1-02 几何光学的近轴理论

1. 成像
2. 共轴球面组傍轴成像

费马（Fermat）原理：两点间光的实际路径，是光程平稳的路径。（1679年）

光程：折射率×光所经过的路程，即nS。一般情况下为折射率的路径积分。$\int_P^Q n\mathrm{d}s$

平稳：极值（极大、极小）或恒定值。在数学上，用变分表示

$$\delta[\int_P^Q n\mathrm{d}s] = 0$$

几何光学定律成立的条件

1． 光学系统的尺度远大于光波的波长。
2． 介质是各向同性的。
3． 光强不是很大。

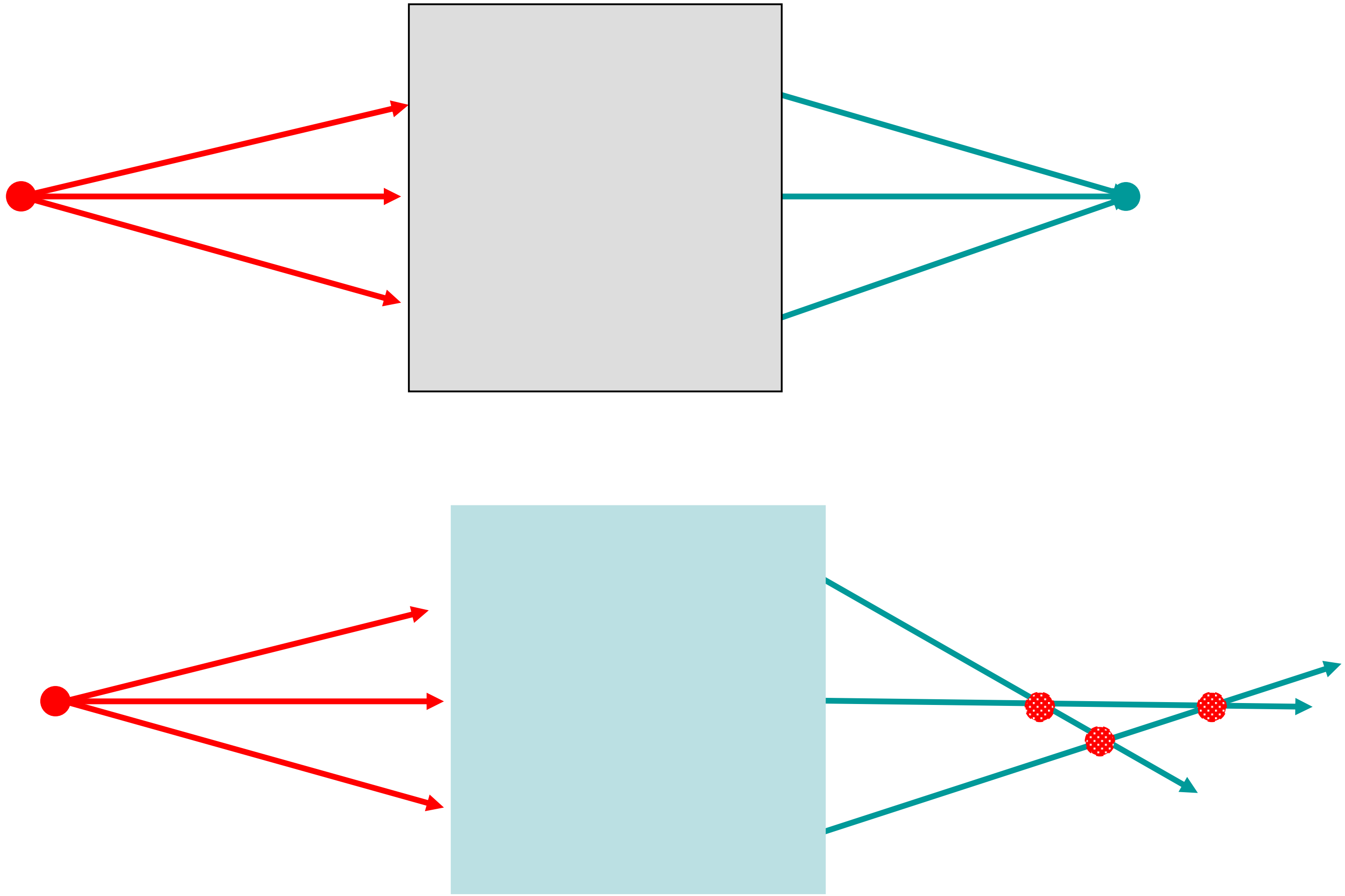
成像

1．同心光束

从同一点发出的或汇聚到同一点的光线束，称为同心光束。

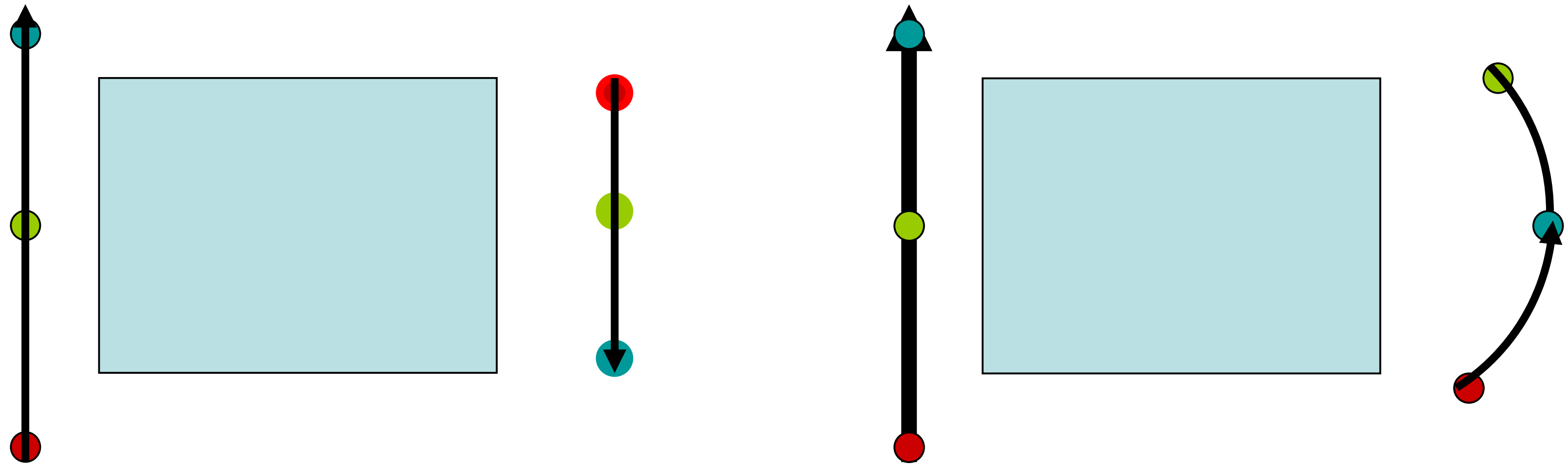
从光线的性质看，物上的每一点都发出同心光束，而像点都由同心光束会聚得到。

（1）使同心光束保持其同心性不变，是成像的一个必要条件



（2）像和物要保持相似性

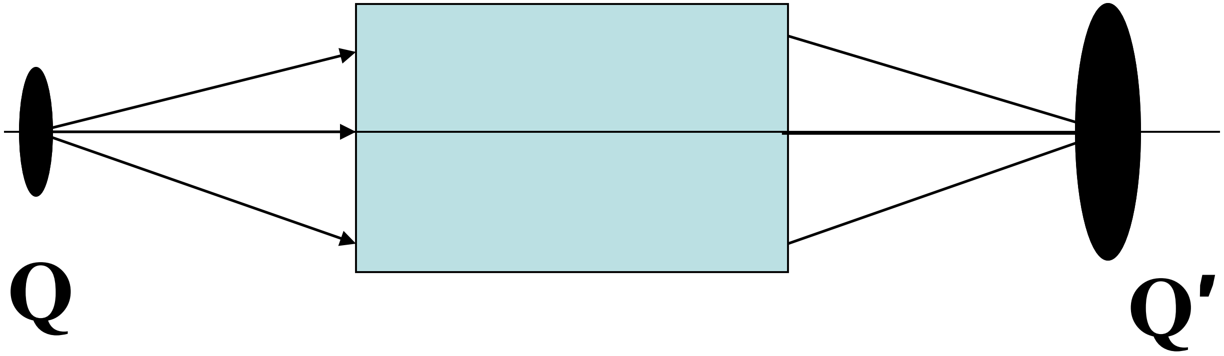
- 物和像上的每一点的空间相对位置，要一一对应



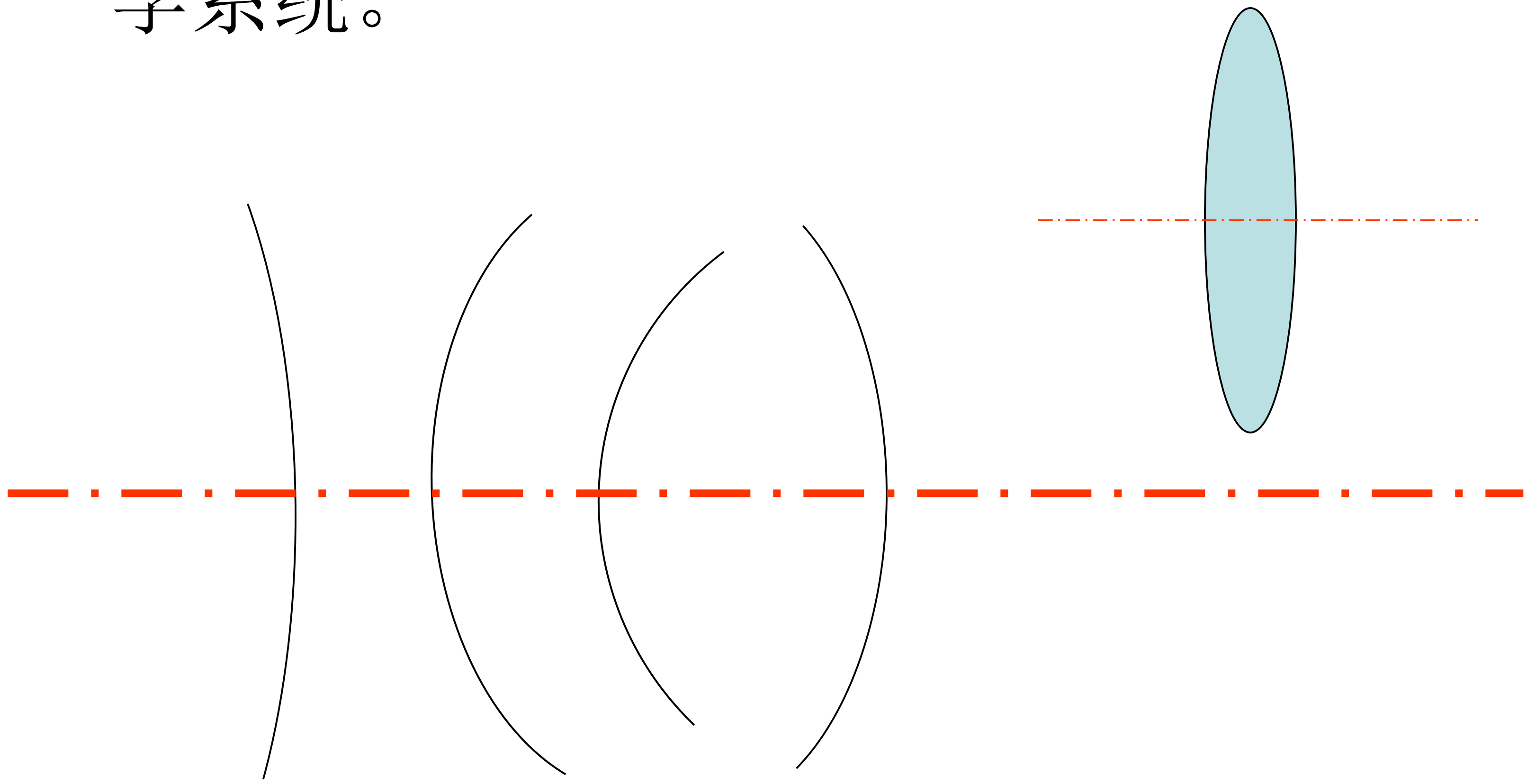
- 物和像都是由一系列的点构成的，物点和像点一一对应。
- 成像的最基本条件是要**满足同心光束的不变性**。
- 从整个物和像的对应关系看，还必须要满足物像间的相似性。
- 空间上，各个点之间的相互位置要一一对应，同时每一对物像点的颜色要一一对应。
- 要求成像的光学系统不产生**畸变**，没有**像差**、**色差**等等。

- 光线如果沿原来反射和折射方向入射时，则相应的反射和折射光将沿原来的入射光的方向。

如果物点Q发出的光线经光学系统后在Q′点成像，则Q′点发出的光线经同一系统后必然会在Q点成像。即物像之间是共轭的。



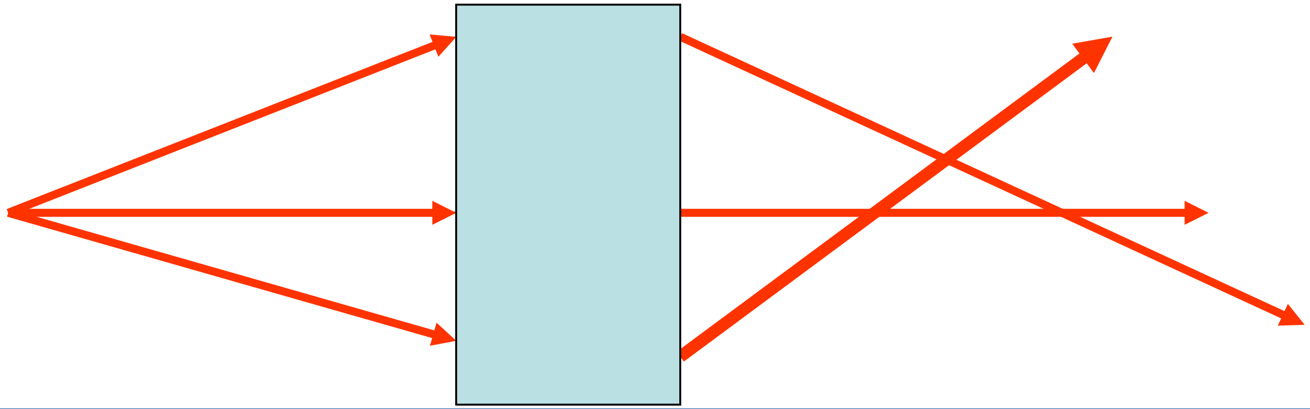
2.光具组：若干反射面或折射面组成的光学系统。

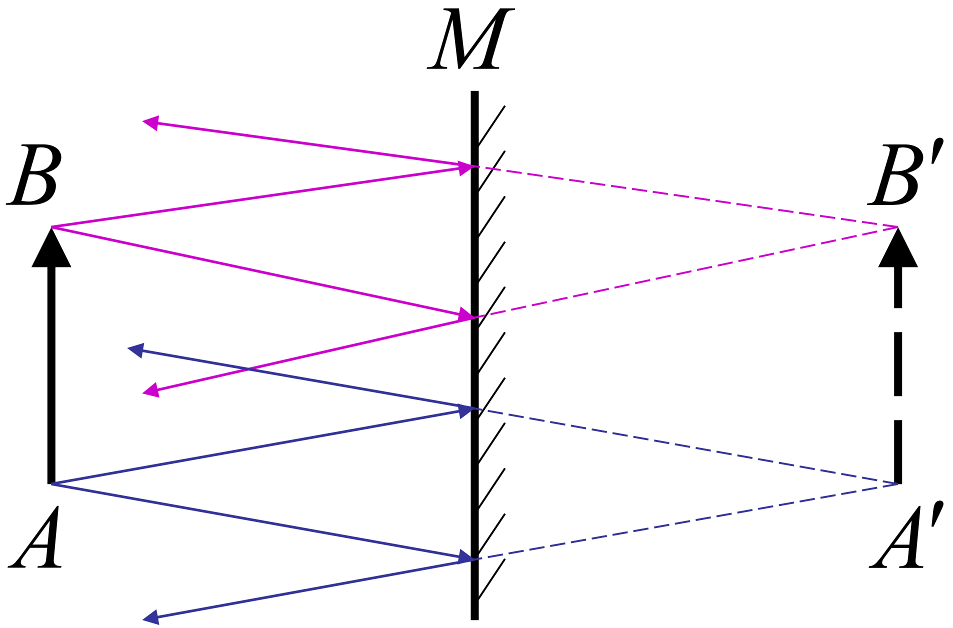


光轴：光具组的对称轴

3. 理想光具组

- 精确成像的必要条件是物上一点与像上一点对应。
- 使同心光束保持其同心性不变的光具组为理想光具组
- 理想光具组是成像的必要条件

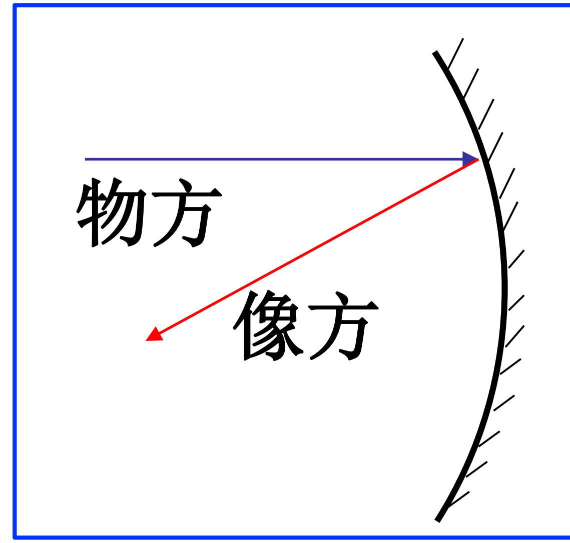


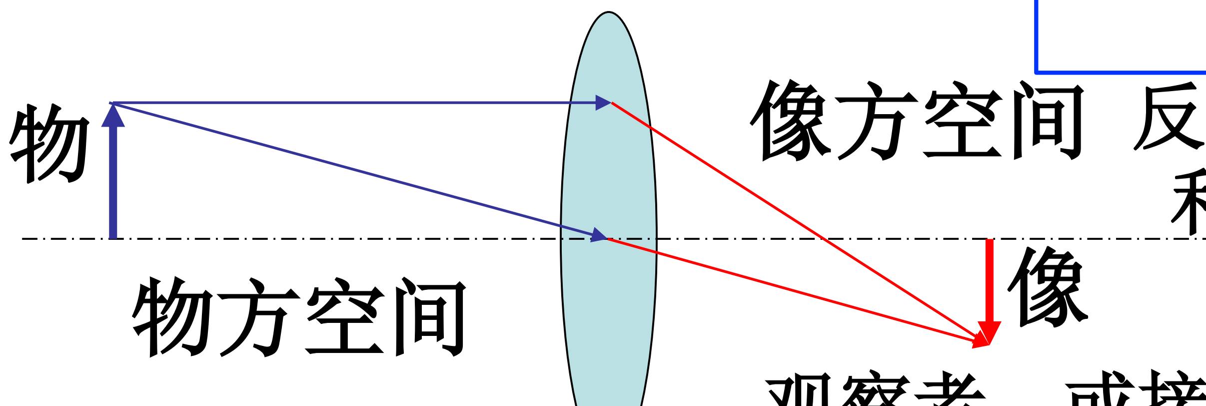


在平面反射的情形下，物与像点点对应，所以平面镜可以**严格成像**

4．物方和像方

- 物点所在的空间为物方空间
- 像点所在的空间为像方空间





反射镜的物方和像方重合

物所在的空间

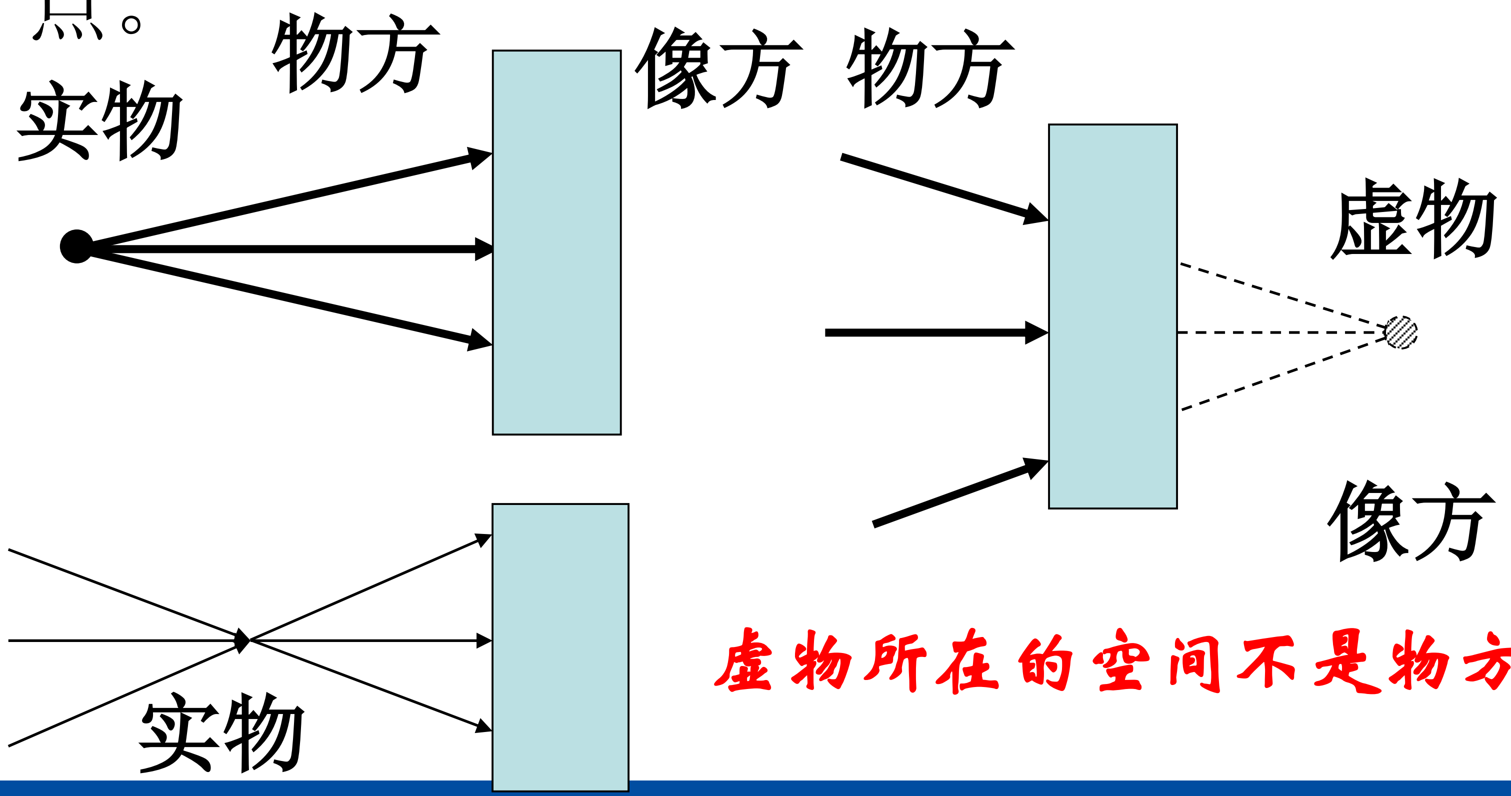
观察者，或接收器所在的空间

物光线经过光具成像，则经过光具的光线所在的空间就是像方

虚像所在的空间不是像方

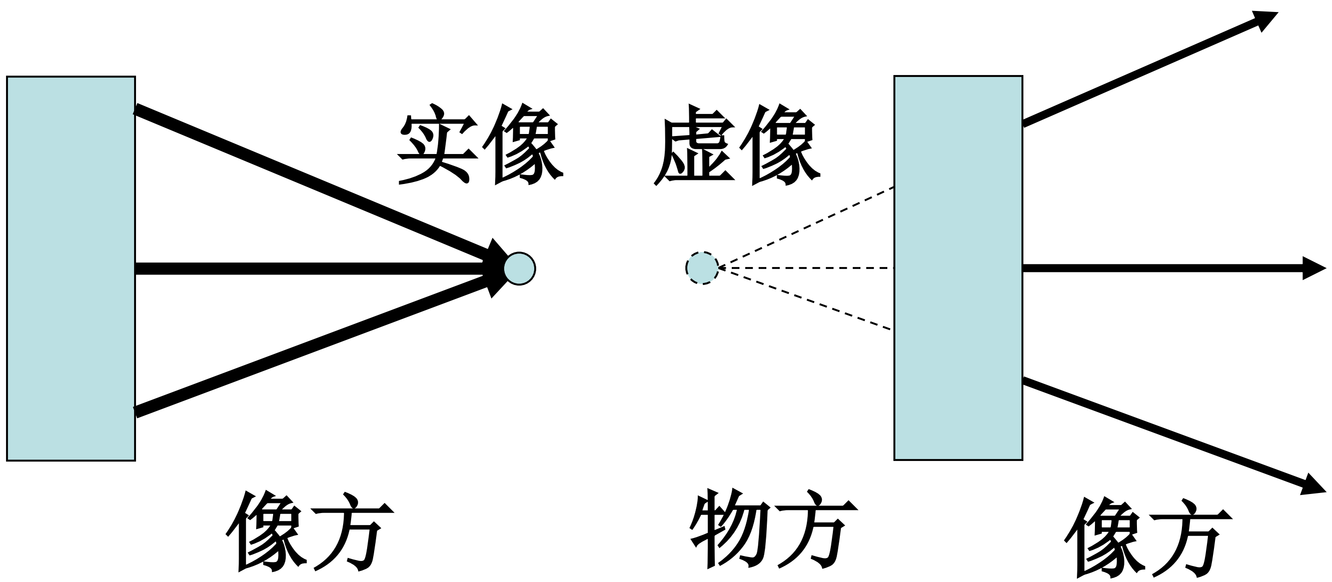
5．实物与虚物，实像与虚像

- 发出同心光束的物点，为实物点；物方同心光束延长后汇聚所成的点，为虚物点。

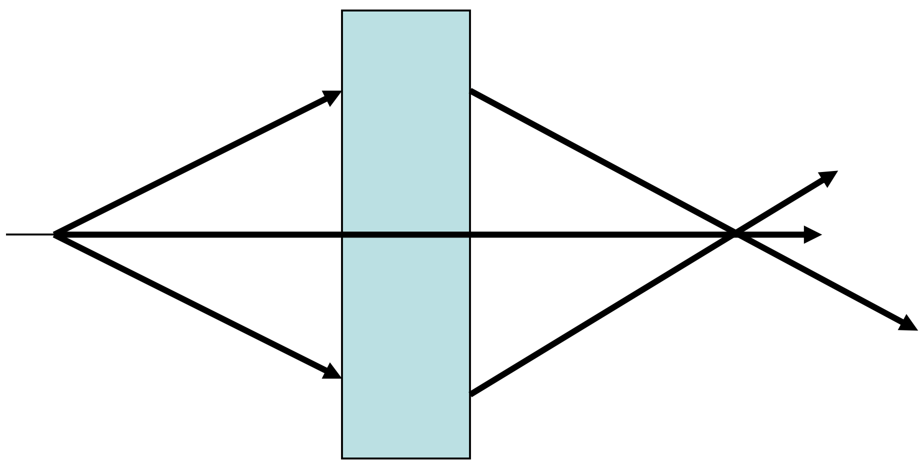


虚物所在的空间不是物方

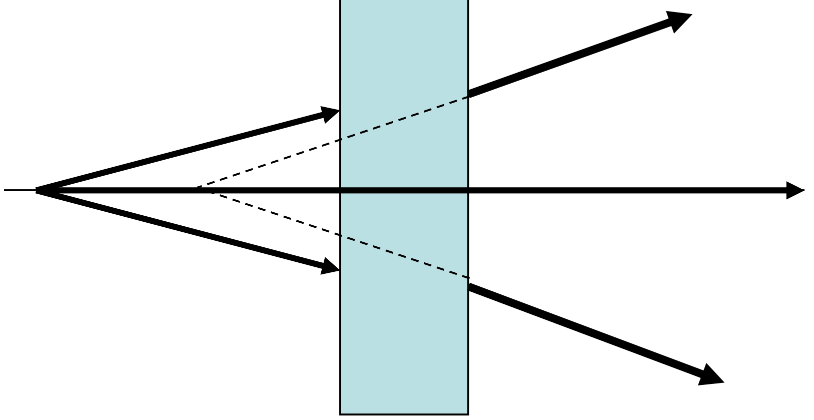
- 经过光具组后的同心光束，汇聚在像方形成的点，为实像点；像方发散的同心光束反向延长后汇聚的点，为虚像点。

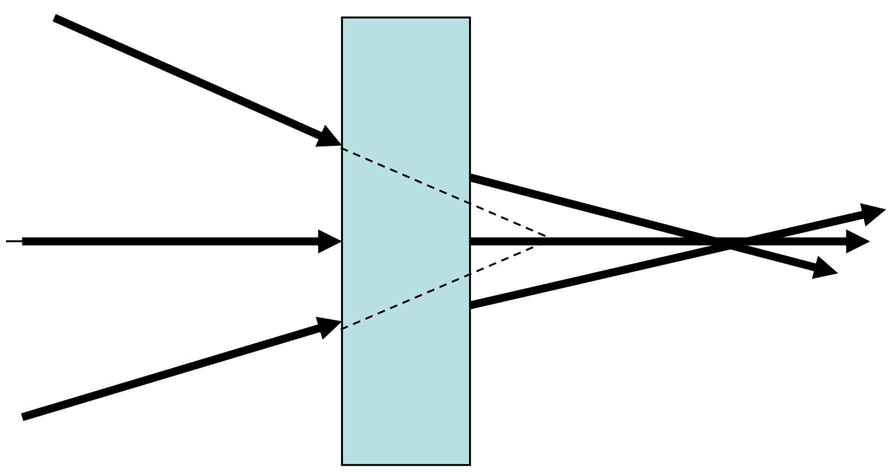


实物成实像

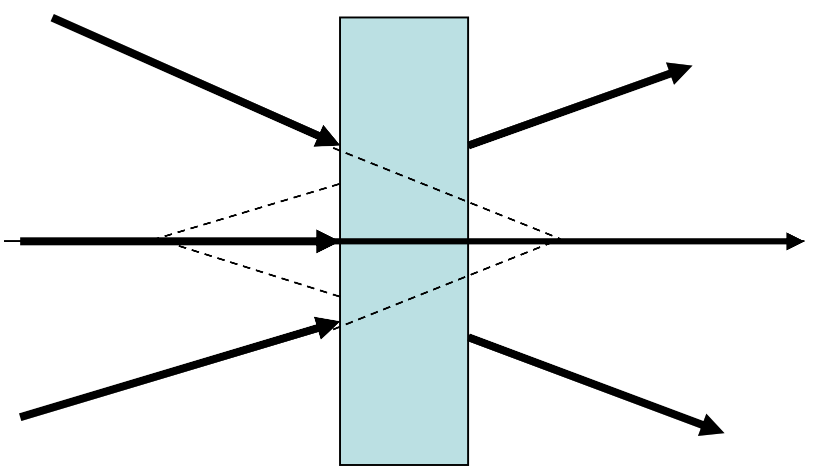


实物成虚像





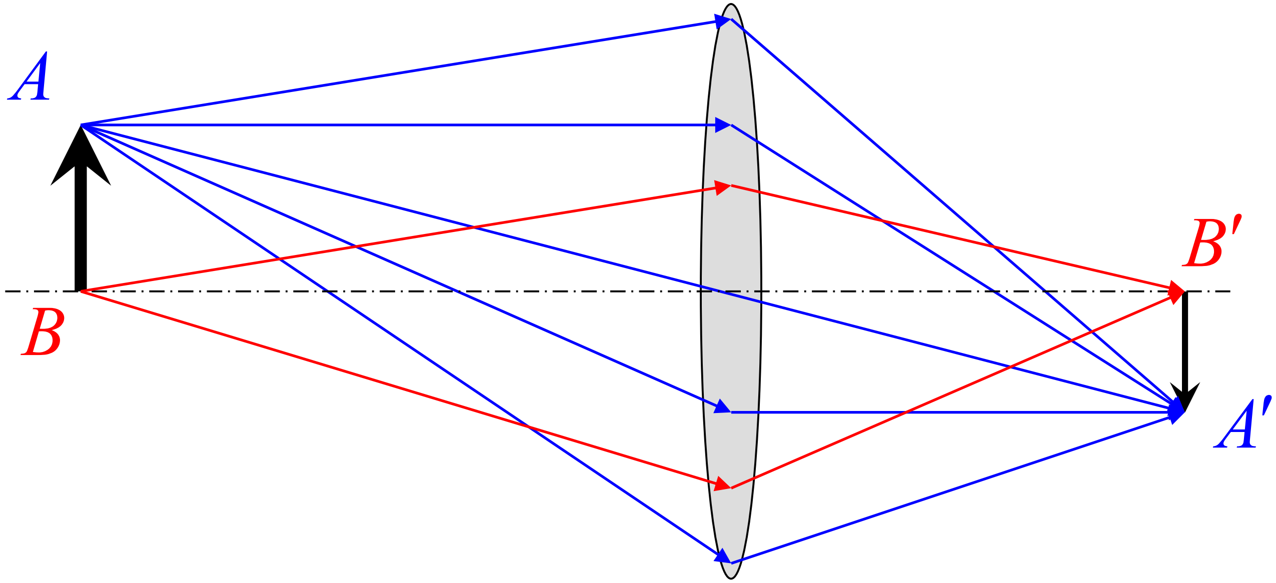
虚物成实像



虚物成虚像

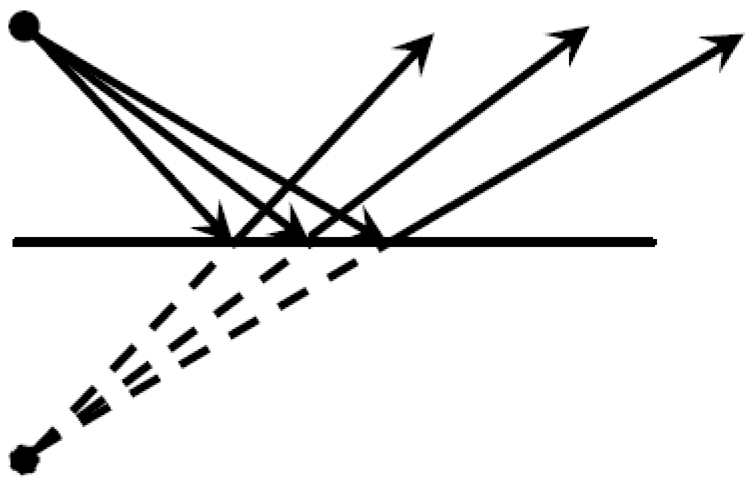
- 物像之间的等光程性

  物点A与像点A′之间的光程总是平稳的，即不管光线经何路径，凡是由A通过同样的光学系统到达A′的光线，都是等光程的。



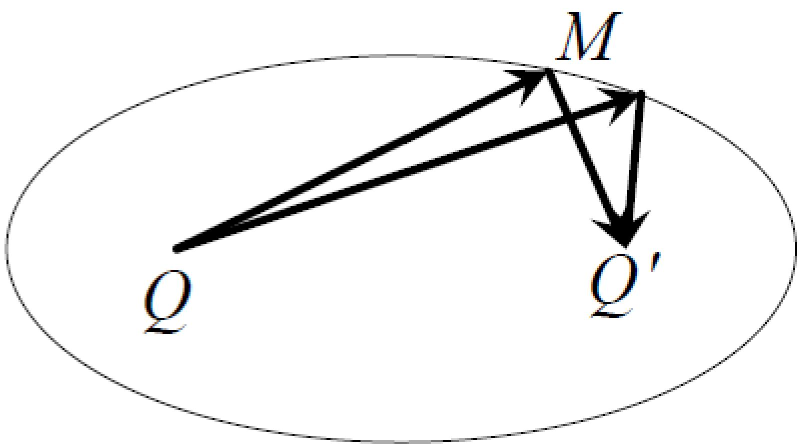
严格成像：同心光束经光具组变换后，若能严格保持同心性，就称为严格成像。

理想光具组：能使任意点严格成像的光具组称为理想光具组。真正的理想光具组只有平面反射镜。

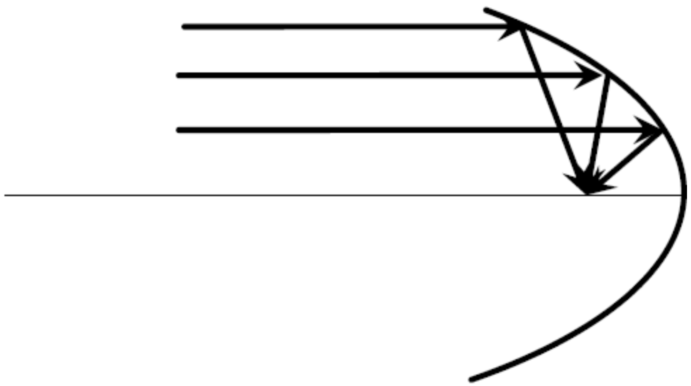


等光程面：若某一曲面的反射或折射能使从某一点发出的光线到达另一点时具有相等的光程，则该曲面称为该两点间的等光程面。只有等光程的反射、折射才能保证严格成像。

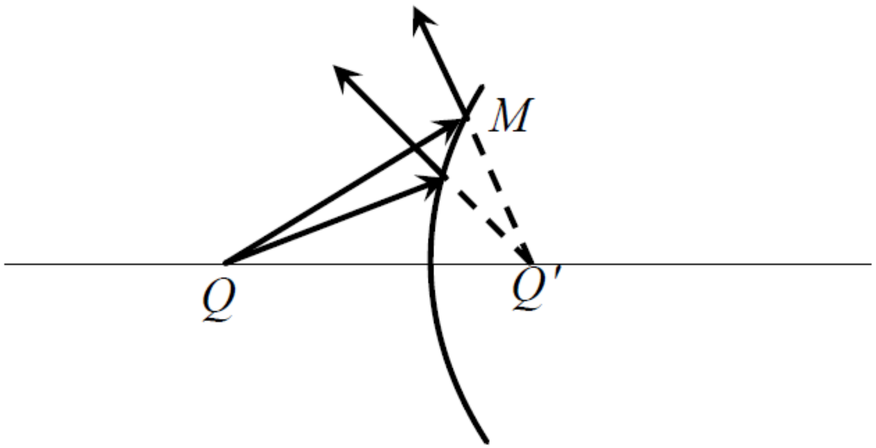
反射等光程面：旋转椭球面 $QM + MQ' = const$（实像）



旋转抛物面：

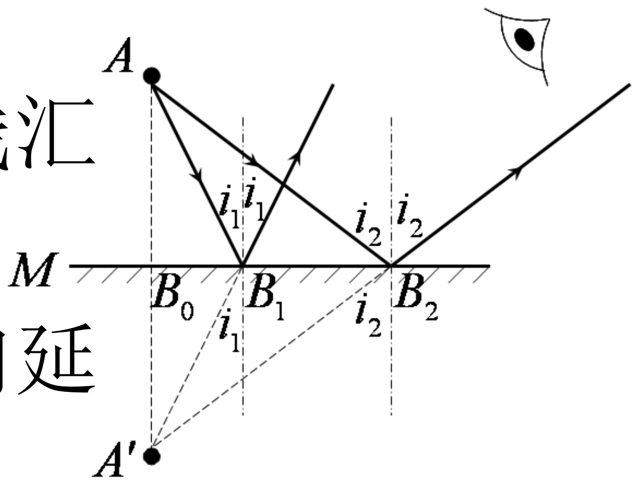


旋转双曲面： $QM - MQ' = const$.（虚像）



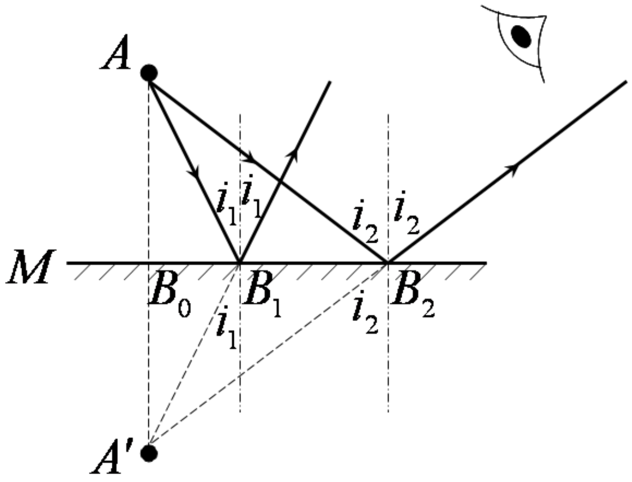
“虚光线”与“虚像”

- 光线并没有进入平面的下方
- 所以，像点并不是真实光线汇聚而成的
- 而是视觉上将反射光线反向延长后汇聚形成的
- 因而，反射光线的反向延长线就是“**虚光线**”，这样形成的像就是“**虚像**”。



虚光程

- 按照费马原理，物像之间应该是等光程的



$$n\overline{AB_1}+n'\overline{B_1A'}=n\overline{AB_2}+n'\overline{B_2A'}$$

上式对任意方向光线成立的条件为等式的值为0

$$n\overline{AB_1}=-n'\overline{B_1A'}$$

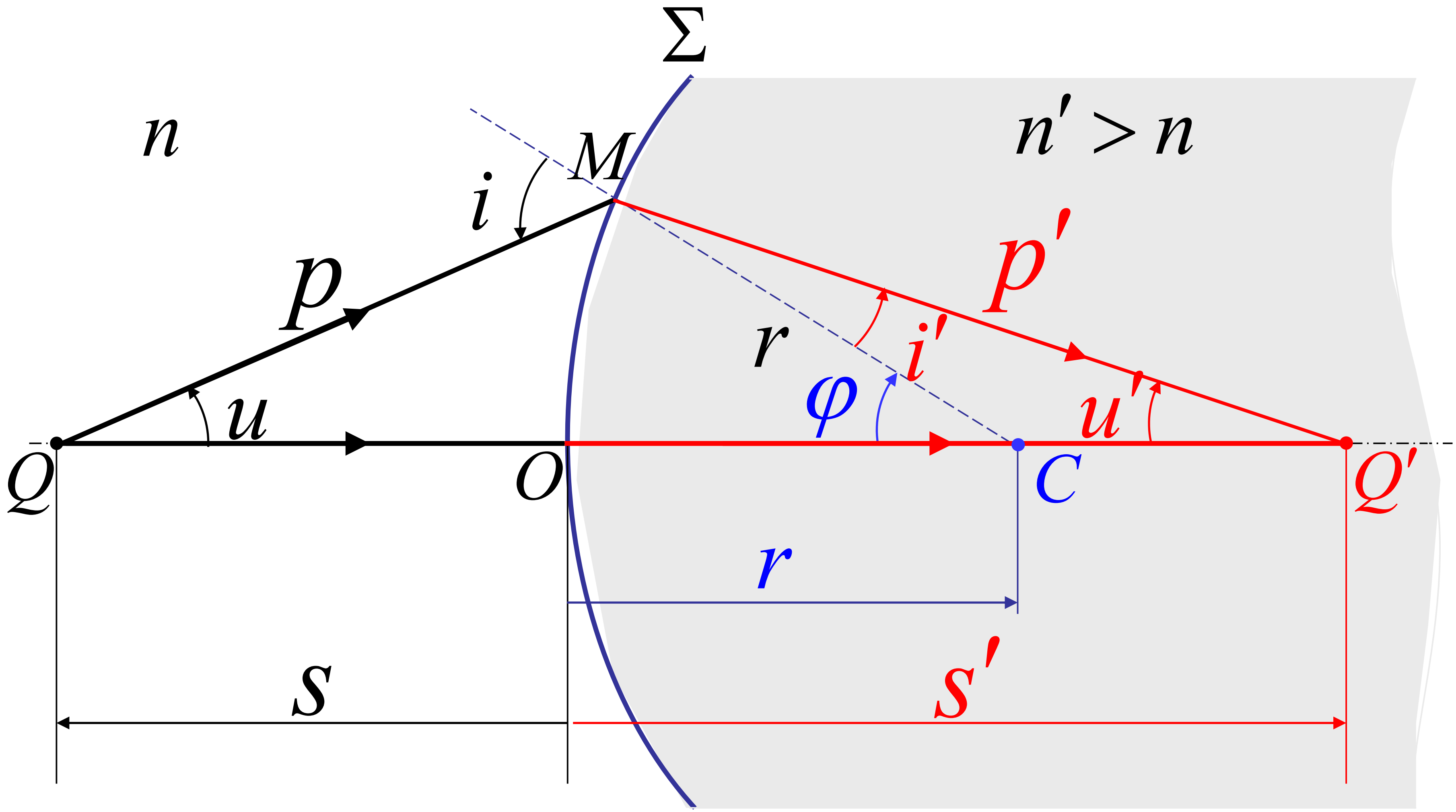
$$n\overline{AB_2}=-n'\overline{B_2A'}$$

则虚像所在的空间，即平面下方的折射率为

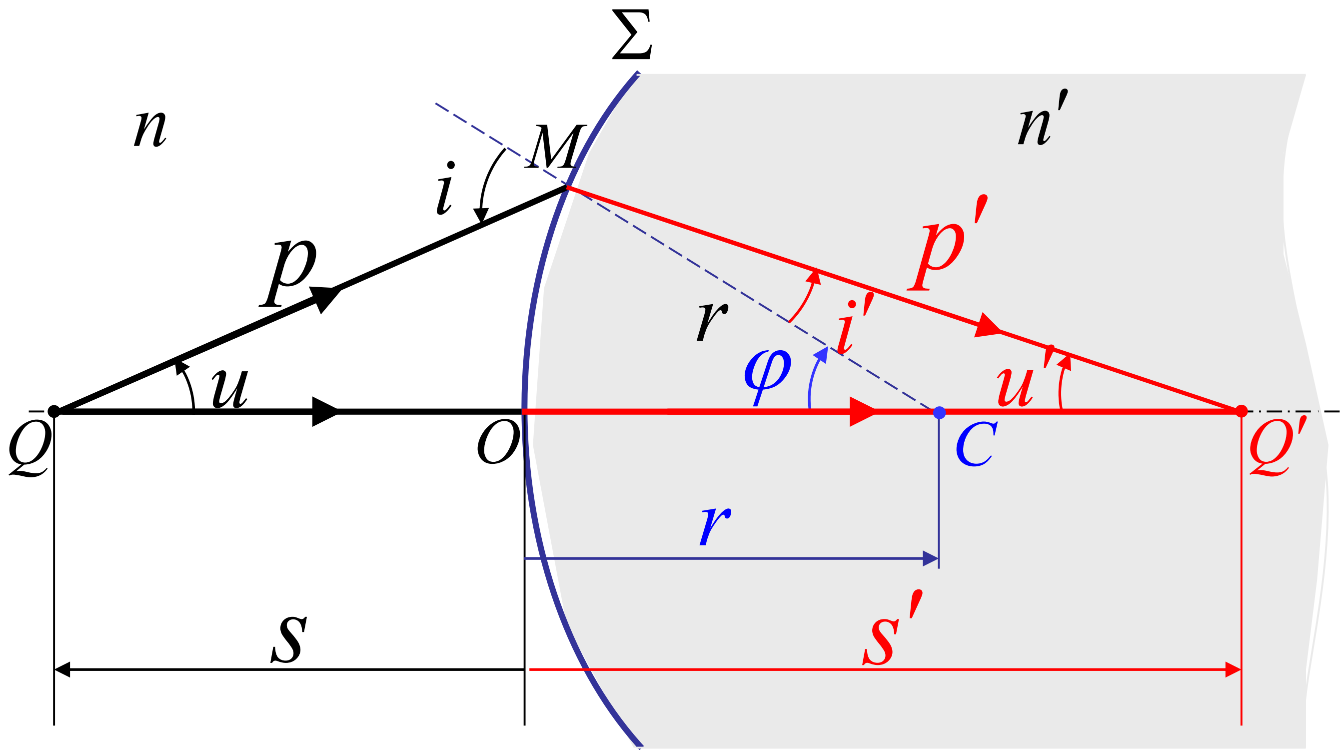
$$n'=-n$$

虚光线的光程称作虚光程

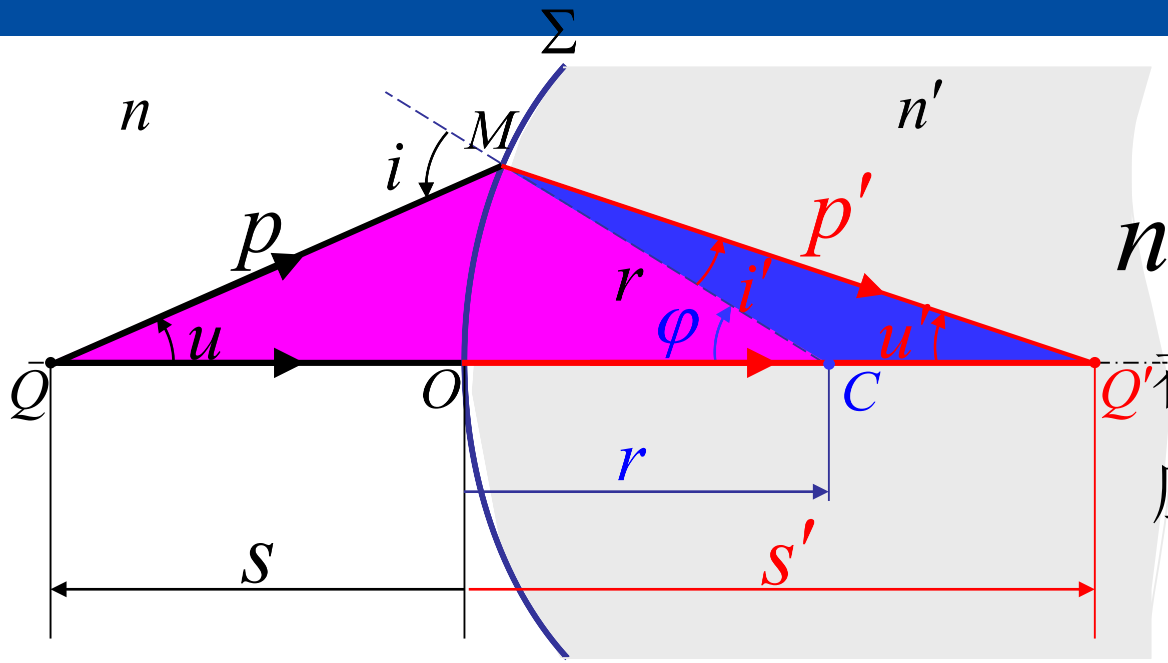
近轴光在单球面上的成像



1.轴上物点成像



- 从Q点发出的光线QM折射后变为MQ'
- MQ'与沿光轴的光线$QO\ Q'$相交成像



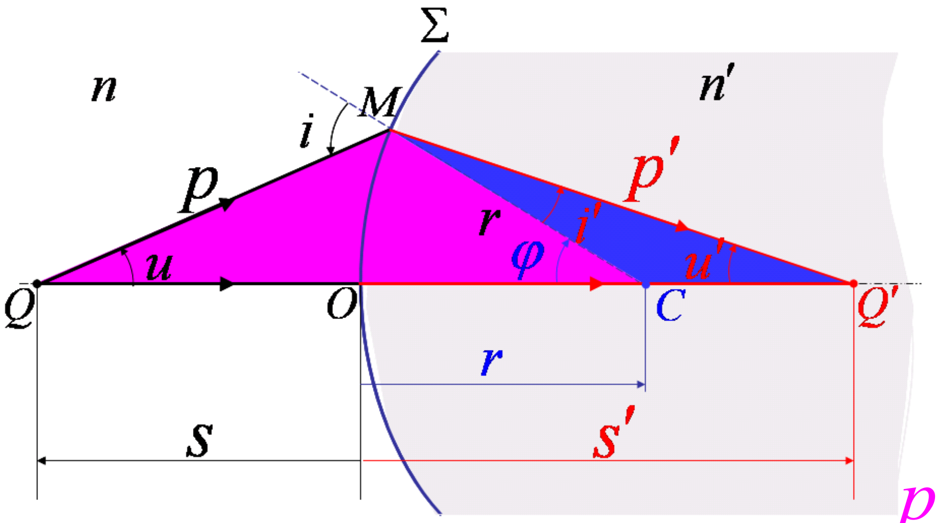
$$n\sin i = n'\sin i'$$

在ΔQMC和$\Delta Q'MC$中，应用正弦定理

$$\frac{p}{\sin\varphi} = \frac{s+r}{\sin i} \qquad \frac{p'}{\sin\varphi} = \frac{s'-r}{\sin i'}$$

$$\frac{p}{n(s+r)} = \frac{\sin\varphi}{n\sin i} = \frac{\sin\varphi}{n'\sin i'} = \frac{p'}{n'(s'-r)}$$

$$\frac{p}{n(s+r)} = \frac{p'}{n'(s'-r)}$$



在$\triangle QMC$和$\triangle Q'MC$

中分别应用余弦公式

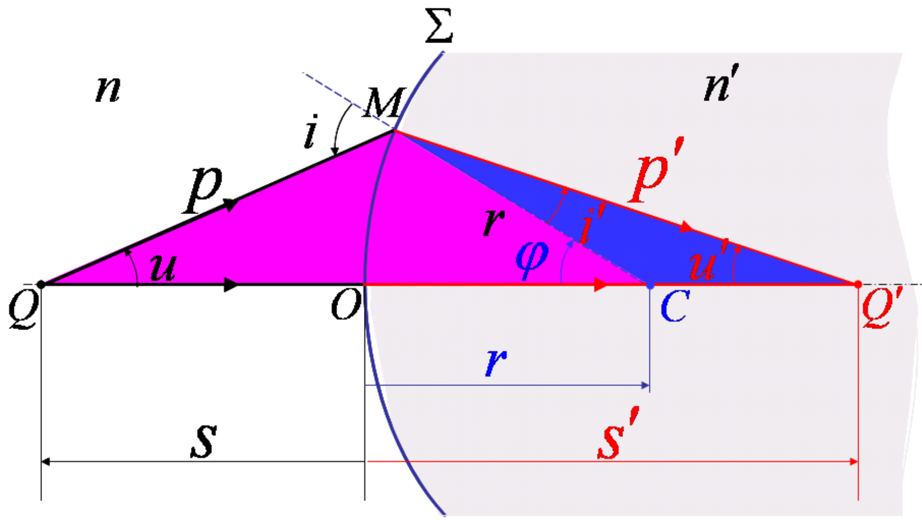
$$p^2=(s+r)^2+r^2-2r(s+r)\cos\varphi$$

$$p'^2=(s'-r)^2+r^2+2r(s'-r)\cos\varphi$$

$$p^2=s^2+2rs+r^2+r^2-2r(s+r)\cos\varphi=s^2+2r(s+r)-2r(s+r)\cos\varphi$$

$$=s^2+2r(s+r)(1-\cos\varphi)\quad =s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$p^2=s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}\qquad p'^2=s'^2-4r(s'-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$



$$\frac{p}{n(s+r)}=\frac{p'}{n'(s'-r)}$$

$$p^2=s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$p'^2=s'^2-4r(s'-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{n^2(s+r)^2}=\frac{s'^2-4r(s'-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{n'^2(s'-r)^2}$$

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\left[\frac{r}{n^2(s+r)}+\frac{r}{n'^2(s'-r)}\right]$$

φ不同，s'不同，即从Q点发出的同心光束不能保持同心性

- 欲使折射光线保持同心性，必须
- (1) $r=\infty \quad n^2=n'^2$

$n=n'$ 没有意义 只有 $n=-n'$ 这就是**平面镜**

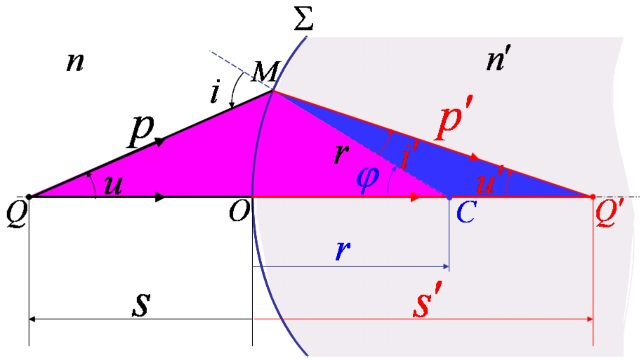
- 或者(2) $$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=0$$

$$\frac{r}{n^2(s+r)}-\frac{r}{n'^2(s'-r)}=0$$

→齐明点。(P57 习题13，作业)

- 或者(3)满足近轴（傍轴）条件

$\varphi \approx 0$ $\sin^2 \dfrac{\varphi}{2} \approx 0$



$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2} - \frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2} = -4\sin^2\frac{\varphi}{2}\left[\frac{r}{n^2(s+r)} + \frac{r}{n'^2(s'-r)}\right]$$

$$\frac{n(s+r)}{s} = \pm\frac{n'(s'-r)}{s'}$$

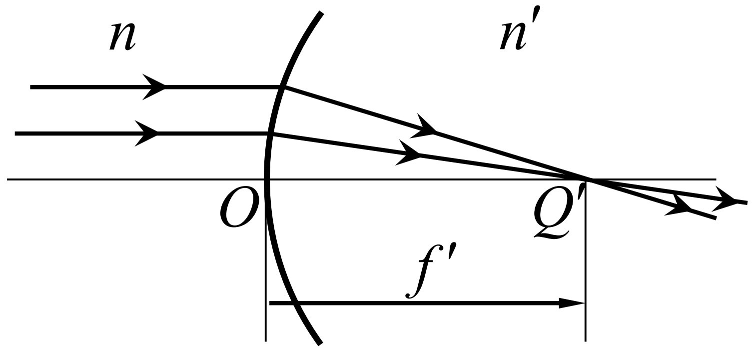
取+

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$$

$$\Phi = \frac{n'-n}{r}$$

折射球面的光焦度

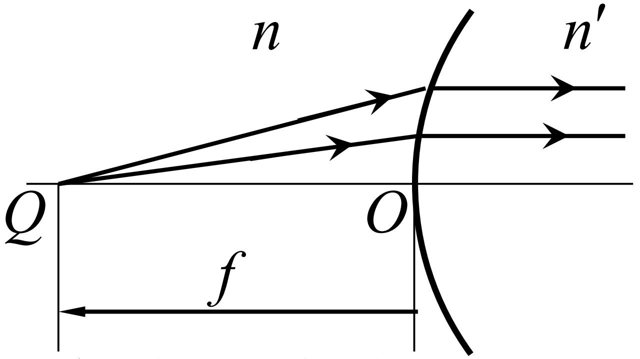
平行光入射 $s=\infty$



$$s'=\frac{n'r}{n'-n}=f'=\frac{n'}{\Phi}$$

像方焦距，像点Q'所在位置为像方焦点

折射光为平行光 $s'=\infty$

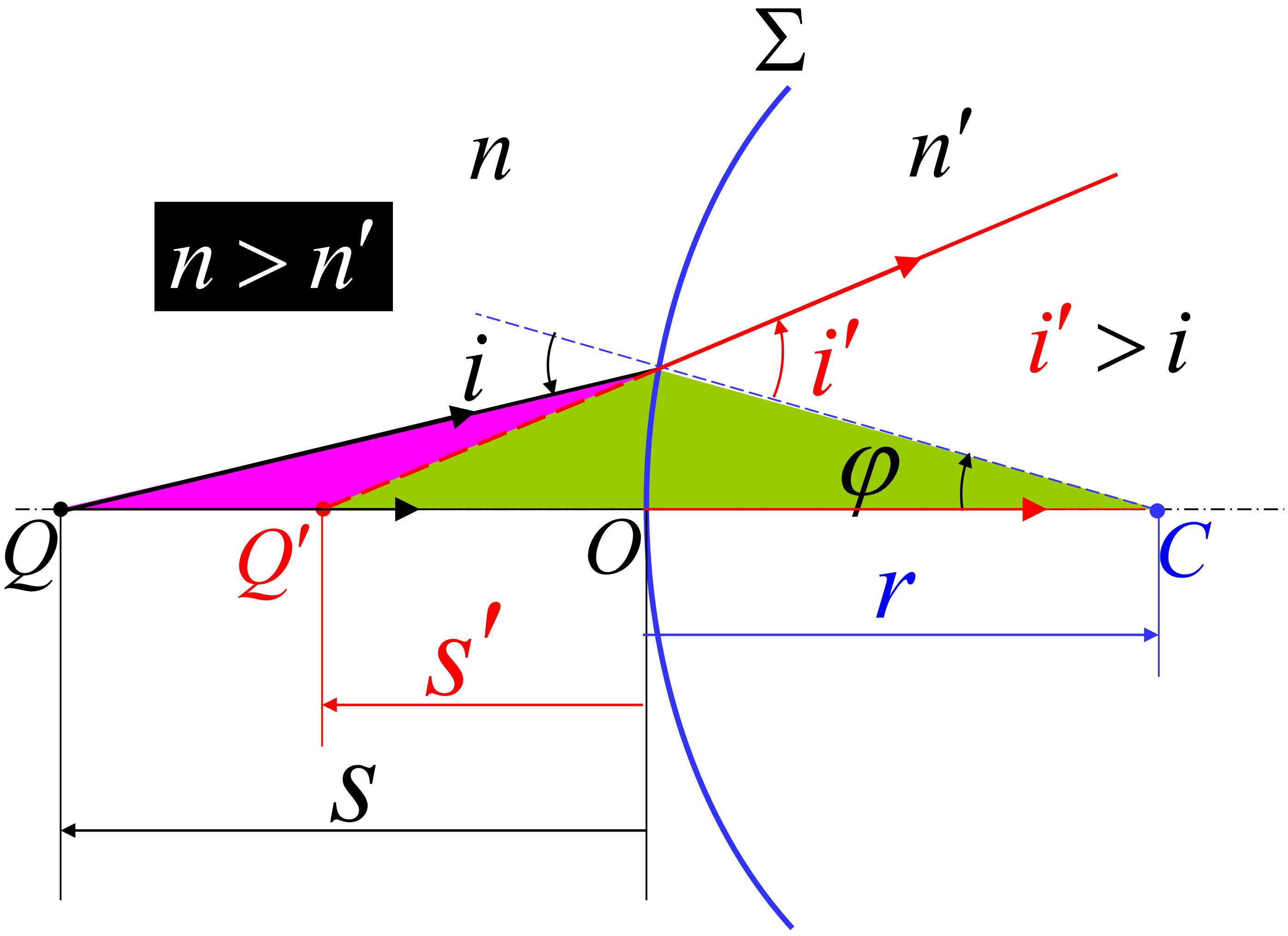


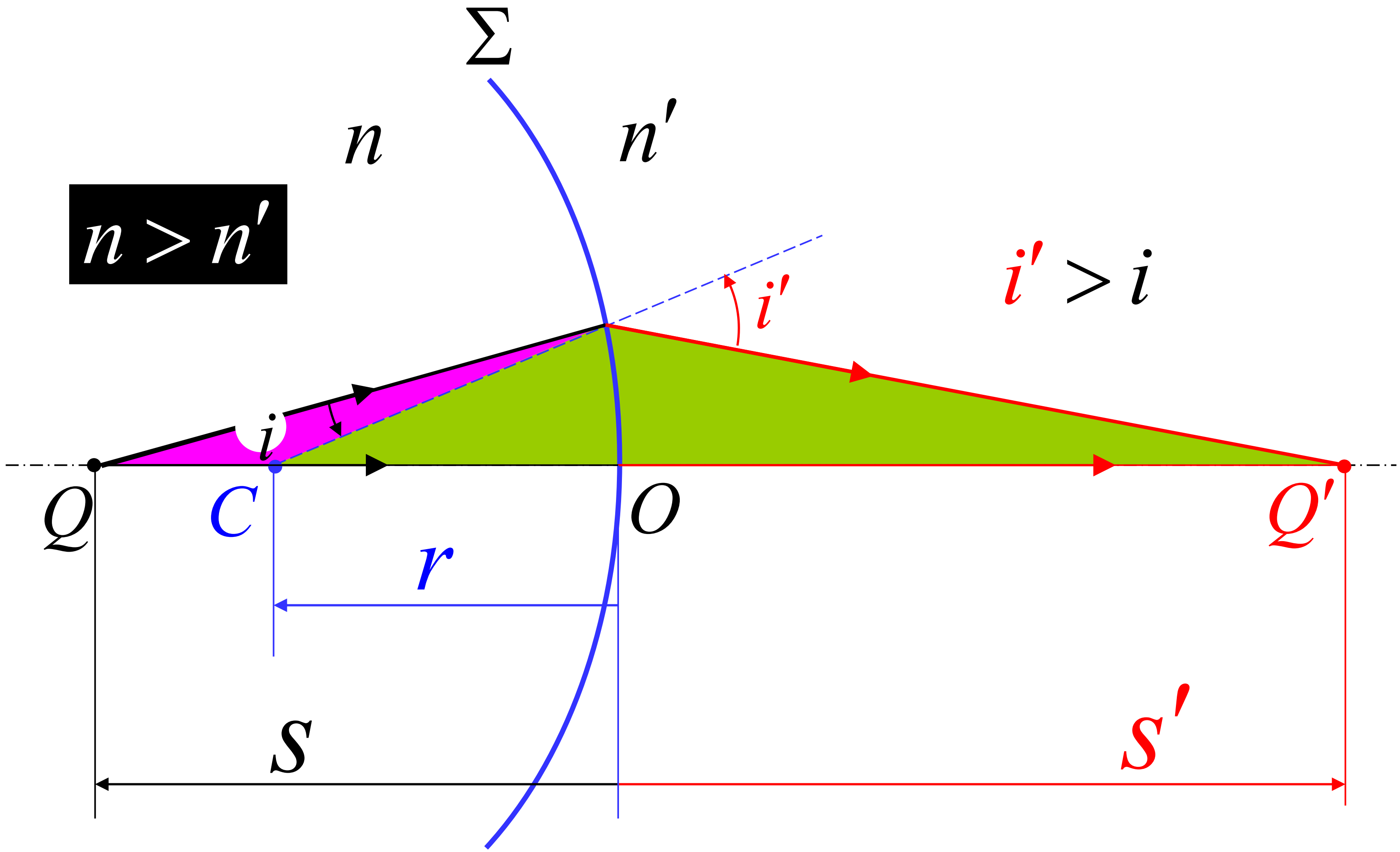
$$s=\frac{nr}{n'-n}=f=\frac{n}{\Phi}$$

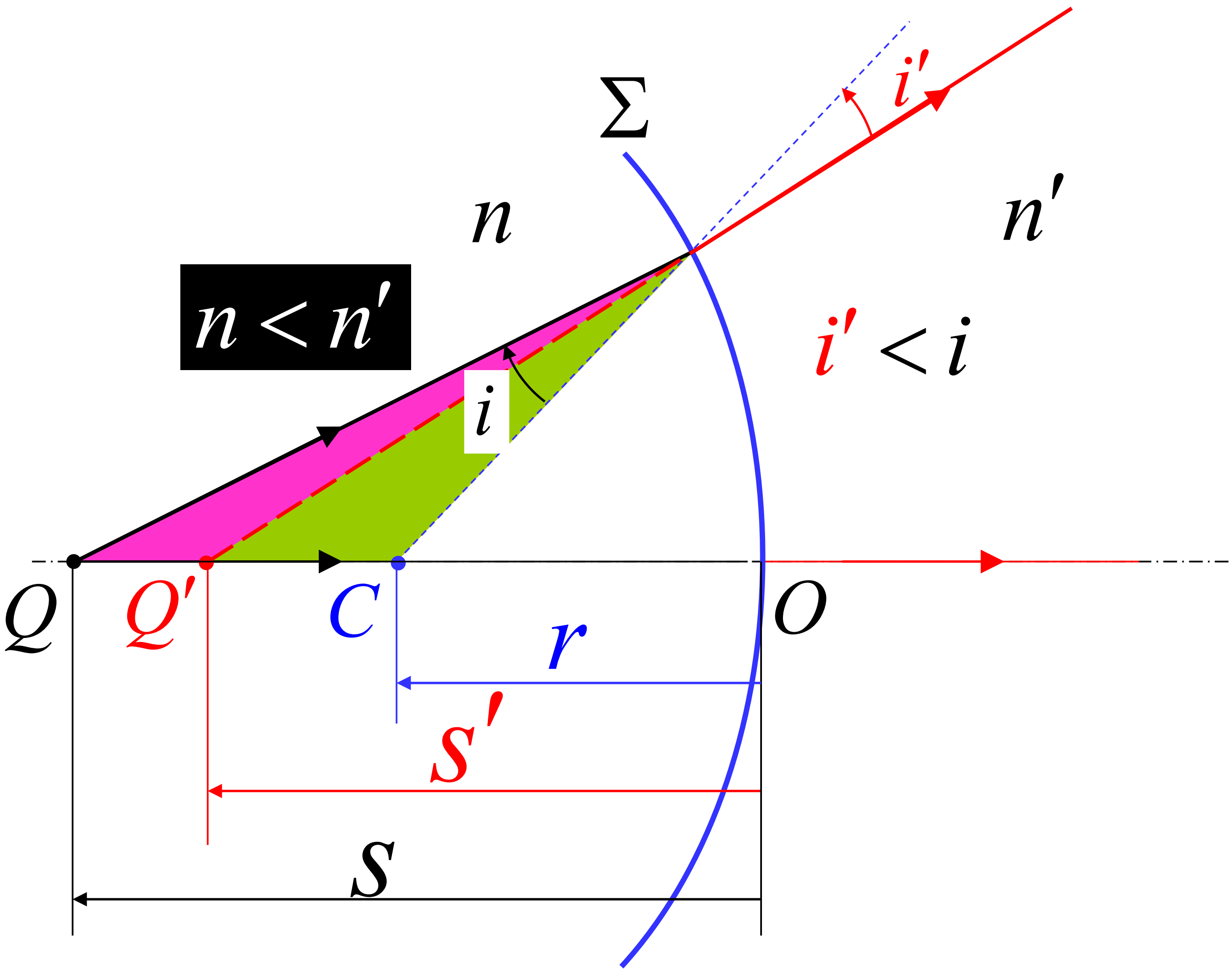
物方焦距，物点Q所在位置为物方焦点

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$$ Gauss公式

其它类型的折射球面

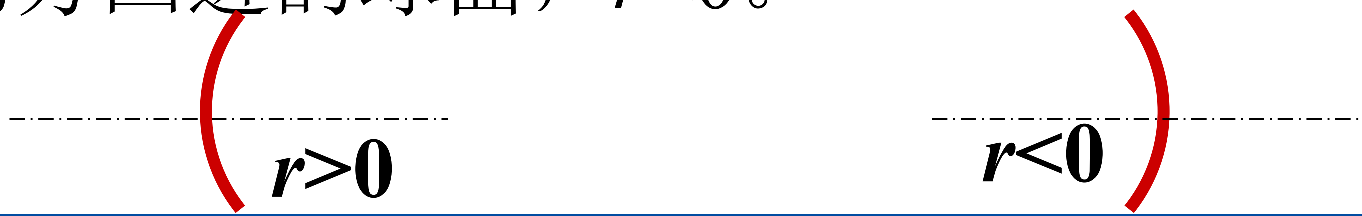



Σ
n
n′
n > n′
i′
i′ > i
i
Q
C
O
Q′
r
S
S′

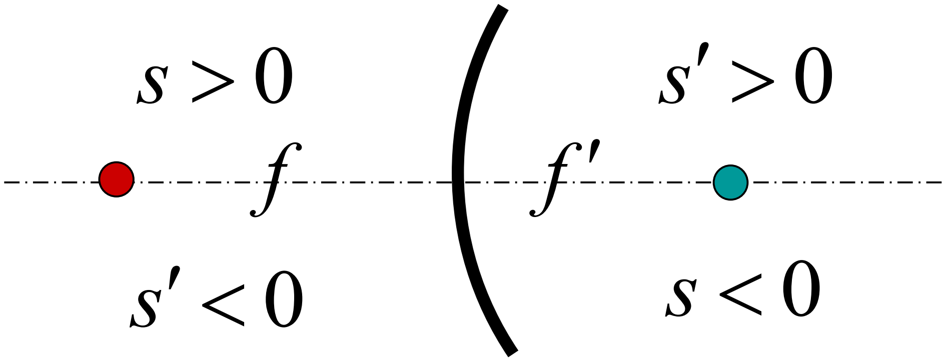

Σ
n
n'
$n < n'$
i'
i
$i' < i$
Q
Q'
C
O
r
s'
s

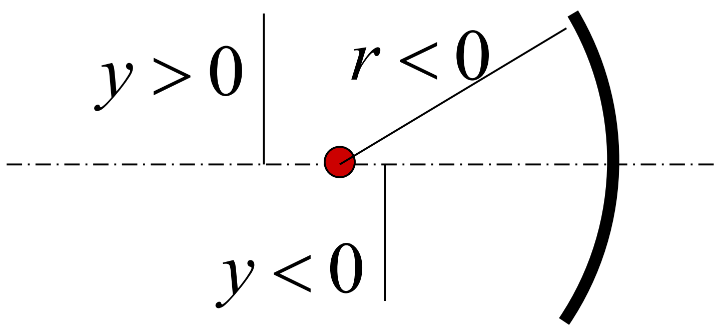
2．几何光学的符号约定

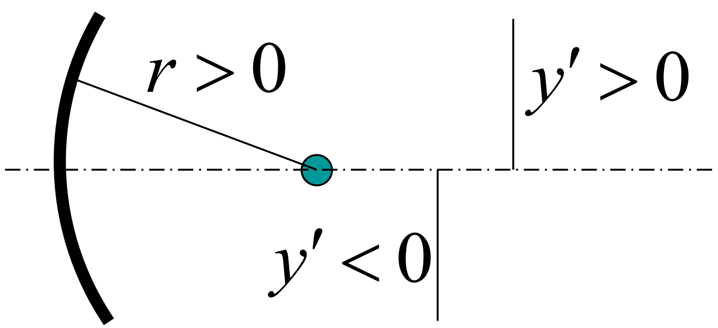
- （1）物方和像方：以光线入射的一方作为物方，另一方为像方。
- （2）物点在物方，物距$s>0$；物点在像方（虚物），物距$s<0$。
- （3）像点在像方，像距$s'>0$；像点在物方（虚像），像距$s'<0$。
- （4）向物方凸起的球面，其曲率半径$r>0$；向物方凹进的球面，$r<0$。



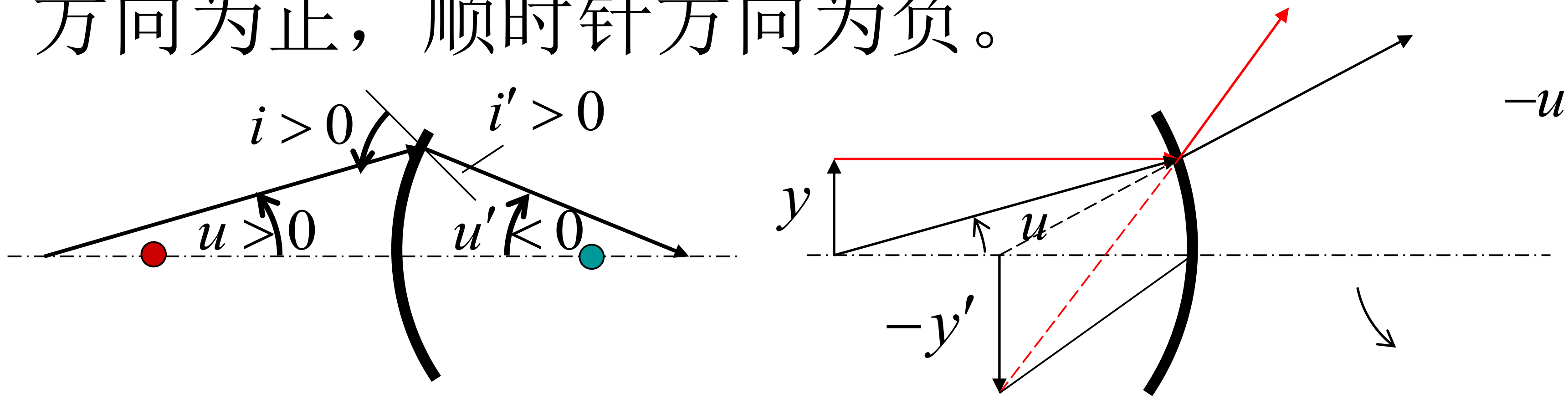
- （5）线段在主光轴之上，$y>0$；线段在主光轴之下，$y<0$。







- （6）角度自主光轴或球面法线算起，逆时针方向为正，顺时针方向为负。

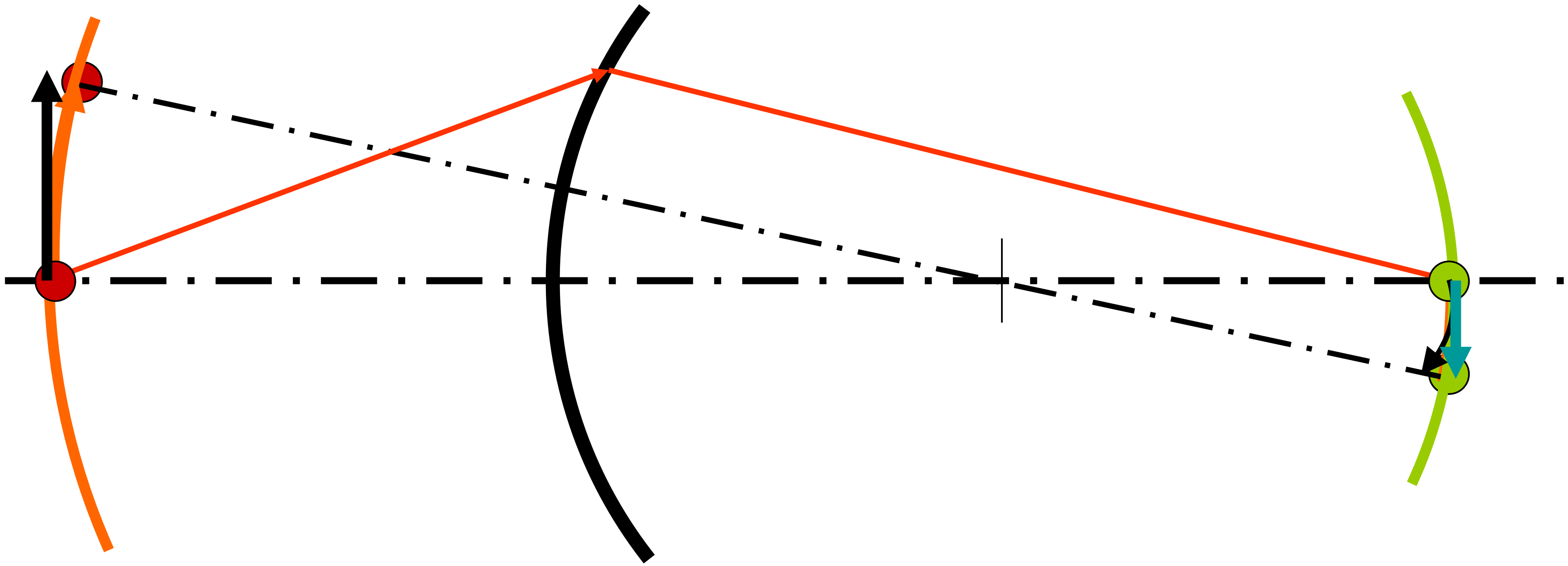


- （7）图中所标均为绝对值，对于是负值的参数，应在其前面加上负号。

- （8）对于反射球面，其物方和像方位于球面同一侧。

3. 轴外物点成像

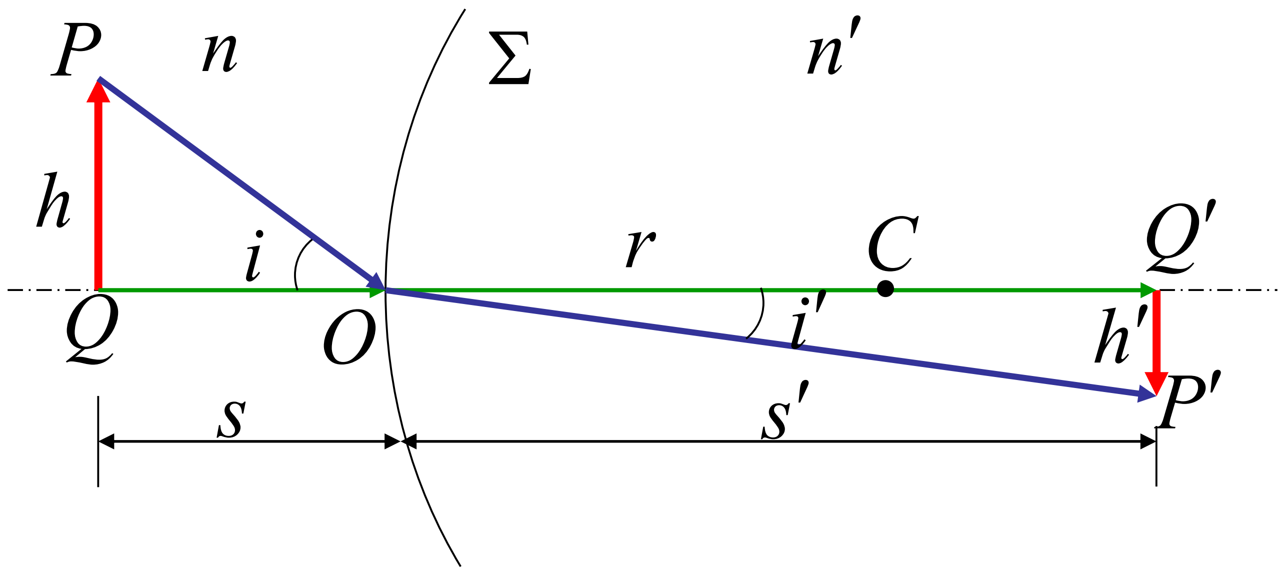
轴上物点成像在光轴上，轴外物点如何成像？



相当于光轴绕球心旋转，像随物动

满足近轴条件时，圆弧变为直线。

像的横向放大率

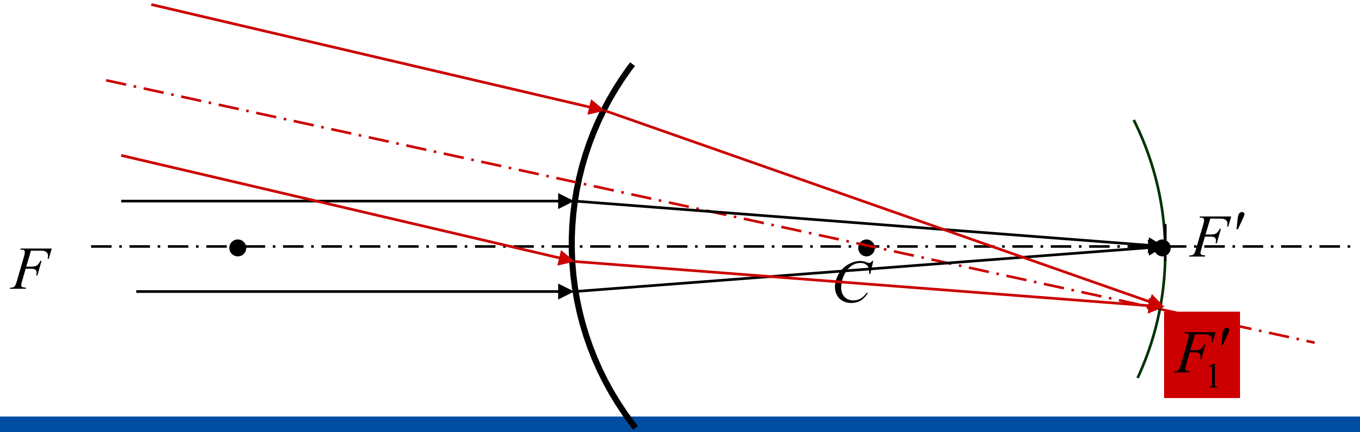


$$\frac{h'}{h}=\frac{P'Q'}{PQ}=\frac{s'\tan i'}{s\tan i}\approx\frac{s'\sin i'}{s\sin i}=\frac{ns'}{n's}$$

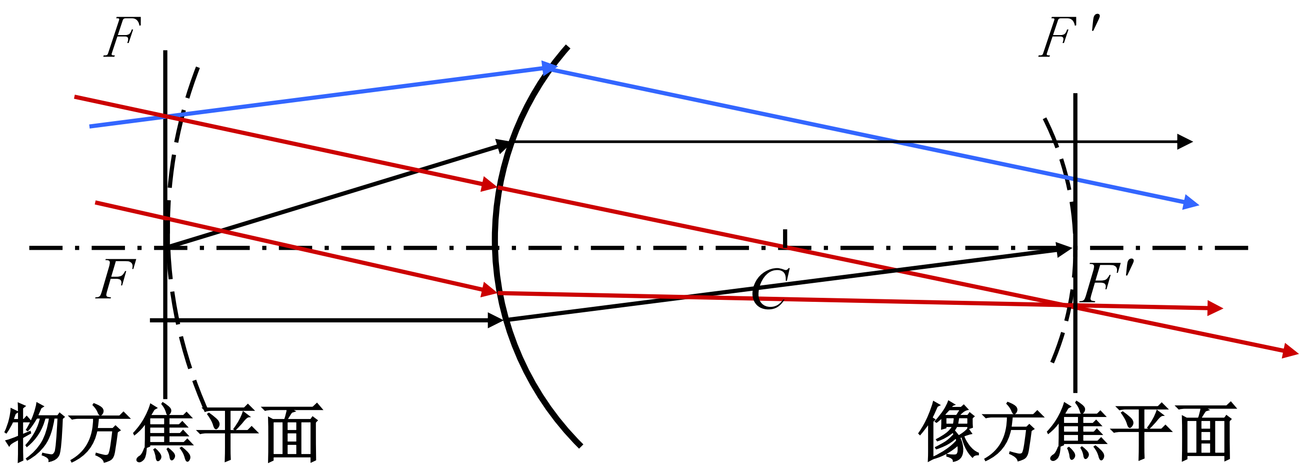
焦点与焦平面

平行于光轴的入射光线经过球面折射后，汇聚于像方焦点。

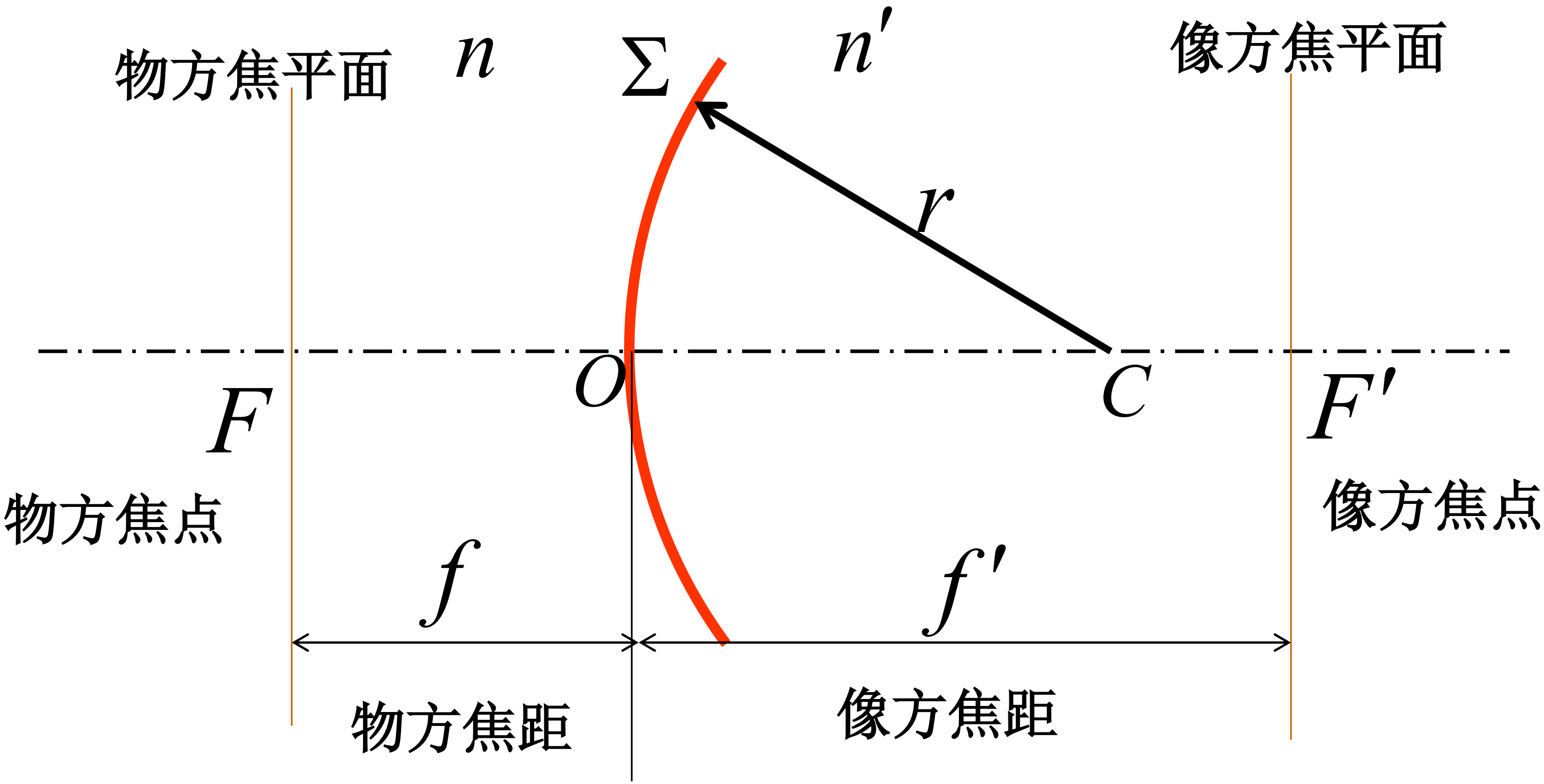
由于单球面有无数个光轴，所以，凡是相互平行的入射光线，经折射后，都汇聚于与入射光线平行的光轴的像方焦点上。所有这些像方的焦点构成一个球面。



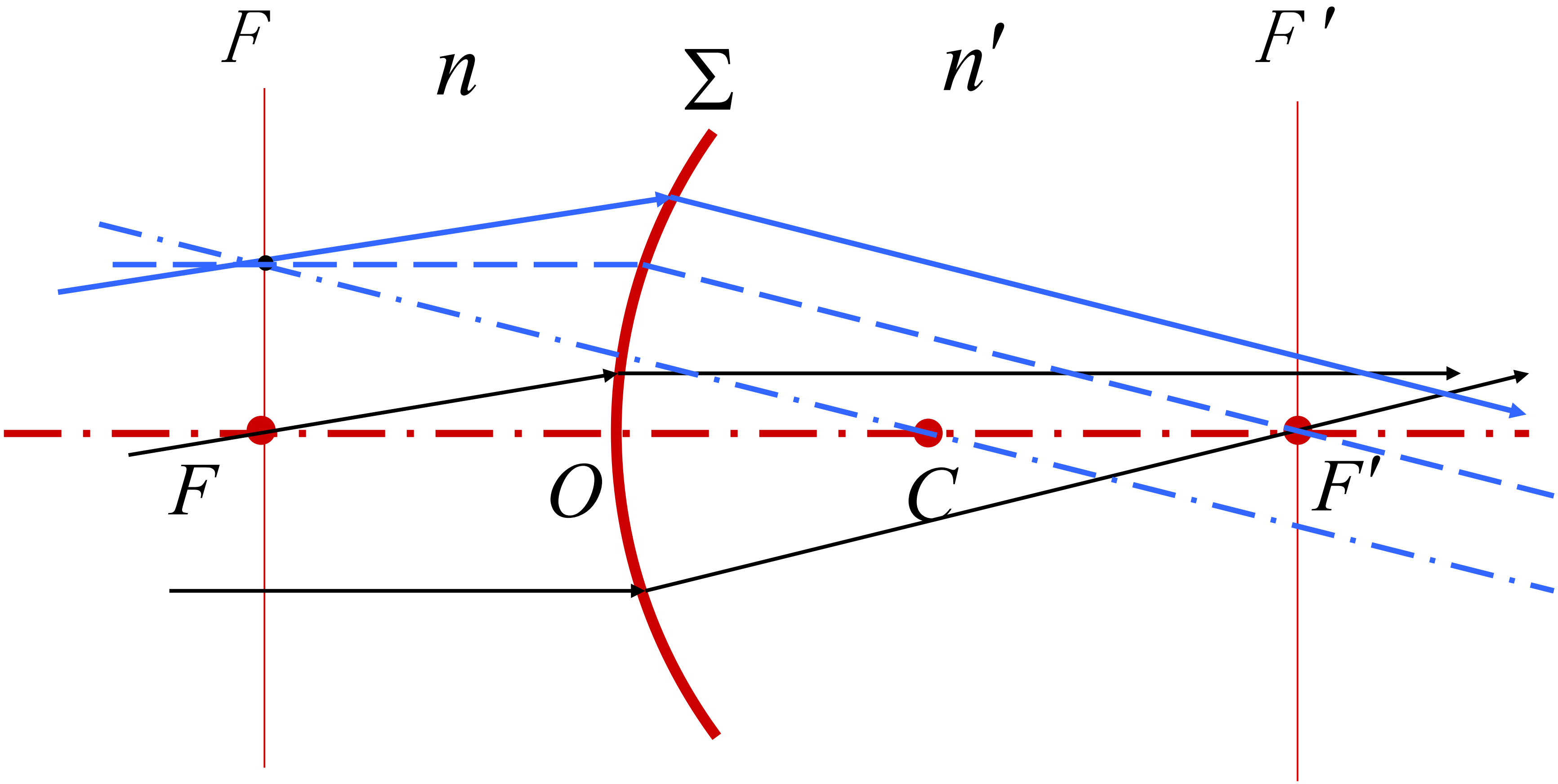
- 在傍轴条件下，上述像方焦点可以看作是处于一个平面上，这就是折射球面的**像方焦平面**
- 即：相互平行的入射光线都汇聚于像方焦平面上的同一点。
- 同样，可以得到并定义**物方焦平面**，从该平面上一点发出的所有光线，经折射后，在像方为相互平行的光线



折射球面的光学参数



折射球面的光学性质

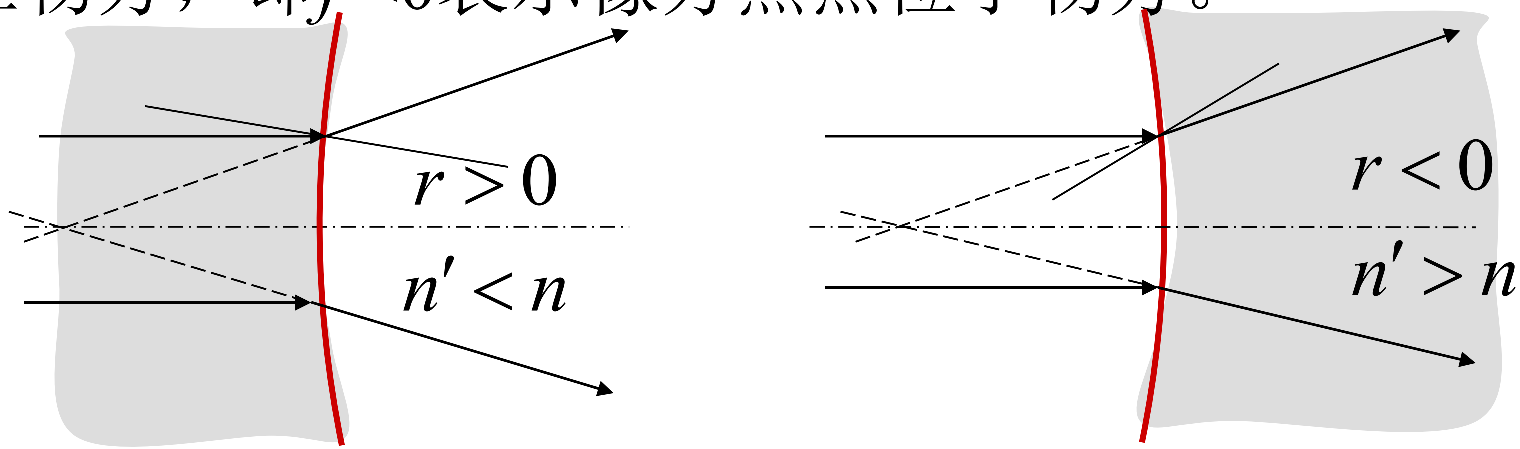


根据这些光学参数，可以得到任意一条光线的折射光线

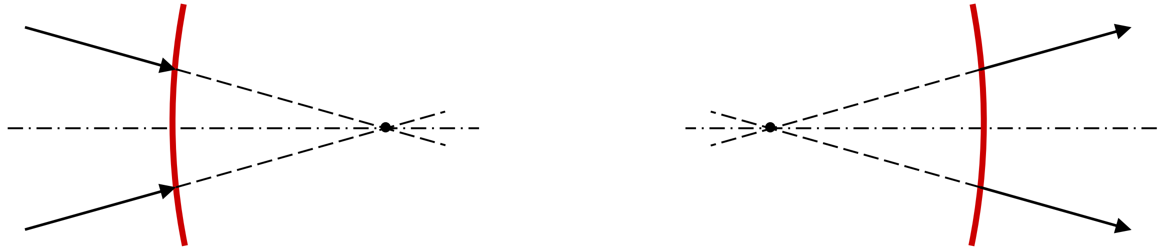
光焦度与焦距的讨论

$$\Phi = \frac{n' - n}{r} \qquad f = \frac{nr}{n' - n} \qquad f' = \frac{n'r}{n' - n}$$

- 显然，上述三个物理量既可以是正值，也可以是负值。
- 若$r>0$，$n'<n$，f，$f'<0$；
- 若$r<0$，$n'>n$，f，$f'<0$。
- 平行光入射，折射光发散。反向延长后，会聚点在物方，即$f'<0$表示像方焦点位于物方。



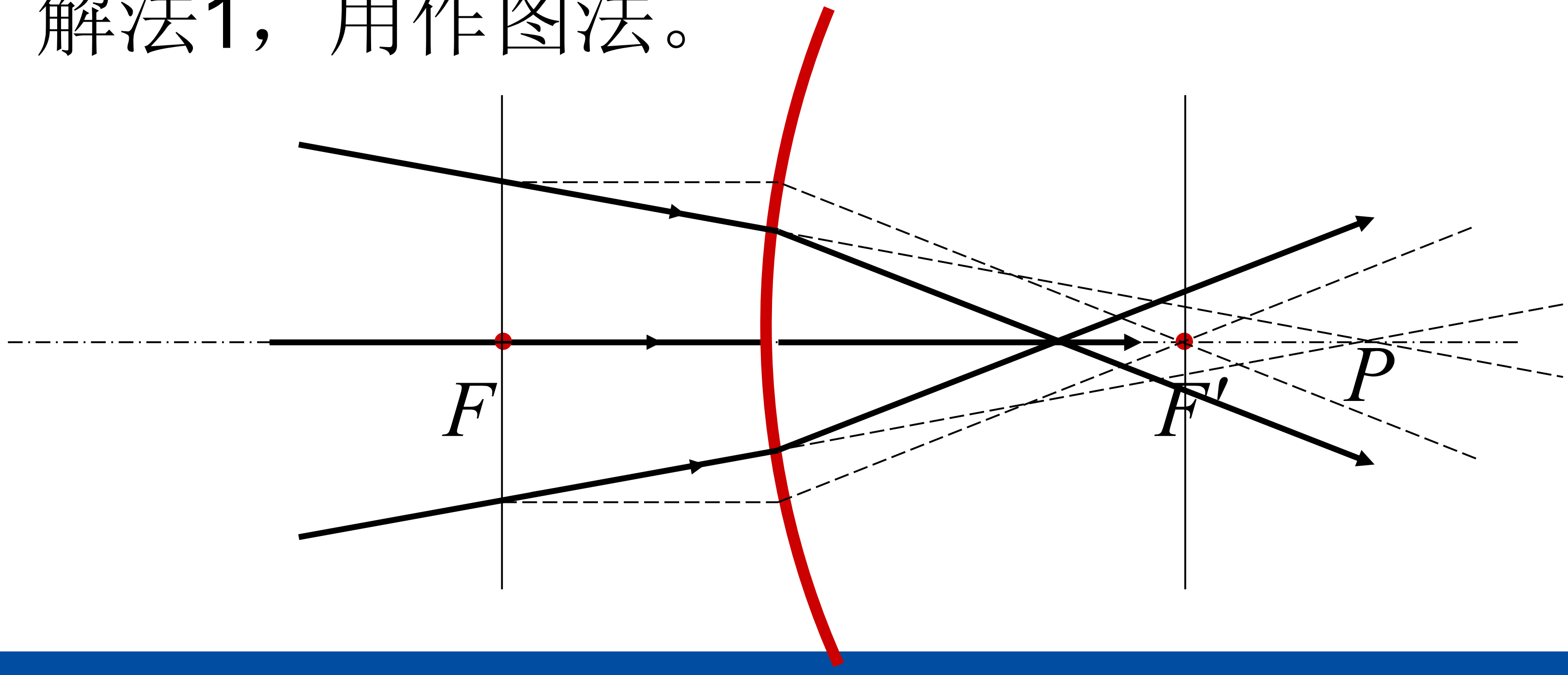
- 由于物、像间的共轭关系，$f<0$表示物方焦点位于像方。
- 焦距为负值，表示像方焦点实际上在物方，物方焦点实际上在像方。
- 由于焦距也是像距或物距，所以，如果物点位于像方（虚物），则其物距为负值；像点在物方（虚像），则其像距为负值。



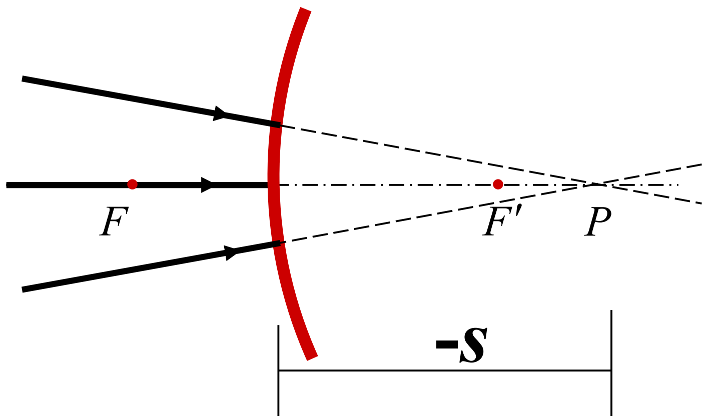
虚物，物距为负值　　虚像，像距为负值

例题

- 一束汇聚光射向球面，如果将入射光线延长，则汇聚在P点处，求这束光经球面折射后实际的汇聚点。
- 解法1，用作图法。

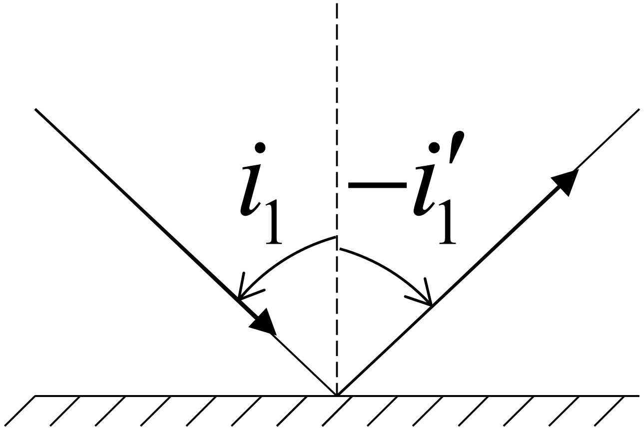


- 解法二，用计算法
- 将物距以P点到球面的距离的负值带入即可



$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1 \qquad s'=\frac{f'}{1-\frac{f}{s}}$$

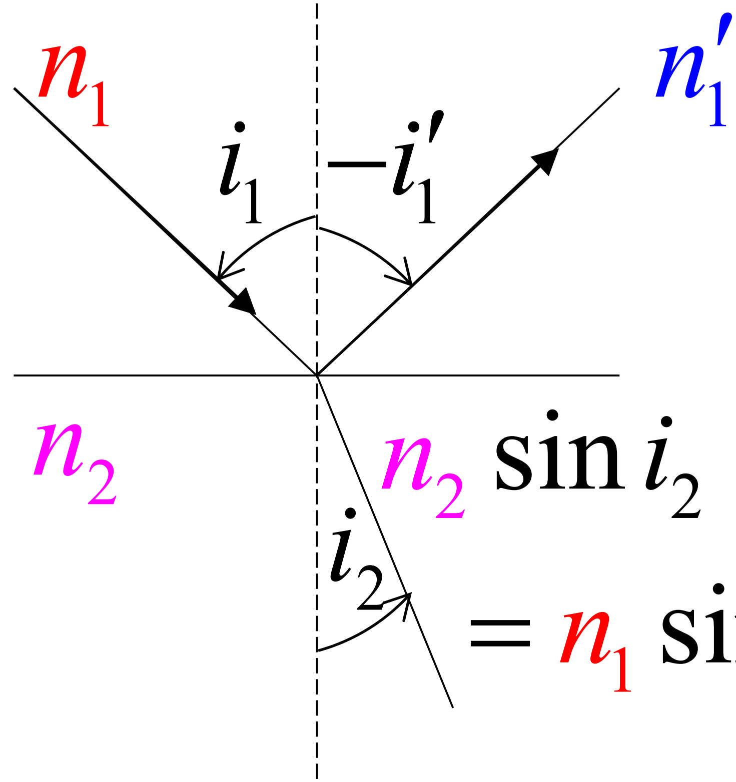
符号约定下的反射、折射定律



$$i_1' = -i_1$$

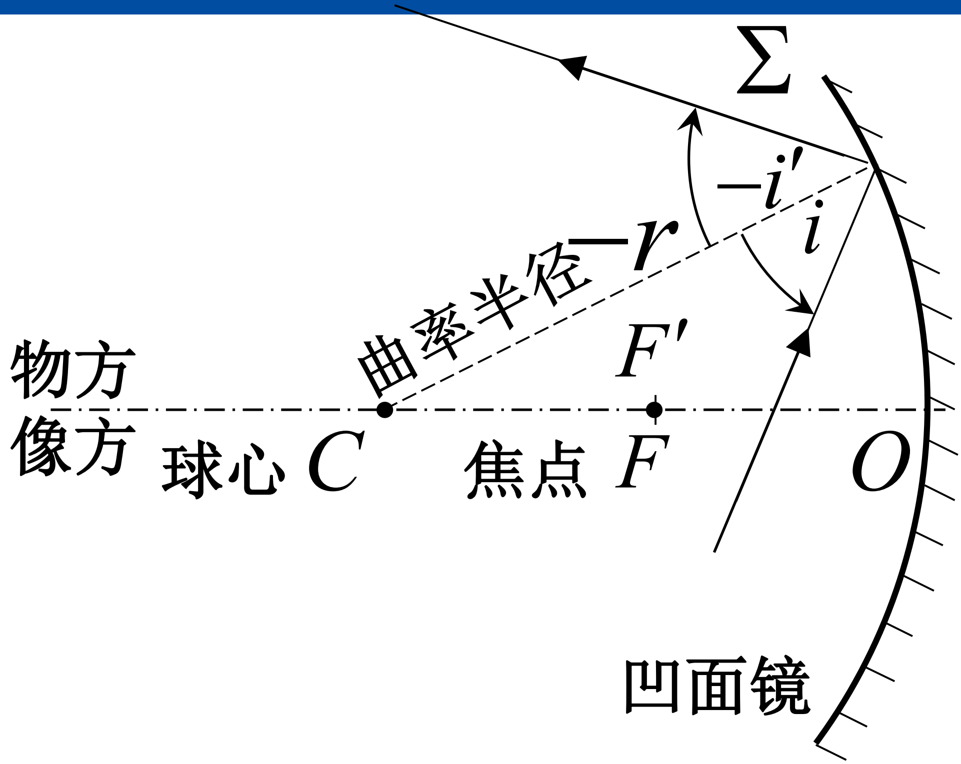
$$n_1' \sin i_1' = n_1 \sin i_1$$

$$n_1' = -n_1$$



$$n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$$

- 用同一数学公式表示反射、折射定律



由折射球面物像公式推导反射球面物像公式

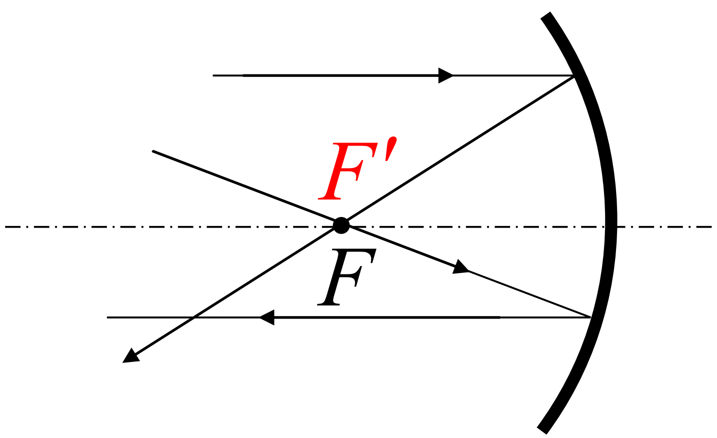
反射镜的像方在球面左侧

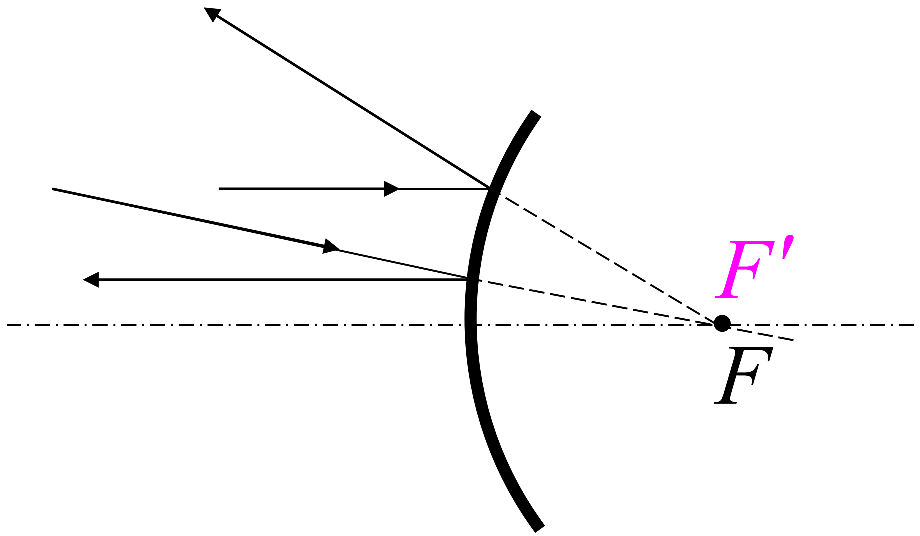
$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

$$\frac{-n}{-s'}+\frac{n}{s}=\frac{-n-n}{r}=-\frac{2n}{r} \Rightarrow \frac{n}{s'}+\frac{n}{s}=-\frac{2n}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r} \qquad f=f'=\frac{-r}{2}$$

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r} \qquad f=f'=-\frac{r}{2}$$



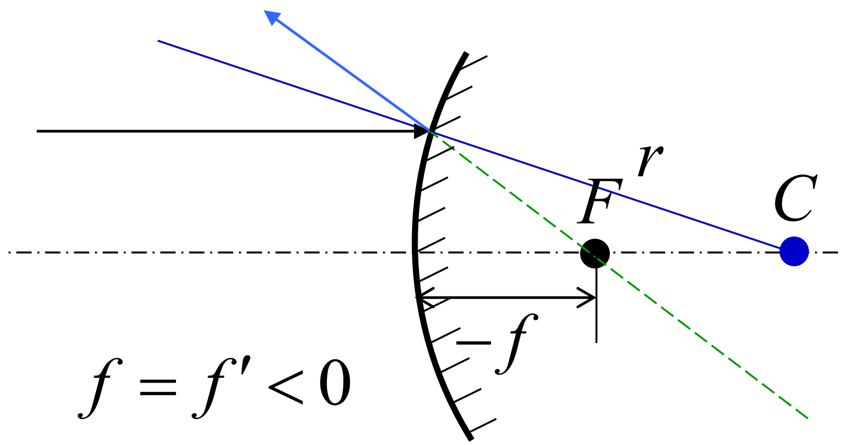


$$f=f'>0$$

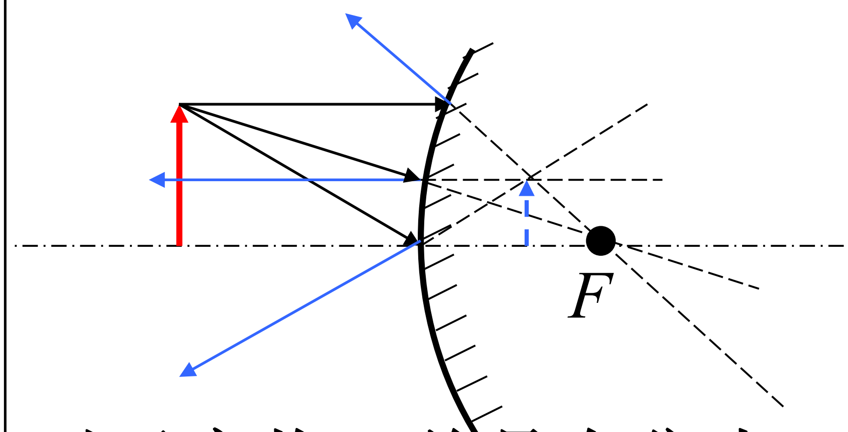
凹面镜

$$f=f'<0$$

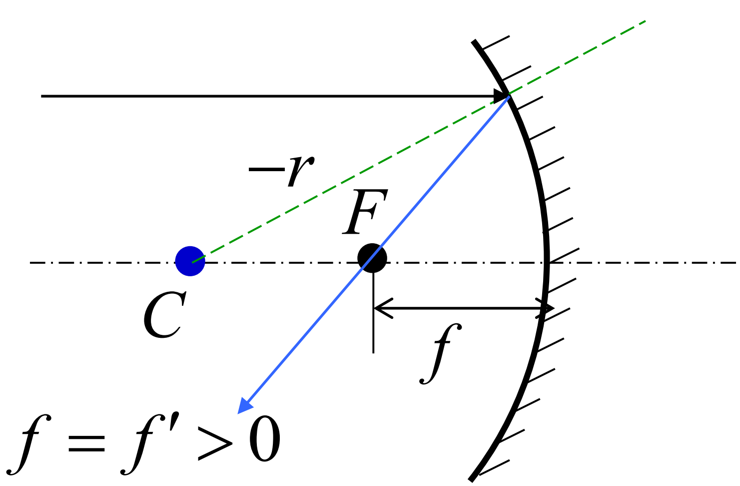
凸面镜



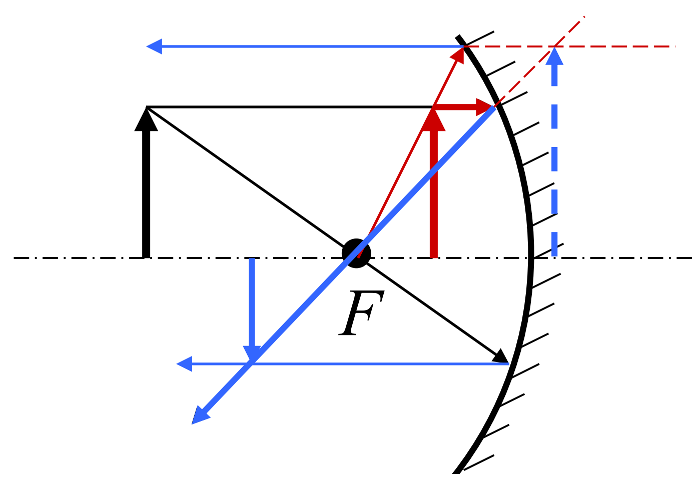
凸面镜（负镜）



对于实物，总是在焦点内侧成正立缩小虚像

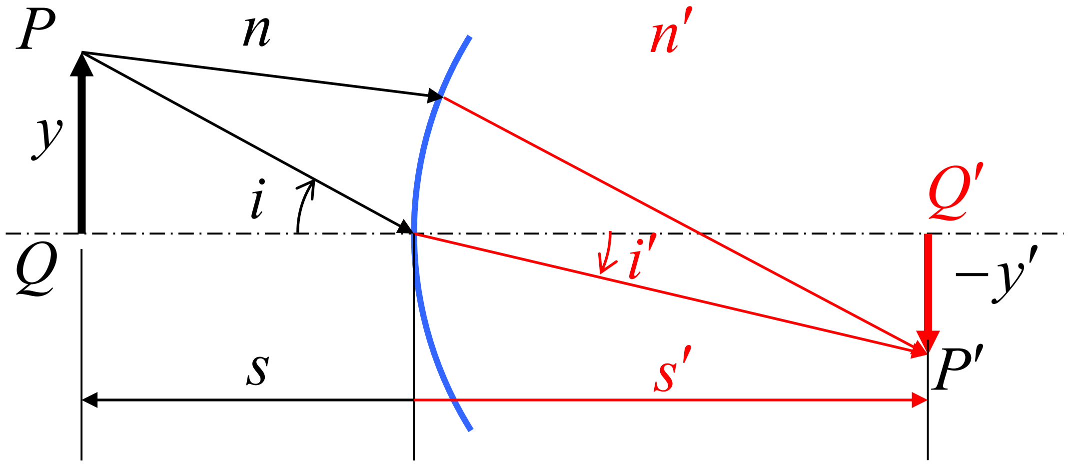


凹面镜（正镜）



可以成倒立实像或放大虚像

4．符号约定下像的横向放大率公式



折射球面

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{-s'\tan i'}{s\tan i}\approx-\frac{s'\sin i'}{s\sin i}=-\frac{ns'}{n's}$$

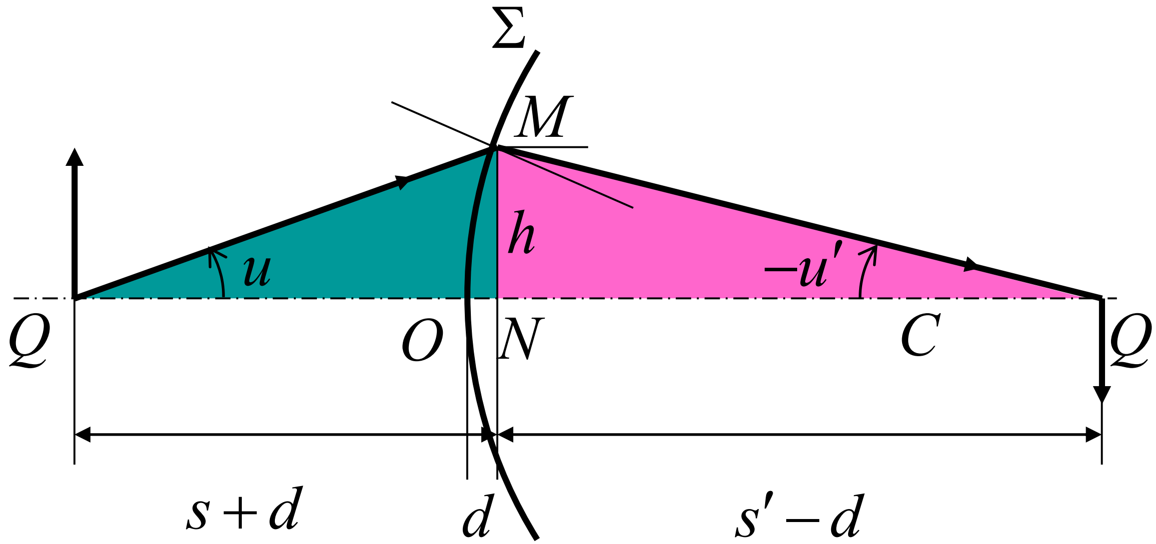
反射球面

$$n'=-n$$

$$s'\Rightarrow -s'$$

$$\beta=-\frac{s'}{s}$$

5．Lagrange-Helmhotz恒等式



对光线的角放大率为

$$\gamma = \frac{-u'}{u} \approx \frac{\tan(-u')}{\tan u}$$

$$= \frac{h/(s'-d)}{h/(s+d)} \approx \frac{s}{s'} = -\frac{ny}{n'y'}$$

由于 $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{ns'}{n's}$

可得到 $ynu = y'n'u'$

Lagrange-Helmhotz恒等式

作业：

P46：　2；

P56-P57：8,9,11,12,13