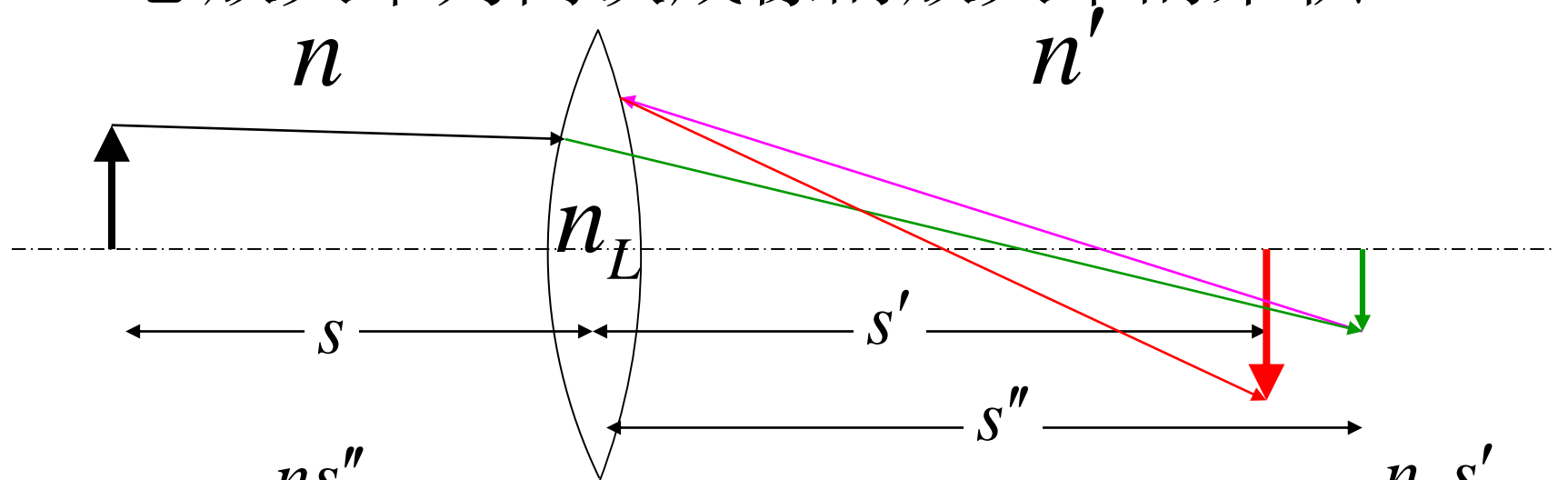


$$\cancel{xf'} + \cancel{ff'} + \cancel{x'f} + ff' = x'x + \cancel{x'f} + \cancel{xf'} + \cancel{ff'}$$

$$xx' = ff' \quad \text{Newton物像公式}$$

5. 像的横向放大率

- 总放大率为两次成像的放大率的乘积



$$\beta_1 = \left(-\frac{ns''}{n_L s}\right) \quad \text{第二次成像, 是虚物成像} \quad \beta_2 = \left[-\frac{n_L s'}{n'(-s'')}\right]$$

$$\beta = \beta_1 \beta_2 = \left(-\frac{ns''}{n_L s}\right) \left(\frac{n_L s'}{n' s''}\right) = -\frac{ns'}{n' s}$$

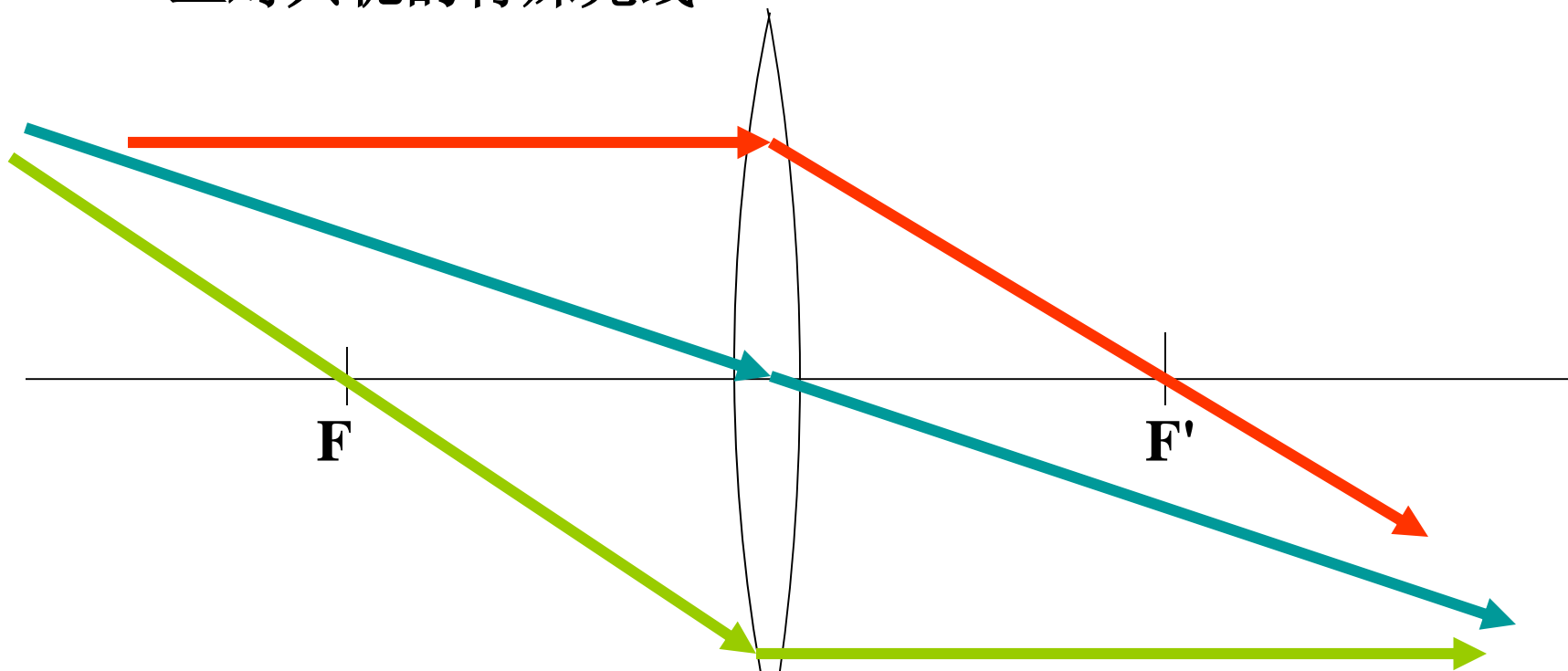
6 . Lagrange-Helmholtz恒等式

- Lagrange-Helmholtz恒等式依然成立

$$y n u = y'' n_L u'' = y' n' u'$$

7. 薄透镜作图法

三对共轭的特殊光线

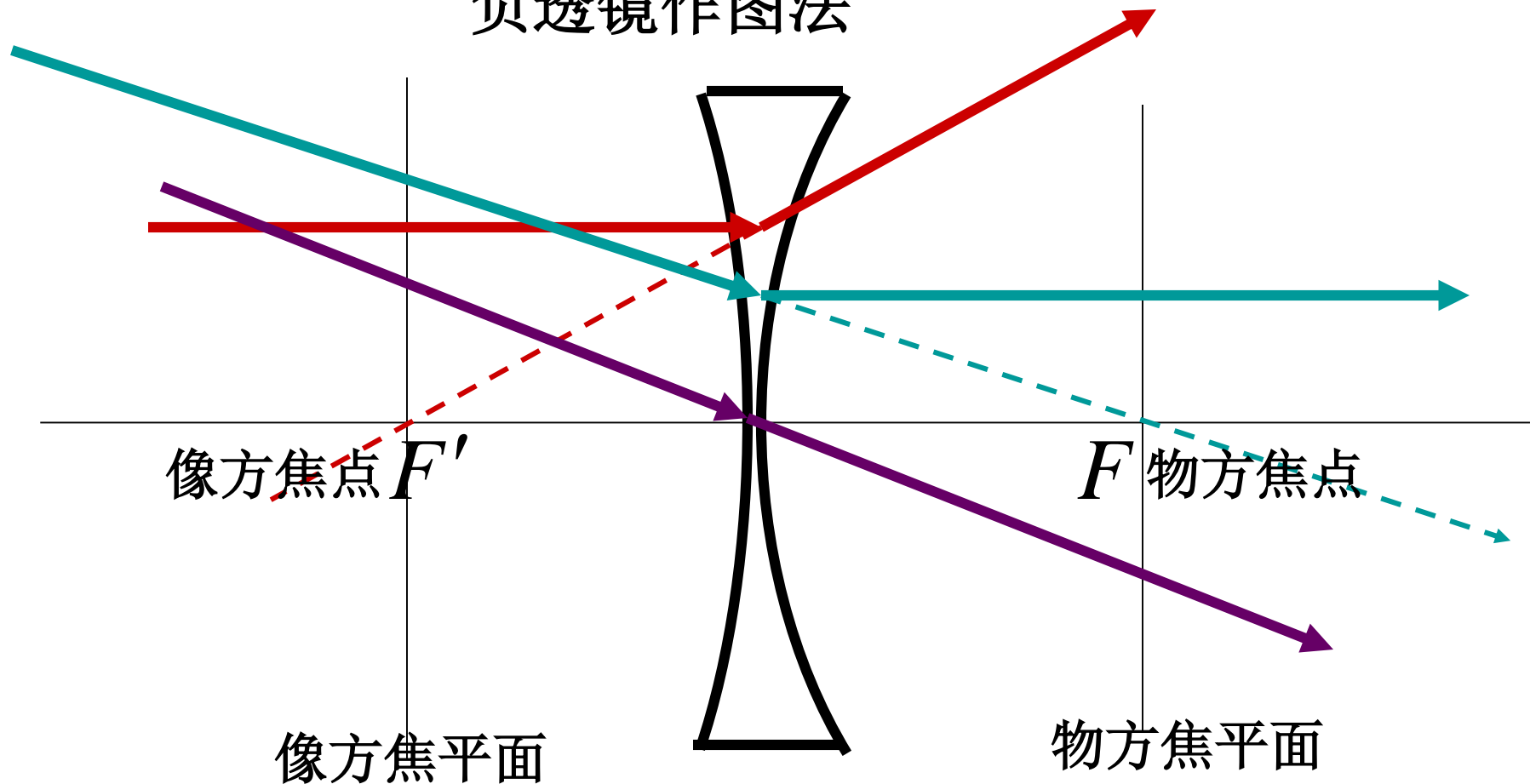


平行于光轴的入射光线 \longleftrightarrow 经过像方焦点的光线

经过物方焦点的光线 \longleftrightarrow 平行于光轴的像方光线

经过透镜光心的入射光线 \longleftrightarrow 经过透镜光心的像方光线

负透镜作图法



平行于光轴的入射光线 \longleftrightarrow 经过像方焦点的光线

经过透镜光心的入射光线 \longleftrightarrow 经过透镜光心的像方光线

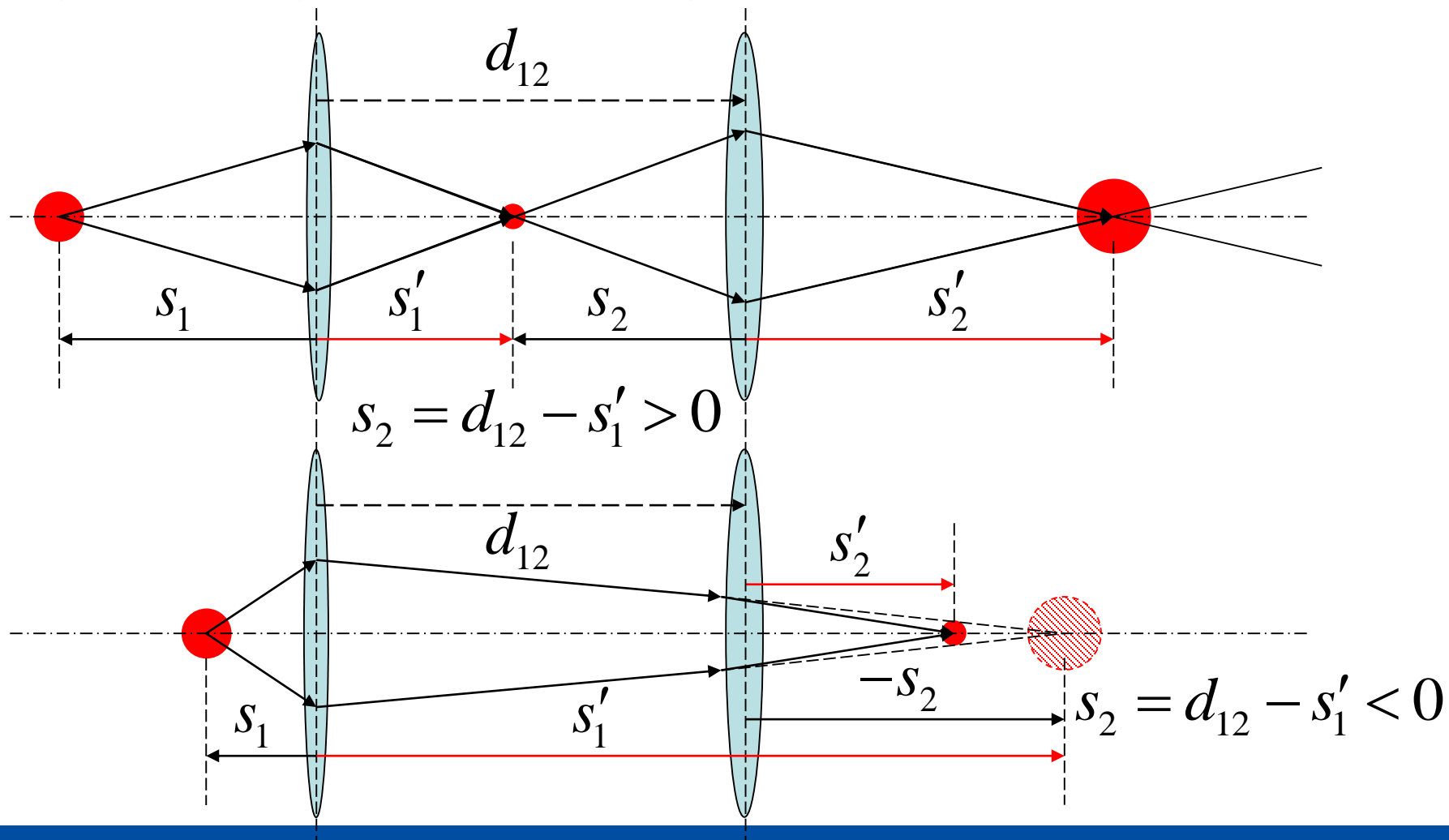
经过物方焦点的光线 \longleftrightarrow 平行于光轴的像方光线

8 . 透镜组的成像作图法

- 由多个透镜或反射镜组成的光具组，可以采用逐次成像法处理成像问题。
- 可以用直观的作图法
- 也可以反复应用成像公式计算

光具组的逐次成像

- 光线经第1镜所成的像，作为第2镜的物

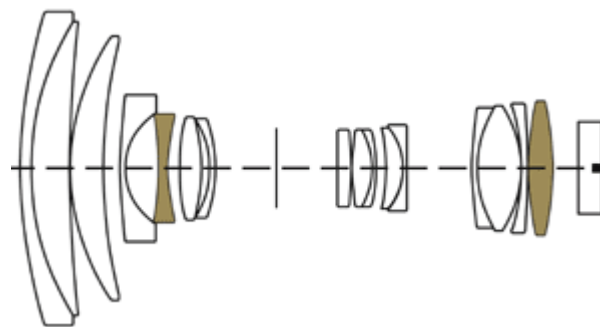
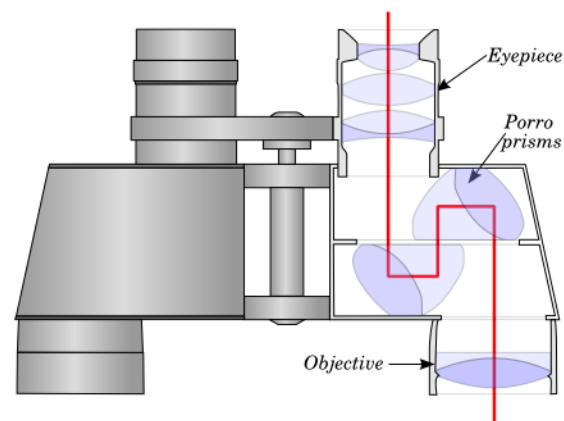


透镜组的逐次成像算法

- 对第一个透镜用成像公式计算，确定像的位置
- 将该像作为第二个透镜的物，再次进行成像，依次逐个进行。
- 如果上述像是下一个透镜的实物，则物距为正值，直接应用公式进行计算；如果是虚物，则其到第二透镜的距离，即物距是负值。

理想共轴球面系统的成像

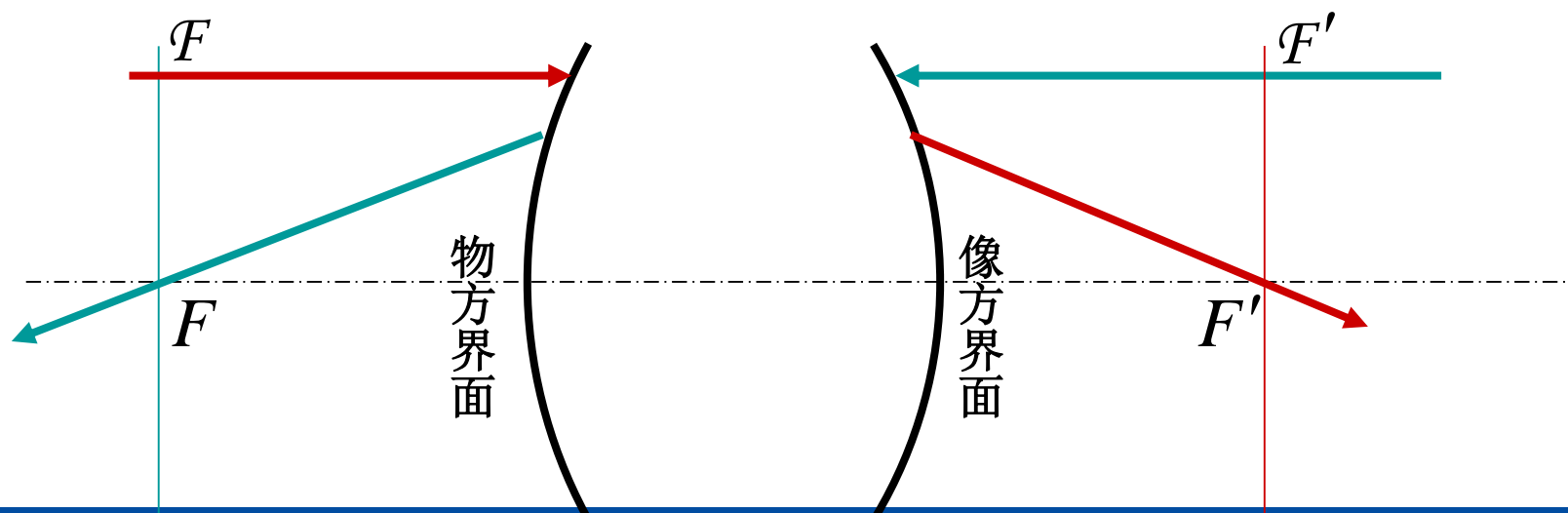
- 共轴球面系统



1.共轴球面系统的基点和基面

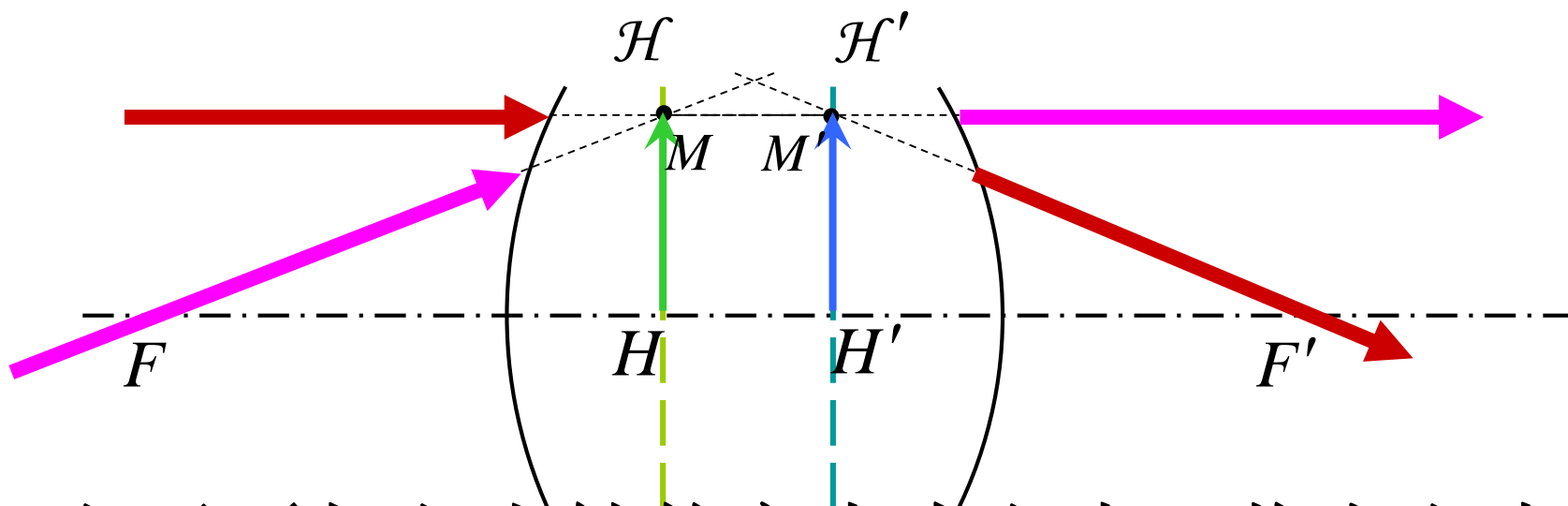
- 薄透镜中，只要知道了**光心**位置、物方和像方**焦点**或**焦平面**位置，则可以方便地解决任何光线的成像问题。
- 同样，对于理想的共轴球面系统，可以将其等效为一个球面透镜，确定了基本的点和面后，也可以完全确定物像关系。
- 理想的共轴球面系统的基点和基平面包括**焦点**（**焦平面**）、**主点**（**主平面**）、以及**节点**（**节平面**）等。

- 1. 焦点
- 与光轴平行的入射光线经光学系统后与光轴的交点为像方焦点 F' ；物方光轴上一点发出的光线经光学系统后与光轴平行，该点为物方焦点 F 。
- 2. 焦平面
- 过焦点与光轴垂直的平面为焦平面。与无穷远处的像平面共轭的物平面为物方焦平面 F ；与无穷远处的物平面共轭的像平面为像方焦平面 F' 。
- 焦平面就是过焦点垂直于光轴的平面。



2. 主点与主平面

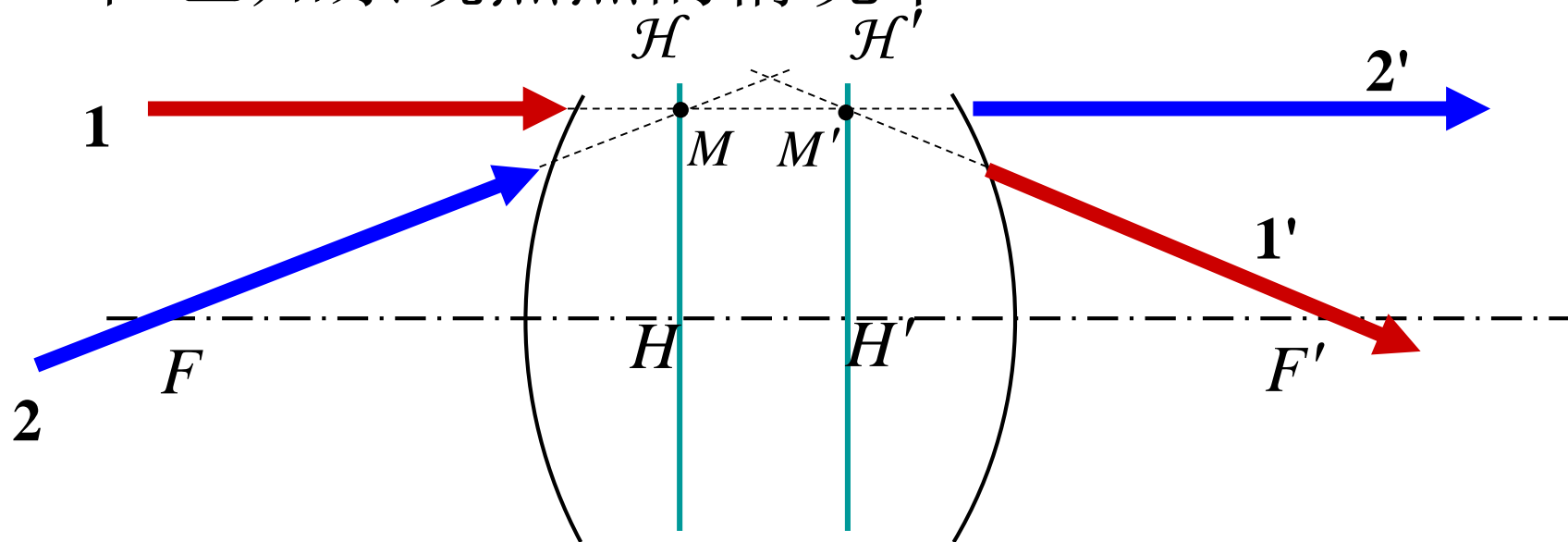
- 横向（垂轴）放大率等于+1的一对共轭平面为主平面。物方主平面 H ，像方主平面 H' 。



- 主平面与主光轴的交点为主点。物方主点 H ，像方主点 H' 。

用作图法确定主平面主点

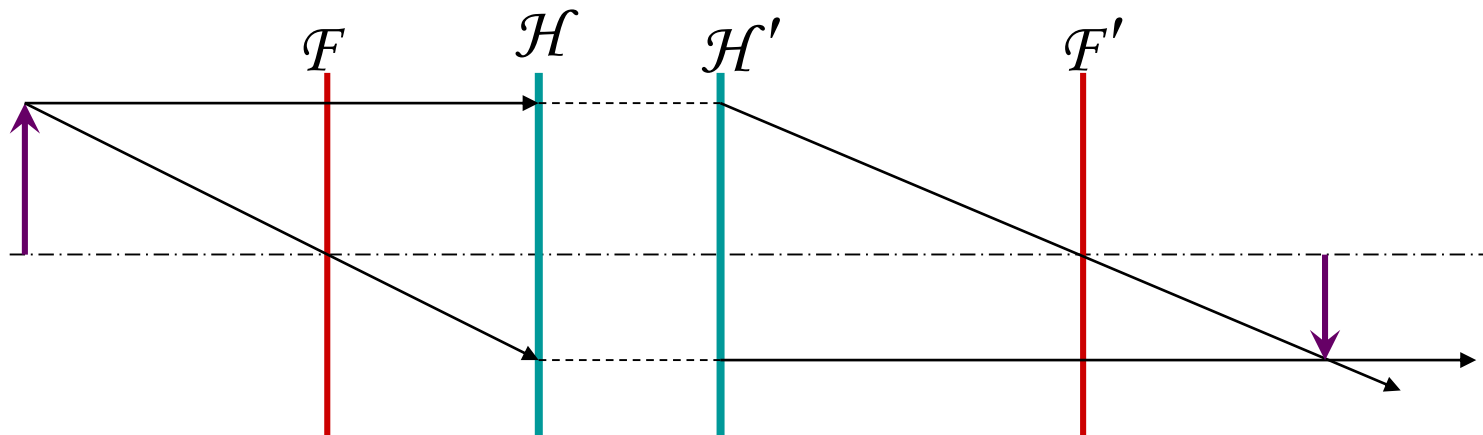
- 在已知系统焦点的情况下



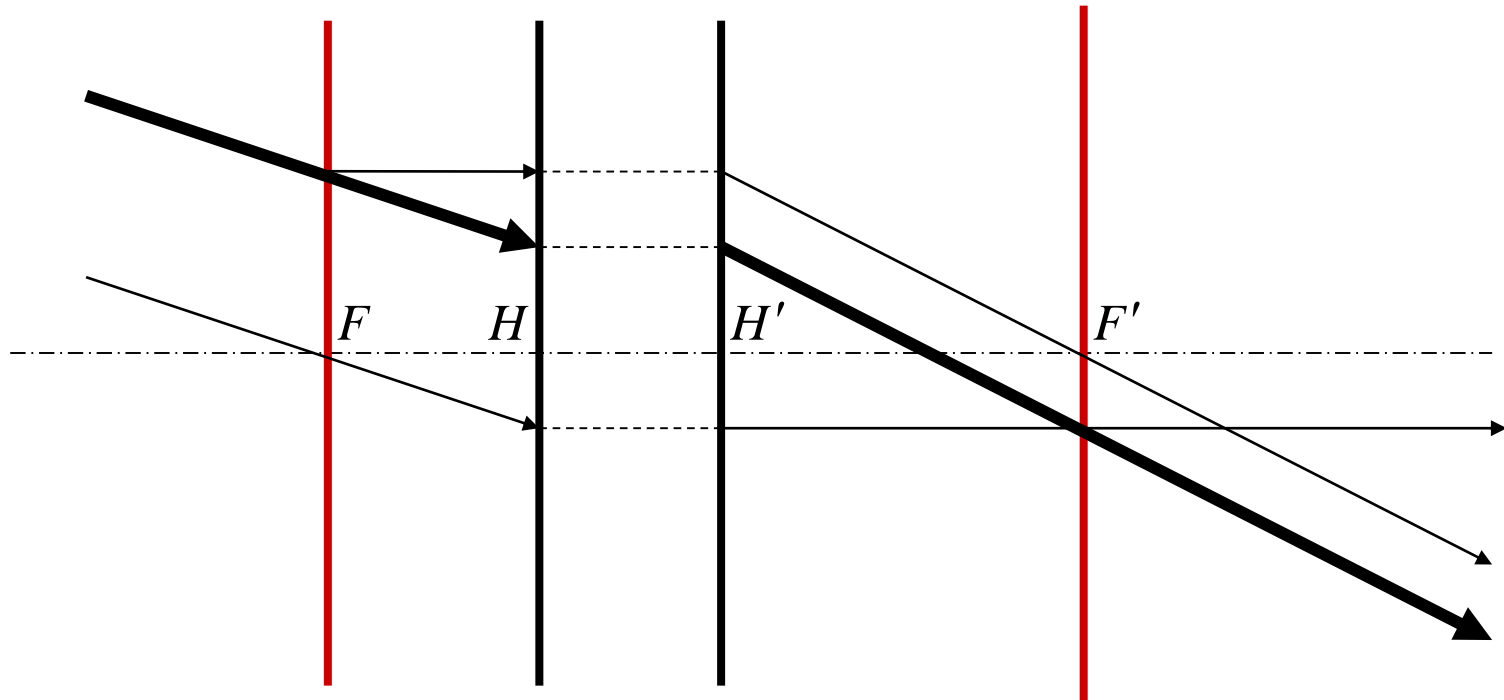
因为 M 与 M' 是一对共轭的物像点；过 M 的光线必通过 M' ；选取过 M 的两条特殊光线 1 和 2 ，对应的共轭光线为 $1'$ 和 $2'$ 。则只要知道光线 1 和 2 ，和对应的共轭光线为 $1'$ 和 $2'$ ，就可以确定主平面。

3. 共轴球面系统的物像关系

- 1. 作图法
- 2. 计算法
- 对已知参数的共轴球面系统，无论用作图法还是计算法，其原理和步骤都与单个薄透镜的成像情况相同。

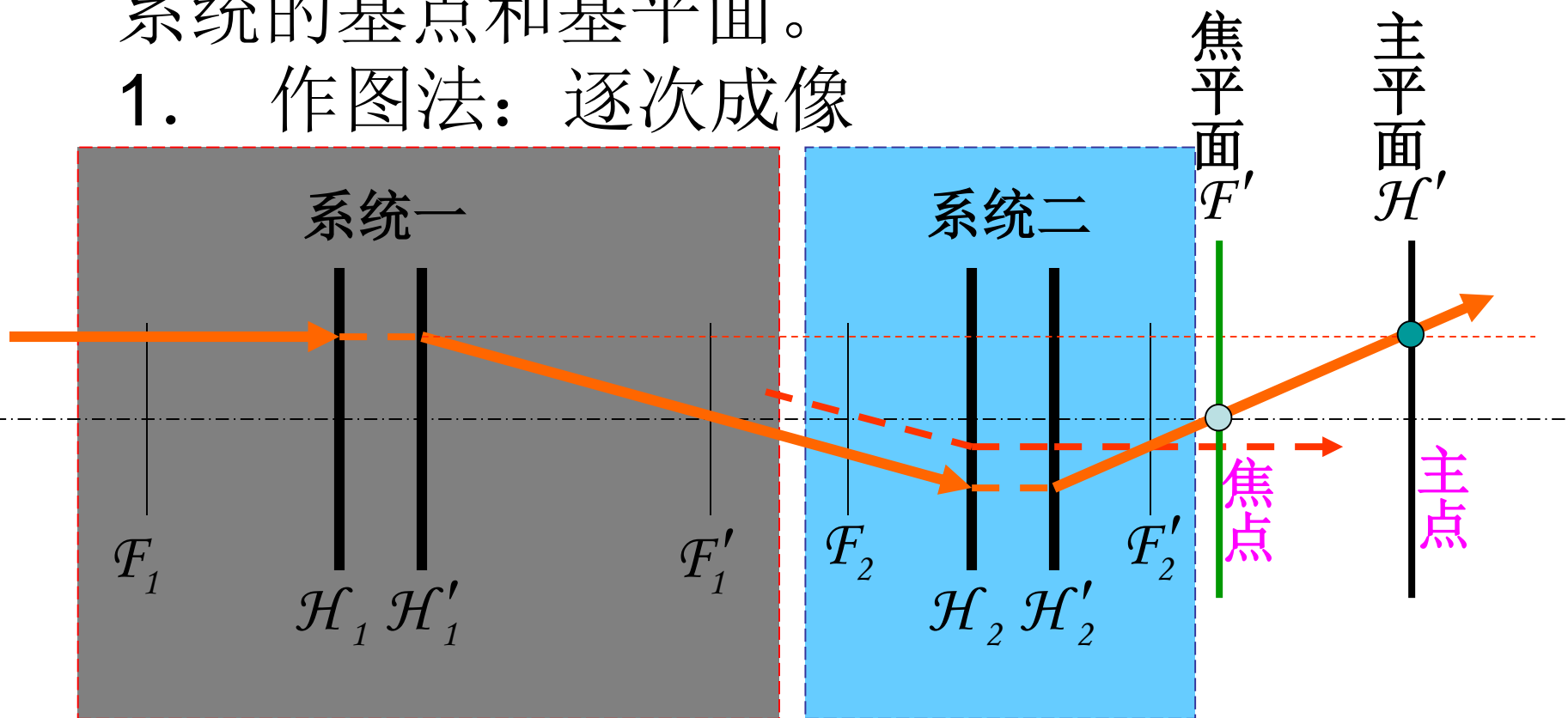


对于任意光线，都可以得到其共轭光线



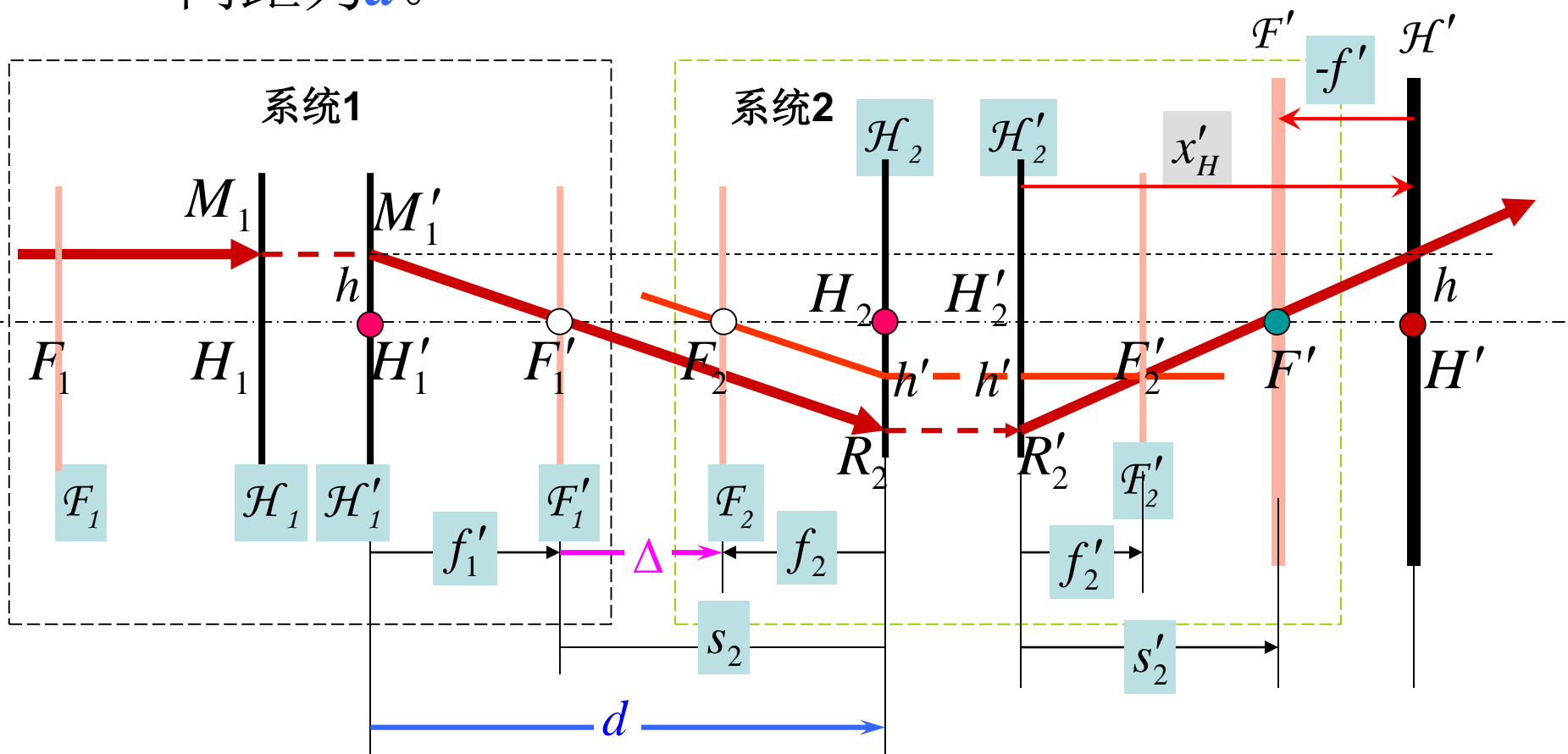
4.基点和基平面的确定

- 由已知每个子系统的基点和基平面求整个系统的基点和基平面。
 - 作图法：逐次成像

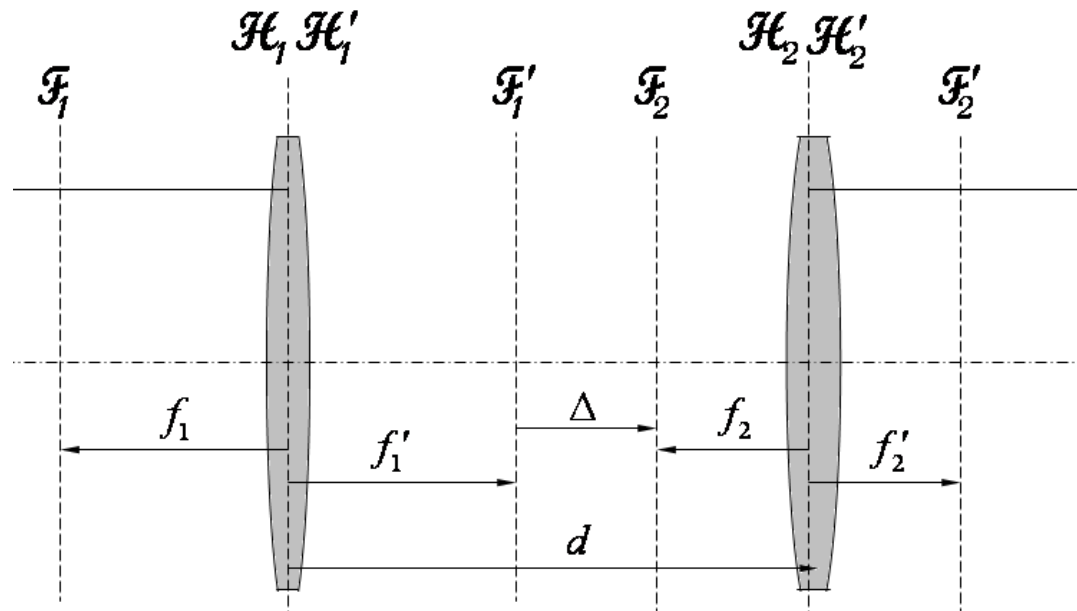


- 2. 计算法

- 记第二系统像方焦点到第一系统物方焦点间距为 Δ ，第二系统像方主点到第一系统物方主点间距为 d 。



透镜组的基点、基平面



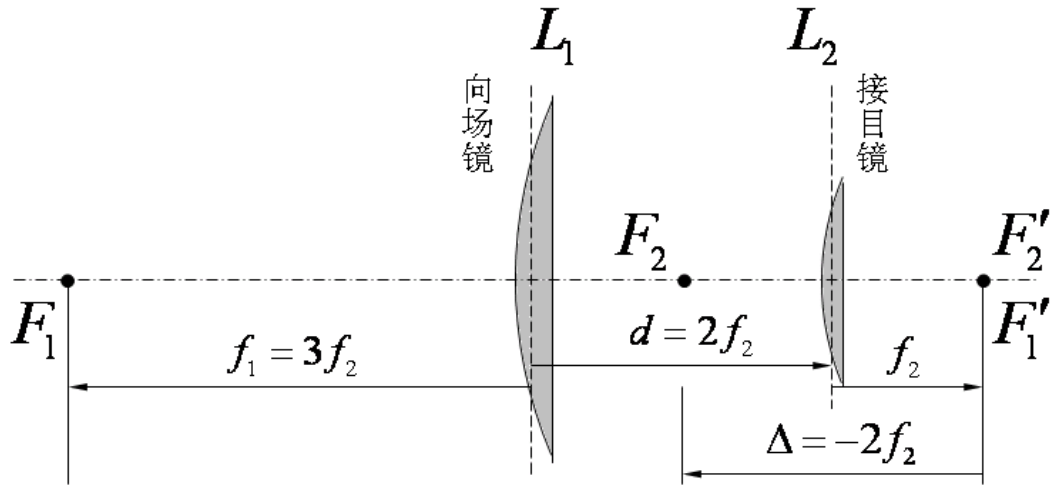
$$x_H = \frac{df_1}{d - f_1 - f_2}$$

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = -\frac{f_1 f_2}{d - f_1 - f_2}$$

$$x'_H = \frac{df_2}{d - f_1 - f_2}$$

$$\Phi = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2$$

惠更斯目镜

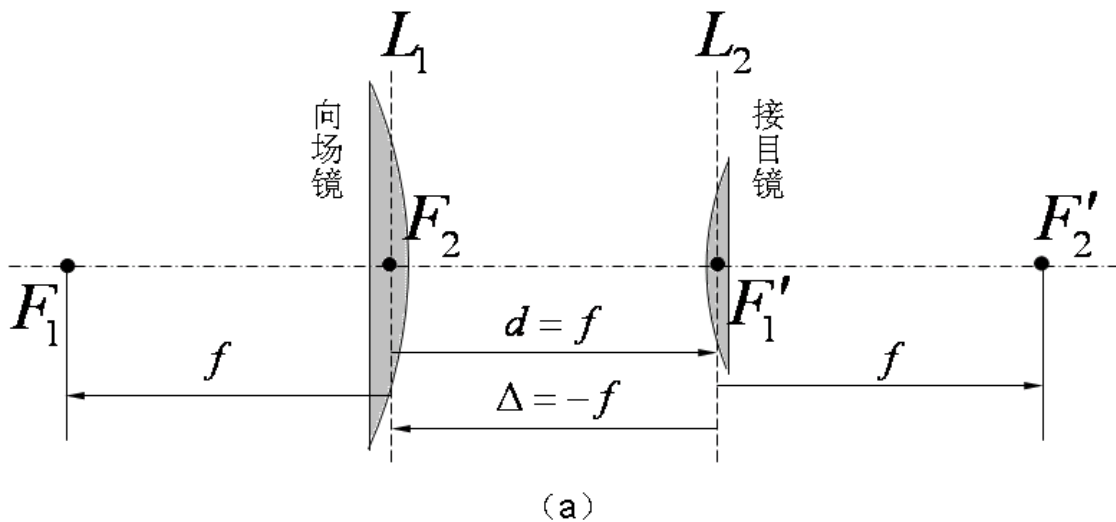


$$x'_H = \frac{df'_2}{\Delta} = -f_2$$

$$x_H = \frac{df_1}{\Delta} = -3f_2$$

$$f = f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = \frac{3}{2} f_2$$

冉斯登目镜

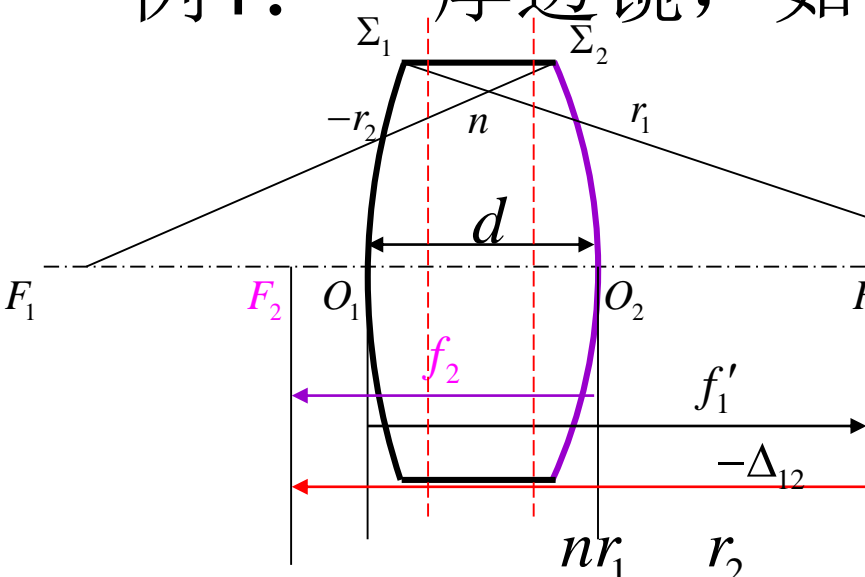


$$x'_H = \frac{df_1}{\Delta} = -f_2$$

$$x_H = \frac{df'_2}{\Delta} = -f_2$$

$$f = f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = f_2$$

- 例1: 一厚透镜, 如图所示, 求其基点



$$f_1 = \frac{r_1}{n-1} \quad f_1' = \frac{nr_1}{n-1}$$

$$f_2' = \frac{r_2}{1-n} \quad f_2 = \frac{nr_2}{1-n}$$

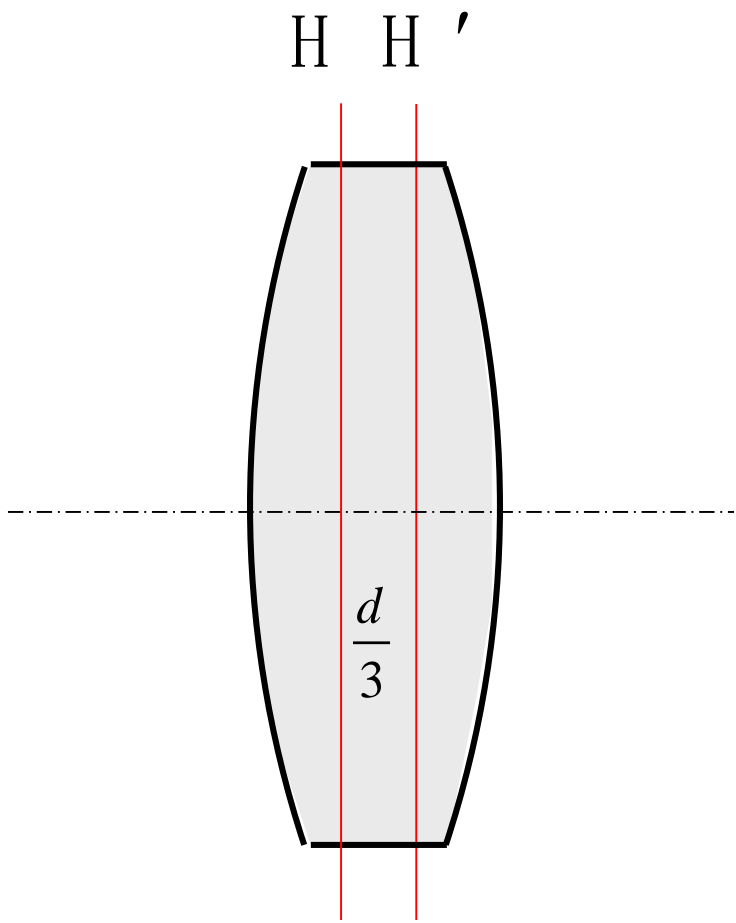
$$\Delta_{12} = d - f_2 - f_1' = d - \frac{n(r_1 - r_2)}{n-1}$$

$$f'_{12} = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta_{12}} = -\frac{n-1}{d - \frac{n(r_1 - r_2)}{n-1}} \frac{1-n}{(n-1)[(n-1)d - n(r_1 - r_2)]} = \frac{nr_1 r_2}{(n-1)[(n-1)d - n(r_1 - r_2)]} = f_{12}$$

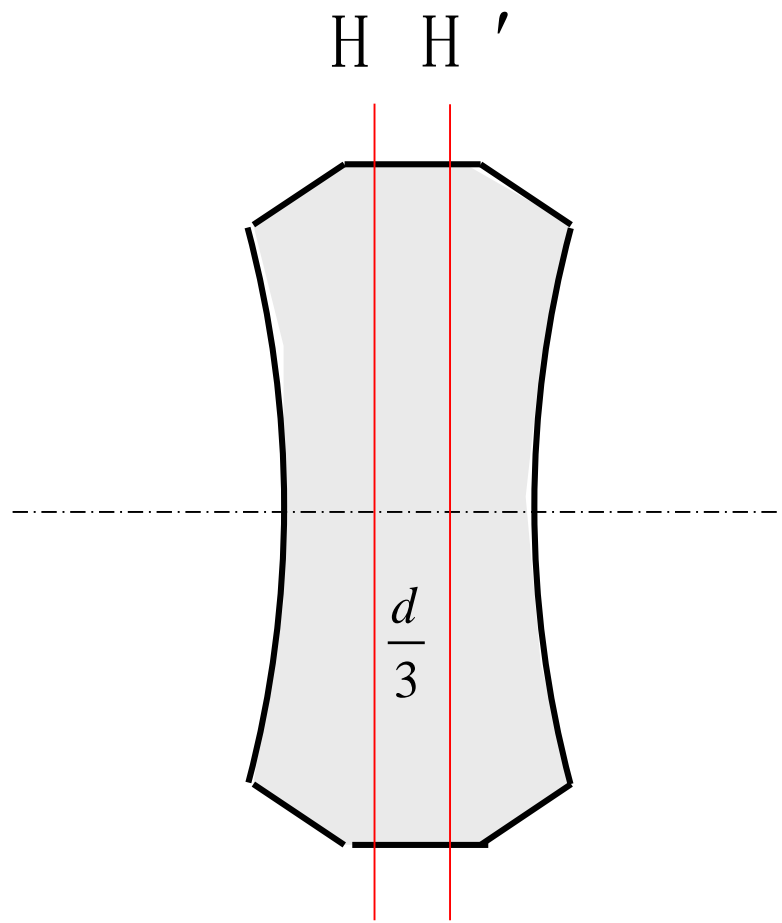
$$x'_{12} = \frac{df_2'}{\Delta_{12}} = \frac{\Delta_{12} + f_1' + f_2}{\Delta_{12}} f_2' = -\frac{dr_2}{d(n-1) - n(r_1 - r_2)}$$

$$x_{12} = \frac{dr_1}{d(n_L - 1) - n_L(r_1 - r_2)}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2$$

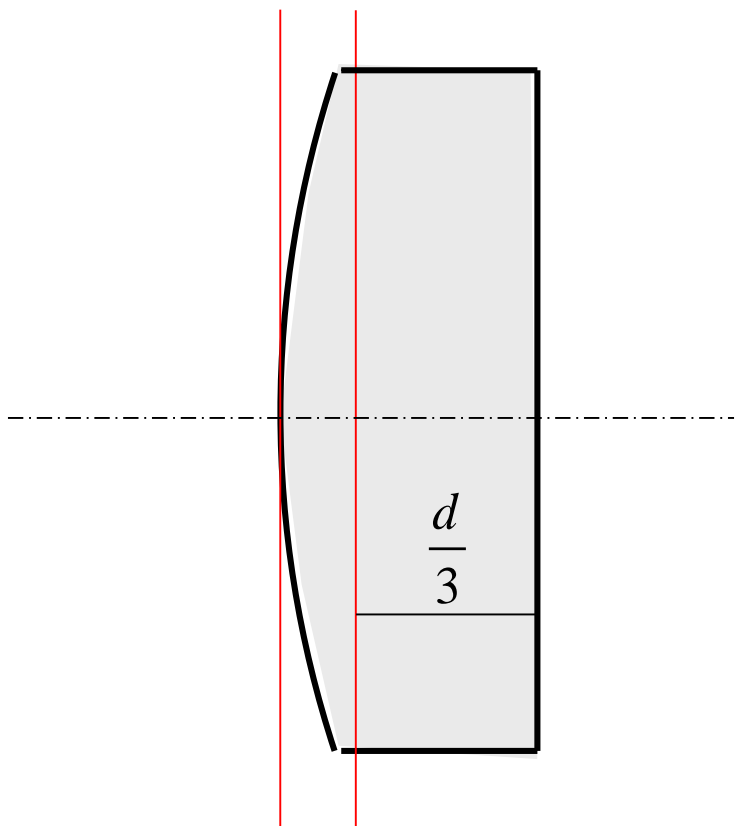


(a) 双凸透镜



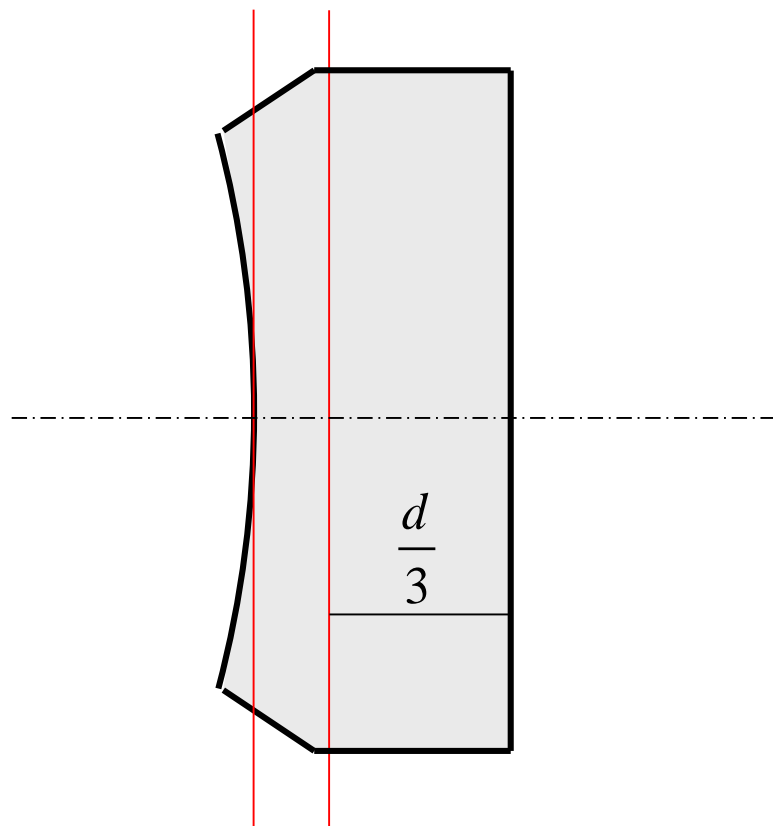
(b) 双凹透镜

H H'



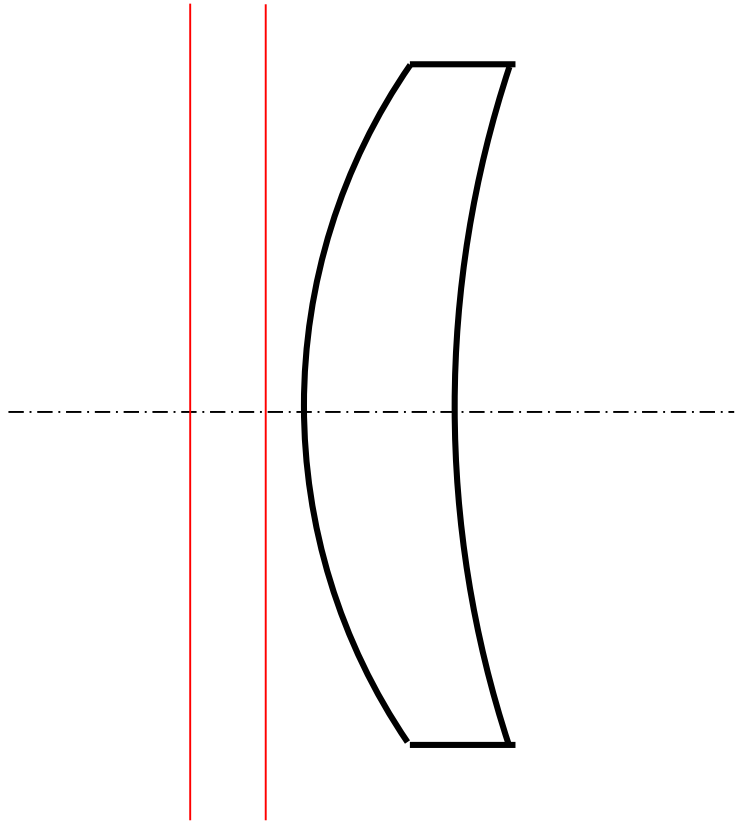
(a) 平凸透镜

H H'



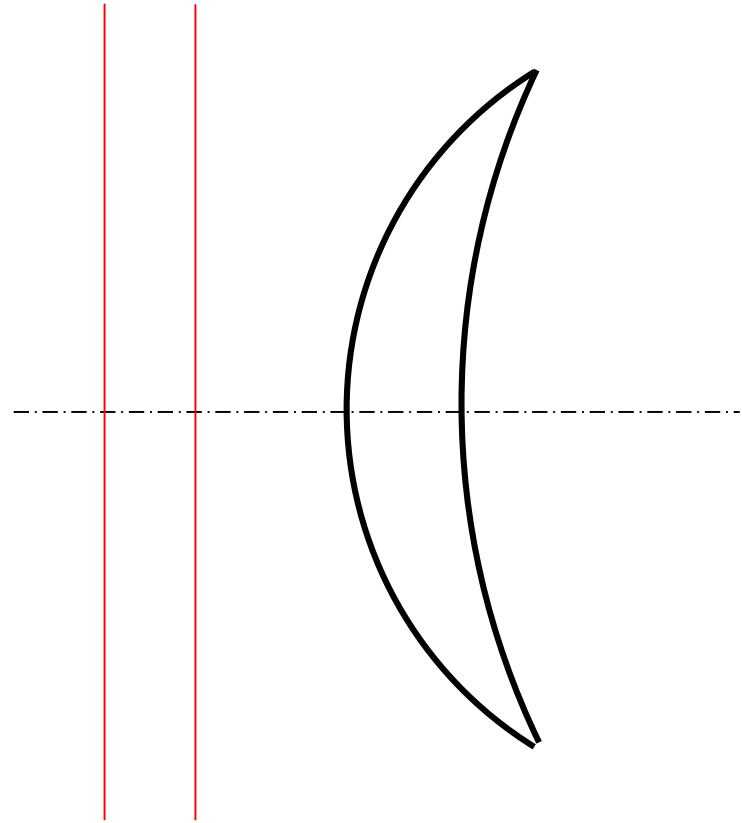
(b) 平凹透镜

H 'H

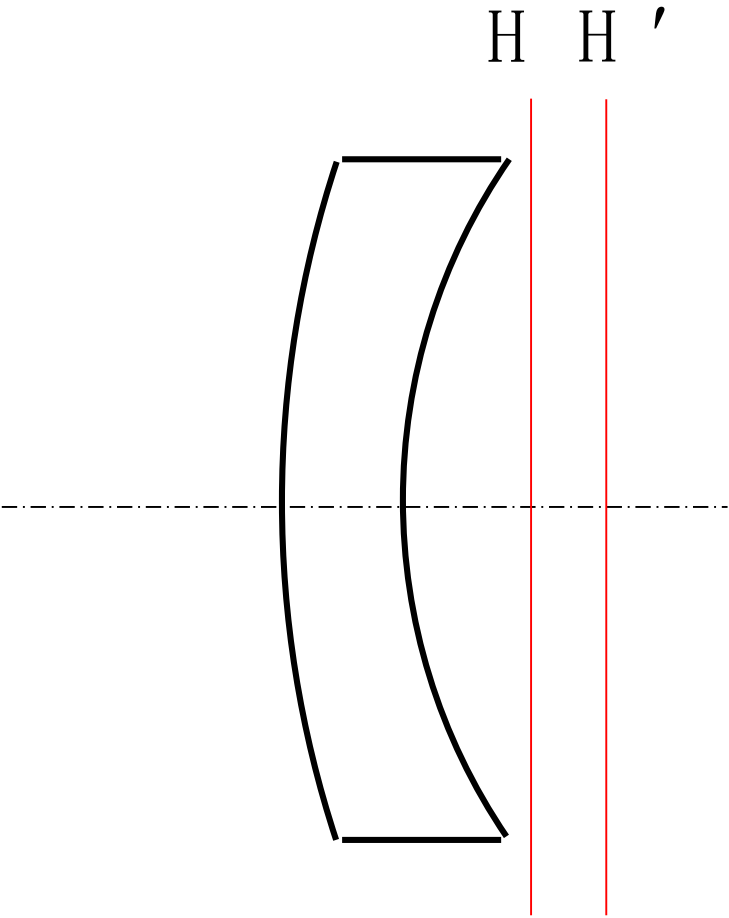


(a) 小曲率弯月正透镜

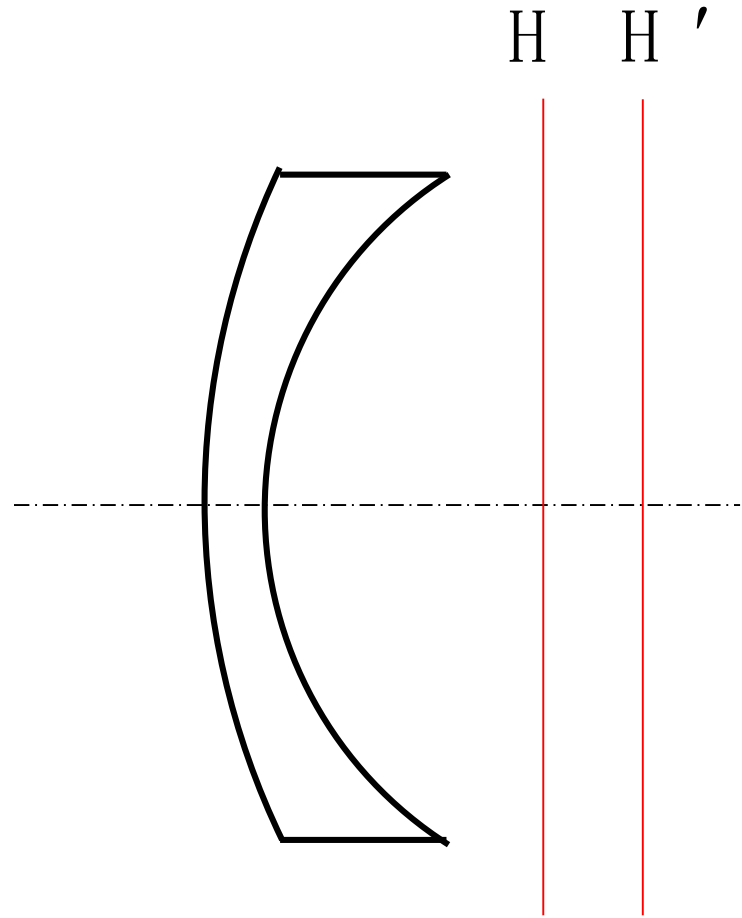
H 'H



(b) 大曲率弯月正透镜



(a) 小曲率弯月负透镜



(b) 大曲率弯月负透镜